Capítulo 8

Transformada de Fourier

8.1 A Integral de Fourier

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função periódica de período $2L$, suave por partes, então

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{8.1}$$

nos pontos de continuidade de f, com

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L}\, dt, \quad n \geqslant 0, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}\, dt, \quad n \geqslant 1. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Se f não é uma função periódica, então ela não pode ser representada por uma série de Fourier. Podemos, no entanto, representar f por uma *integral de Fourier*, se f for pelo menos suave por partes e satisfizer além disso a condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty,$$

ou seja, se f for **absolutamente integrável**. Neste caso, podemos escrever

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} (A(\omega) \cos x\omega + B(\omega) \operatorname{sen} x\omega)\, d\omega \tag{8.3}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ que seja um ponto de continuidade de f, com

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t\, dt, \quad \omega \geqslant 0, \\ B(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \omega t\, dt, \quad \omega \geqslant 0. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Mais precisamente,

Teorema. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função suave por partes, absolutamente integrável. Então f tem uma representação por integral de Fourier que converge para $f(x)$ nos pontos de continuidade de f e para a média dos limites laterais nos pontos de descontinuidade de f.*

Esta representação integral para f pode ser motivado da seguinte forma: restrinja f ao intervalo fechado $[-L, L]$ e estenda ela periodicamente fora deste intervalo. Então, no intervalo $[-L, L]$, f tem a representação em série de Fourier dada em (8.1) com os coeficientes dados em (8.2). Fazendo $L \to \infty$, como a função f é integrável em $\mathbb{R}$, segue que necessariamente $a_0 \to 0$. Além disso, a integrabilidade de f também implica que a integral de f em $\mathbb{R}$ pode ser aproximada pela integral de f no intervalo $[-L, L]$, desde que L seja suficientemente grande. Assim, temos que os coeficientes a_n e b_n podem ser aproximados por

$$\begin{aligned} a_n &\approx \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{\pi}{L}A\left(\frac{n\pi}{L}\right), \\ b_n &\approx \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{\pi}{L}B\left(\frac{n\pi}{L}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\left[A\left(\frac{n\pi}{L}\right)\cos\frac{n\pi x}{L} + B\left(\frac{n\pi}{L}\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right]\frac{\pi}{L}.$$

Mas, se denotarmos $\omega_n = n\pi/L$ e $\Delta\omega = \pi/L$, o que equivale a fazer uma partição do intervalo $[0, \infty)$ em subintervalos de comprimento $\Delta\omega$, reconhecemos uma soma de Riemann:

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\left[A(\omega_n)\cos\omega_n x + B(\omega_n)\operatorname{sen}\omega_n x\right]\Delta\omega.$$

Fazendo $L \to \infty$, o que corresponde a fazer a norma da partição $\Delta\omega \to 0$, esta soma de Riemann converge para a integral de Fourier de f.

Exemplo 1. Obtenha a representação integral de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Temos

$$\begin{aligned} A(0) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} dt = \frac{2}{\pi}, \\ A(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos\omega t\,dt = \left.\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\pi\omega}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}, \\ B(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}\omega t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\operatorname{sen}\omega t\,dt = \left.\frac{\cos\omega t}{\pi\omega}\right|_{-1}^{1} = 0. \end{aligned}$$

Observe que $\lim_{\omega\to 0} A(\omega) = A(0)$ (ou seja, obtivemos neste caso a função $A(\omega)$ contínua) e a função B é a função identicamente nula, o que era de se esperar, porque f é uma função par. Logo

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\cos x\omega\,d\omega.$$

Em particular, segue do teorema da integral de Fourier que

$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\cos x\omega\,d\omega = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } |x| < 1, \\ \pi/4 & \text{se } |x| = 1, \\ 0 & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

e, escolhendo $x = 0$, obtemos o valor da *integral de Dirichlet*

$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\,d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

Como vemos no exemplo acima, quando uma função é par ou ímpar, sua integral de Fourier é mais simples (da mesma forma e pelo mesmo motivo que a série de Fourier de uma função periódica par ou ímpar é mais simples):

- Se f é par, então $B(\omega) \equiv 0$ e a integral de Fourier de f é dada simplesmente por
$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega) \cos x\omega \, d\omega,$$
também chamada a *integral de Fourier cosseno* de f.

- Se f é ímpar, então $A(\omega) \equiv 0$ e a integral de Fourier de f é dada simplesmente por
$$f(x) = \int_0^\infty B(\omega) \operatorname{sen} x\omega \, d\omega,$$
também chamada a *integral de Fourier seno* de f.

8.1.1 Exercícios

1. Encontre a representação integral de Fourier das funções dadas (em todos os casos, $a > 0$).

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -a < x < a, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 < x < 0, \\ 1 & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < x < 1, \\ 1 & \text{se } 1 < |x| < 2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < a, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 < x < a, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

j) $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

k) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

l) $f(x) = e^{-|x|}$.

m) $f(x) = e^{-x^2}$.

n) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 1, \\ 2 - x & \text{se } 1 < x < 2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

2. **(a)** Use o Exemplo 1 para mostrar que
$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \omega \cos \omega}{\omega} \, d\omega = \frac{\pi}{4}.$$

(b) Use integração por partes e o item anterior para obter
$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 \omega}{\omega^2} \, d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

(c) Use a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2\omega + \cos^2\omega = 1$ e o item anterior para obter

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^4\omega}{\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{4}.$$

(*Sugestão:* $\operatorname{sen}^2\omega = \operatorname{sen}^4\omega + \operatorname{sen}^2\omega\cos^2\omega = \operatorname{sen}^4\omega + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2\omega$.)

3. Usando a representação integral de Fourier, prove que as seguintes integrais impróprias têm os valores especificados abaixo.

a) $$\int_0^\infty \frac{\cos x\omega + w\operatorname{sen} x\omega}{1+\omega^2}\,d\omega = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0,\\ \pi/2 & \text{se } x=0,\\ \pi e^{-x} & \text{se } x>0.\end{cases}$$

b) $$\int_0^\infty \frac{1-\cos\pi\omega}{\omega}\operatorname{sen} x\omega\,d\omega = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } 0<x<\pi,\\ 0 & \text{se } x>\pi.\end{cases}$$

c) $$\int_0^\infty \frac{\cos x\omega}{1+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{2}e^{-x} \quad \text{se } x>0.$$

d) $$\int_0^\infty \frac{\cos\frac{\pi w}{2}\cos x\omega}{1-\omega^2}\,d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x & \text{se } |x|<\frac{\pi}{2},\\ 0 & \text{se } |x|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

e) $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\pi\omega\operatorname{sen} x\omega}{1-\omega^2}\,d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\operatorname{sen} x & \text{se } 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0 & \text{se } x>\pi.\end{cases}$$

f) $$\int_0^\infty \frac{\omega^3\operatorname{sen} x\omega}{\omega^4+4}\,d\omega = \frac{\pi}{2}e^{-x}\cos x \quad \text{se } x>0.$$

8.2 A Transformada de Fourier

8.2.1 Definição

Recordamos a fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta.$$

Dela segue que

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Vamos escrever a integral de Fourier na forma complexa. Temos

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^\infty (A(\omega)\cos x\omega + B(\omega)\operatorname{sen} x\omega)\, d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)(\cos\omega t\cos x\omega + \operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen} x\omega)\, dtd\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\omega(x-t)\, dtd\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)(e^{i\omega(x-t)} + e^{-i\omega(x-t)})\, dtd\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{i\omega(x-t)}\, dtd\omega + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i\omega(x-t)}\, dtd\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{i\omega(x-t)}\, dtd\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{i\omega(x-t)}\, dtd\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{i\omega(x-t)}\, dtd\omega.
\end{aligned}
$$

onde no último passo fizemos a mudança de variável $-\omega$. Portanto, a **forma complexa da integral de Fourier** é

$$
f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{i\omega(x-t)}\, dtd\omega. \tag{8.5}
$$

Por sua vez, a forma complexa da integral de Fourier pode ser escrita como

$$
f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i\omega t}\, dt\right] e^{i\omega x}\, d\omega.
$$

Defina a função $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por

$$
\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i\omega t}\, dt. \tag{8.6}
$$

Observe que apesar da função f ser uma função definida na reta (isto é, uma função de uma variável real) tomando valores reais, em geral a função $\widehat{f}$ é uma função definida na reta tomando valores **complexos**. De fato, a função $\widehat{f}$ pode ser escrita mais explicitamente, usando a fórmula de Euler, na forma

$$
\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\omega t\, dt - i\int_{-\infty}^\infty f(t)\operatorname{sen}\omega t\, dt\right).
$$

A parte complexa de $\widehat{f}$ será nula e portanto $\widehat{f}$ será uma função real se e somente se a integral

$$
\int_{-\infty}^\infty f(t)\operatorname{sen}\omega t = 0.
$$

Isso ocorrerá se e somente se a função f for par. Portanto, no estudo da transformada de Fourier é inevitável o aparecimento de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$, já que a maioria das funções não são pares. Diremos que uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ é absolutamente integrável se as suas partes real e imaginária (que são funções de de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$) forem absolutamente integráveis. O espaço de tais funções será denotado por $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Na notação acima, temos que

$$
f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(\omega)e^{i\omega x}\, d\omega. \tag{8.7}
$$

Isso nos leva à seguinte definição. Definimos a **transformada de Fourier** de f, como sendo a função $\mathcal{F}$ que associa a cada função absolutamente integrável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida pela expressão

(8.6); a sua inversa, chamada a **transformada de Fourier inversa**, é a função $\mathcal{F}^{-1}$ que associa a cada função $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que pertença ao conjunto imagem de $\mathcal{F}$ a função absolutamente integrável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela expressão (8.7). Assim, se f é contínua,

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f. \tag{8.8}$$

Isso é uma conseqüência imediata das definições acima:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}(f)(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt\right]e^{i\omega x}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega(x-t)}\,dt d\omega = f(x).\end{aligned}$$

Exemplo 2. A transformada de Fourier de uma função absolutamente integrável, apesar de ser uma função contínua, não é em geral uma função absolutamente integrável. O contra-exemplo clássico é a função *pulso*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

De fato, calculando a transformada de Fourier de f, obtemos

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}e^{-i\omega t}\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}i\omega}\left.e^{-i\omega t}\right|_{-1}^{1} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}i\omega}\left(e^{-i\omega} - e^{i\omega}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}i\omega}\left(\cos\omega - i\operatorname{sen}\omega - \cos\omega - i\operatorname{sen}\omega\right) \\ &= \frac{2i\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{2\pi}i\omega} = \frac{2\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{2\pi}\omega}.\end{aligned}$$

Segue que a transformada de Fourier de f é a função

$$\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega},$$

que não é uma função absolutamente integrável, como pode ser verificado. Observe porém que a descontinuidade da função pulso foi suavizada pela sua transformada de Fourier, já que $\widehat{f}$ é uma função contínua. Com efeito,

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega 0}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

e portanto $\lim_{\omega\to 0}\widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(0)$. Isso não foi um acidente e é sempre verdade.

Teorema. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função absolutamente integrável, então sua transformada de Fourier $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função contínua e limitada. Se, além disso, $\widehat{f}$ for absolutamente integrável, então f é contínua.*

A transformada de Fourier da função pulso no Exemplo 2 é uma função real porque ela é uma função par. Em geral, a transformada de Fourier de uma função real é uma função complexa, como no próximo exemplo.

Exemplo 3. Encontre a transformada de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Temos

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-t-i\omega t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-(1+i\omega)t}\,dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\omega)}\; e^{-(1+i\omega)t}\Big|_0^\infty .\end{aligned}$$

Como $\left|e^{-i\omega t}\right| = 1$, segue que

$$\lim_{t\to\infty}\left|e^{-(1+i\omega)t}\right| = \lim_{x\to\infty}\left|e^{-t}\right|\left|e^{-i\omega t}\right| = \lim_{t\to\infty}\left|e^{-t}\right| = 0,$$

logo

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\omega)} = \frac{1-i\omega}{\sqrt{2\pi}(1+\omega^2)}.$$

8.2.2 Propriedades Operacionais

A transformada de Fourier se comporta muito bem com relação a várias das operações comumente efetuadas em funções: combinações lineares, translação, dilatação, diferenciação, multiplicação por polinômios e convolução.

Propriedade 1 (Linearidade). *Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ são funções absolutamente integráveis e $a, b \in \mathbb{R}$, então*

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g).$$

Prova. Segue direto da definição e da propriedade de linearidade da integral. ■

Propriedade 2 (Transformadas de Fourier de Derivadas). *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função diferenciável absolutamente integrável tal que f' também é uma função absolutamente integrável, então*

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f)(\omega).$$

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função duas vezes diferenciável absolutamente integrável tal que f' e f'' também são funções absolutamente integráveis, então

$$\mathcal{F}(f'')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f')(\omega) = -\omega^2\mathcal{F}(f)(\omega).$$

Em geral, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função k vezes diferenciável absolutamente integrável tal que as suas derivadas até a ordem k também são funções absolutamente integráveis, então

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(\omega) = (i\omega)^k\mathcal{F}(f)(\omega).$$

Prova. Integrando por partes, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f')(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(t)e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\right] \\ &= i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = i\omega\mathcal{F}(f),\end{aligned}$$

porque, como f' é absolutamente integrável, necessariamente $\lim_{t\to\pm\infty}|f'(t)| = 0$, logo $\lim_{t\to\pm\infty}\left|f'(t)e^{-i\omega t}\right| = 0$.

As fórmulas para as transformadas de Fourier de derivadas de ordem superior seguem da aplicação iterada desta fórmula. ■

Propriedade 3 (Derivadas de Transformadas de Fourier). *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função absolutamente integrável tal que $xf(x)$ também é uma função absolutamente integrável, então*

$$\mathcal{F}(xf(x))(\omega) = i\mathcal{F}(f)'(\omega).$$

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função absolutamente integrável tal que $x^2 f(x)$ também é uma função absolutamente integrável, então

$$\mathcal{F}(xf(x))(\omega) = -\mathcal{F}(f)''(\omega).$$

Em geral, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função absolutamente integrável tal que $x^k f(x)$ também é uma função absolutamente integrável, então

$$\mathcal{F}(x^k f(x))(\omega) = i^k \mathcal{F}(f)^{(k)}(\omega).$$

Prova. Passando a derivada para dentro do sinal de integração, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}(f(x))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\omega}[f(t)e^{-i\omega t}]\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-it)f(t)e^{-i\omega t}\,dt = (-i)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= -i\mathcal{F}(xf(x))(\omega).
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por $-i$ obtemos a primeira fórmula. As outras fórmulas seguem da aplicação iterada da primeira. ■

Propriedade 4 (Transformada de Fourier de uma Translação). *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função absolutamente integrável, então*

$$\mathcal{F}(f(x-a))(\omega) = e^{-i\omega a}\mathcal{F}(f(x))(\omega).$$

Reciprocamente,

$$\mathcal{F}(e^{iax}f(x))(\omega) = \mathcal{F}(f(x))(\omega - a).$$

Prova. Mudando variáveis, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(x-a))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega(t+a)}\,dt \\
&= e^{-i\omega a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = e^{-i\omega a}\mathcal{F}(f(t)).
\end{aligned}$$

A segunda fórmula é obtida diretamente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(e^{i\omega x}f(x))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iat}f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega-a)t}\,dt \\
&= \mathcal{F}(f(x))(\omega - a).
\end{aligned}$$

■

Propriedade 5 (Transformada de Fourier de uma Dilatação). *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função absolutamente integrável e $a \neq 0$, então*

$$\mathcal{F}(f(ax))(\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Em particular,

$$\mathcal{F}(f(-x))(\omega) = \mathcal{F}(f)\,(-\omega)\,.$$

Prova. Mudando variáveis, se $a > 0$ temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(ax))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\frac{\omega}{a}t} \frac{1}{a} dt \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\frac{\omega}{a}t}\, dt = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(f(x)) \left(\frac{\omega}{a}\right).\end{aligned}$$

Se $a < 0$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(ax))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(t) e^{-i\frac{\omega}{a}t} \frac{1}{a} dt \\ &= \frac{1}{-a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\frac{\omega}{a}t}\, dt = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(f(x)) \left(\frac{\omega}{a}\right).\end{aligned}$$

■

A **convolução** de duas funções absolutamente integráveis f, g é definida como sendo a função

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t)\, dt. \tag{8.9}$$

Podemos assegurar que ela está bem definida (isto é, a integral imprópria que a define converge para todo x), se as funções f e g, além de serem absolutamente integráveis, são também *quadrado-integráveis*, isto é, seus quadrados também são absolutamente integráveis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt, \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\, dt < \infty.$$

De fato, utilizando a desigualdade de Schwarz

$$|ab| \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

válida para todos $a, b \in \mathbb{R}$, segue que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t)\, dt \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t) g(t)|\, dt \leqslant \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|^2\, dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\, dt < \infty.$$

Denotamos o espaço das funções quadrado-integráveis na reta por $L^2(\mathbb{R})$. Além disso, a convolução de funções absolutamente integráveis, quando está definida, é também uma função absolutamente integrável, de modo que a sua transformada de Fourier está definida:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(x)|\, dx &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|\, |g(t)|\, dt\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|\, dx \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \right) dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt \right) \\ &< \infty.\end{aligned}$$

A transformada de Fourier comporta-se extremamente bem em relação a convoluções: ela transforma convolução de funções essencialmente em produto de funções:

Propriedade 6 (Transformada de Fourier de uma Convolução). *Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ são funções absolutamente integráveis, então*

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g).$$

Prova. Mudando a ordem de integração e usando a Propriedade 4, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f*g)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(t)e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t-s)g(s)\,ds\right]e^{-i\omega t}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t-s)e^{-i\omega t}\,dt\right]g(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-i\omega s}\mathcal{F}(f)(\omega)\right]g(s)\,ds \\ &= \mathcal{F}(f)(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}g(s)e^{-i\omega s}\,ds = \mathcal{F}(f)(\omega)\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)(\omega).\end{aligned}$$

■

8.2.3 Transformada de Fourier da Função Gaussiana

A transformada de Fourier da função gaussiana desempenha um papel fundamental na resolução da equação do calor na barra infinita, conforme veremos mais tarde. Aqui vamos calculá-la. Recordamos a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

O seu valor pode ser obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx\right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}\,dy\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}e^{-y^2}\,dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-r^2}\,rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty}d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta = \pi.\end{aligned}$$

Teorema. *Seja $a > 0$. Então,*

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{ax^2}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\omega^2}{2a}}.$$

Em particular,

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{2}}) = e^{-\frac{\omega^2}{2}},$$

isto é, a transformada de Fourier da função $e^{-\frac{x^2}{2}}$ é ela própria.

Prova. Seja $f(x) = e^{-\frac{ax^2}{2}}$. Então f satisfaz a equação diferencial

$$f'(x) + axf(x) = 0.$$

Aplicando a transformada de Fourier a ambos os lados desta equação, obtemos (usando as Propriedades 1, 2 e 3)

$$i\omega\widehat{f}(\omega) + ai\widehat{f}'(\omega) = 0$$

ou

$$\widehat{f}'(\omega) + \frac{\omega}{a}\widehat{f}(\omega) = 0.$$

Resolvendo esta equação através de uma integração simples, obtemos

$$\widehat{f}(\omega) = Ce^{-\frac{\omega^2}{2a}}$$

para alguma constante C. [Em uma notação mais usual, a equação diferencial é $y' + \dfrac{\omega}{a}y = 0$, donde $y' = -\dfrac{\omega}{a}y$ ou $\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{\omega}{a}$; integrando ambos os lados desta equação obtemos $\log y = -\frac{\omega^2}{2a} + C$ e daí o resultado acima.] A constante C pode ser determinada através da integral imprópria relembrada acima:

$$C = \widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{at^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\,ds = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

■

A função gaussiana $e^{-\frac{x^2}{2}}$ não é a única função cuja transformada de Fourier é ela própria.

8.2.4 Tabela de Transformadas de Fourier

	$f(x)$	$\mathcal{F}(f)(\omega)$
1.	$\begin{cases} 1 & \text{se } \lvert x\rvert < a, \\ 0 & \text{se } \lvert x\rvert > a. \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{sen}(a\omega)}{\omega}$
2.	$\begin{cases} 1 & \text{se } a < x < b, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$	$\frac{i(e^{-ib\omega} - e^{-ia\omega})}{\sqrt{2\pi}\omega}$
3.	$\begin{cases} 1 - \frac{\lvert x\rvert}{a} & \text{se } \lvert x\rvert < a, \\ 0 & \text{se } \lvert x\rvert > a, \end{cases}, \quad a > 0.$	$2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{a\omega}{2}}{a\omega^2}$
4.	$\begin{cases} x & \text{se } \lvert x\rvert < a, \\ 0 & \text{se } \lvert x\rvert > a, \end{cases}, \quad a > 0.$	$i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a\omega\cos(a\omega) - \operatorname{sen}(a\omega)}{\omega^2}$
5.	$\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } \lvert x\rvert < \pi, \\ 0 & \text{se } \lvert x\rvert > \pi, \end{cases}$	$i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{sen}(\pi\omega)}{\omega^2 - 1}$
6.	$\begin{cases} \operatorname{sen}(ax) & \text{se } \lvert x\rvert < b, \\ 0 & \text{se } \lvert x\rvert > b, \end{cases}, \quad a, b > 0.$	$\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\operatorname{sen}[(\omega - a)b]}{\omega - a} + \frac{\operatorname{sen}[(\omega + a)b]}{\omega + a}\right)$
7.	$\begin{cases} \cos(ax) & \text{se } \lvert x\rvert < b, \\ 0 & \text{se } \lvert x\rvert > b, \end{cases}, \quad a, b > 0.$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\operatorname{sen}[(\omega - a)b]}{\omega - a} + \frac{\operatorname{sen}[(\omega + a)b]}{\omega + a}\right)$
8.	$\frac{1}{x^2 + a^2}, \quad a > 0.$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a\lvert\omega\rvert}}{a}$
9.	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{1 + a^2x^2}, \quad a > 0.$	$e^{-\frac{\lvert\omega\rvert}{a}}$
10.	$\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{ax}{2}}{ax^2}, \quad a > 0.$	$\begin{cases} 1 - \frac{\lvert\omega\rvert}{a} & \text{se } \lvert\omega\rvert < a, \\ 0 & \text{se } \lvert\omega\rvert > a. \end{cases}$
11.	$e^{-a\lvert x\rvert}, \quad a > 0.$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2 + \omega^2}$
12.	$\begin{cases} e^{-ax} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}, \quad a > 0.$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a + i\omega}$
13.	$\begin{cases} 0 & \text{se } x > 0, \\ e^{ax} & \text{se } x < 0, \end{cases}, \quad a > 0.$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a - i\omega}$
14.	$\lvert x\rvert^n e^{-a\lvert x\rvert}, \quad a > 0, n > 0.$	$\frac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{(a - i\omega)^{n+1}} + \frac{1}{(a + i\omega)^{n+1}}\right)$
15.	$e^{-\frac{a}{2}x^2}, \quad a > 0.$	$\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\omega^2}{2a}}$

8.2.5 Exercícios

1. Calcule a transformada de Fourier das funções a seguir (em todos os casos, $a > 0$).

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < a, \\ 0 & \text{se } |x| > a. \end{cases}$

b) $f(x) = e^{-|x|}$.

c) $f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } |x| < \pi, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } |x| < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

j) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

k) $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{a} & \text{se } |x| < a, \\ 0 & \text{se } |x| > a. \end{cases}$

2. (Relação de Reciprocidade para a Transformada de Fourier)

   (a) Use a definição das transformadas para provar que
   $$\mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(-x).$$

   (b) Use o item anterior para obter a seguinte relação de reciprocidade:
   $$\mathcal{F}^2(f)(x) = f(-x).$$

   (c) Conclua que f é uma função par se e somente se $\mathcal{F}^2(f) = f$; f é uma função ímpar se e somente se $\mathcal{F}^2(f) = -f$.

   (d) Mostre que para qualquer função f temos $\mathcal{F}^4(f) = f$.

3. Usando a Propriedade 4, conclua as identidades a seguir:
$$\mathcal{F}(\cos(ax)f(x)) = \frac{\mathcal{F}(f)(\omega - a) + \mathcal{F}(f)(\omega + a)}{2},$$
$$\mathcal{F}(\operatorname{sen}(ax)f(x)) = \frac{\mathcal{F}(f)(\omega - a) - \mathcal{F}(f)(\omega + a)}{2i}.$$

4. Use o exercício anterior e transformadas de Fourier de funções conhecidas para calcular as transformadas de Fourier das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{\cos x}{e^{x^2}}$.

b) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{e^{|x|}}$.

c) $f(x) = \dfrac{\cos x + \cos 2x}{x^2 + 1}$.

d) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos 2x}{x^2 + 4}$.

e) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$

5. Use uma transformada de Fourier conhecida e as propriedades operacionais para calcular a transformada de Fourier das funções a seguir.

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$

b) $f(x) = xe^{-x^2}$.

c) $f(x) = x^2 e^{-|x|}$.

d) $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$.

g) $f(x) = (1-x^2)e^{-x^2}$.

h) $f(x) = (1-x)^2 e^{-|x|}$.

i) $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$.

j) $f(x) = (1-x)e^{-|x-1|}$

8.3 O Método da Transformada de Fourier

Suponha que $u(x,t)$ seja uma função das variáveis $x \in \mathbb{R}$ e $t \geqslant 0$. Se fixarmos a variável temporal t, a $u(x,t)$ torna-se uma função apenas da variável espacial x, definida na reta toda, e podemos tomar a sua transformada de Fourier com relação à variável x. Denotaremos esta transformada por $\widehat{u}(\omega,t)$. Em outras palavras,

$$\widehat{u}(\omega,t) = \mathcal{F}(u(x,t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega x}\, dx. \tag{8.10}$$

Agora, da Propriedade 3 da transformada de Fourier, segue que

$$\begin{aligned} \widehat{u_{xx}}(\omega,t) &= i\omega \widehat{u}(\omega,t), \\ \widehat{u_{xx}}(\omega,t) &= (i\omega)^2 \widehat{u}(\omega,t) = \omega^2 \widehat{u}(\omega,t), \end{aligned}$$

ou seja, derivadas espaciais são transformadas em expressões que envolvem apenas a função $\widehat{u}(\omega,t)$ multiplicada por um monômio em ω. Por outro lado, derivando dentro do sinal de integração com relação a t, temos que

$$\widehat{u_t}(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t) e^{-i\omega x}\, dx = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega x}\, dx \right) = \widehat{u}_t(\omega,t),$$

o que significa que a derivada temporal é preservada pela transformada de Fourier. Assim, vemos que quando aplicamos a transformada de Fourier a uma equação diferencial parcial em duas variáveis, as derivadas parciais espaciais desaparecem e apenas as derivadas temporais permanecem. Em outras palavras, aplicando a transformada de Fourier transformamos a equação diferencial parcial em uma *equação diferencial ordinária* em t. Esta observação é a essência do método da transformada de Fourier para resolver equações diferenciais parciais. Em resumo, o método funciona da seguinte maneira:

Passo 1: Obtenha a transformada de Fourier de todas as equações envolvidas (i.e., a equação diferencial parcial e a condição inicial).

Passo 2: Resolva a equação diferencial ordinária, obtendo a solução $\widehat{u}(\omega,t)$.

Passo 3: Aplique a transformada de Fourier inversa a $\widehat{u}(\omega,t)$ para obter $u(\omega,t)$.

À título de exemplo, vamos aplicar este método às equações do calor e da onda.

8.3.1 A Equação do Calor para uma Barra Infinita

Vamos resolver o problema de condução de calor em uma barra homogênea, isolada termicamente e infinita. Este é o problema de valor inicial (*problema de Cauchy*)

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} & \text{se } -\infty < x < \infty \text{ e } t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & \text{se } -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{8.11}$$

Assumimos que a função f é contínua, limitada e absolutamente integrável. Aplicando a transformada de Fourier a este problema, obtemos a equação diferencial ordinária em t

$$\begin{cases} \widehat{u}_t(\omega,t) = k\omega^2 \widehat{u}(\omega,t) \\ \widehat{u}(\omega,0) = \widehat{f}(\omega). \end{cases}$$

A solução geral desta equação é

$$\widehat{u}(\omega,t) = C(\omega) e^{-k\omega^2 t}.$$

Para obter o valor de $C(\omega)$, usamos a condição inicial:

$$\widehat{f}(\omega) = \widehat{u}(\omega,0) = C(\omega).$$

Portanto,

$$\widehat{u}(\omega,t) = \widehat{f}(\omega)e^{-k\omega^2 t}. \tag{8.12}$$

Tomando transformadas de Fourier inversas de ambos os lados da equação, obtemos

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{-k\omega^2 t}e^{ix\omega}\,d\omega. \tag{8.13}$$

Às vezes, no entanto, esta solução não é conveniente em certas aplicações práticas. Usando a propriedade da transformada de Fourier com relação a uma convolução, podemos obter uma solução em termos da condição inicial $f(x)$. De fato, voltando à equação que dá a solução $\widehat{u}(\omega,t)$, observamos que a segunda função do lado direito é uma gaussiana em ω que, conforme vimos anteriormente, a menos de uma constante é a transformada de Fourier dela própria. Mais precisamente,

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{a}{2}x^2}) = \frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\omega^2}{2a}}.$$

Daí, se

$$g(x) = \sqrt{\frac{1}{2kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}},$$

então

$$\widehat{g}(\omega) = e^{-k\omega^2 t}.$$

[Tome $a = 1/(2kt)$.] Logo, podemos escrever

$$\widehat{u}(\omega,t) = \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega).$$

Lembrando agora que a transformada de Fourier de uma convolução é o produto das transformadas de Fourier das funções multiplicadas por $\sqrt{2\pi}$, ou seja

$$\widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f*g}(\omega),$$

segue que

$$\widehat{u}(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f*g}(\omega).$$

Portanto, aplicando a transformada de Fourier inversa, obtemos

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f*g)(x)$$

ou

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4kt}}\,ds. \tag{8.14}$$

Esta é a solução da equação do calor em uma barra infinita, e além disso a única solução do problema, se entendermos por solução uma função contínua e limitada em $t \geqslant 0$ (existem outras soluções, mas elas não são limitadas, e do ponto de vista físico esperamos que a solução do problema seja uma distribuição de temperaturas limitada).

Exemplo 4. Resolva o problema

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{4}u_{xx} & \text{se } -\infty < x < \infty \text{ e } t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2} & \text{se } -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

Solução: Denotando $f(x) = e^{-x^2}$, segue que

$$\widehat{u}(\omega, t) = \widehat{f}(\omega) e^{-k\omega^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} e^{-\frac{\omega^2 t}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{(1+t)\omega^2}{4}}.$$

Logo,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{(1+t)\omega^2}{4}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{1+t}} e^{-\frac{x^2}{1+t}} = \frac{1}{\sqrt{1+t}} e^{-\frac{x^2}{1+t}}.$$

pois fazendo $\frac{1+t}{4} = \frac{1}{2a}$, segue que $a = \frac{2}{1+t}$.

8.3.2 A Equação da Onda em uma Corda Infinita

Vamos resolver o problema das vibrações transversais de uma corda infinita, homogênea e de peso desprezível:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \text{se } -\infty < x < \infty \text{ e } t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & \text{se } -\infty < x < \infty, \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{se } -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{8.15}$$

Assumimos que as funções f, g são contínuas, limitadas e absolutamente integráveis. Aplicando a transformada de Fourier a este problema, obtemos a equação diferencial ordinária em t

$$\begin{cases} \widehat{u}_{tt}(\omega, t) = c^2\omega^2 \widehat{u}(\omega, t) \\ \widehat{u}(\omega, 0) = \widehat{f}(\omega), \\ \widehat{u}_t(\omega, 0) = \widehat{g}(\omega). \end{cases}$$

A solução geral desta equação é

$$\widehat{u}(\omega, t) = A(\omega) \cos c\omega t + B(\omega) \operatorname{sen} c\omega t.$$

Para obter os valores de $A(\omega)$ e $B(\omega)$, usamos a condições iniciais:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= \widehat{u}(\omega, 0) = A(\omega), \\ \widehat{g}(\omega) &= \widehat{u}_t(\omega, 0) = c\omega B(\omega). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\widehat{u}(\omega, t) = \widehat{f}(\omega) \cos c\omega t + \frac{\widehat{g}(\omega)}{c\omega} \operatorname{sen} c\omega t.$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa, obtemos a solução do problema:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\widehat{f}(\omega) \cos c\omega t + \frac{\widehat{g}(\omega)}{c\omega} \operatorname{sen} c\omega t \right] e^{i\omega x}\, d\omega. \tag{8.16}$$

Em alguns casos específicos, esta integral pode ser computada explicitamente.

Exemplo 5. Resolva o problema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & \text{se } -\infty < x < \infty \text{ e } t > 0, \\ u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2} & \text{se } -\infty < x < \infty, \\ u_t(x,0) = 0. & \text{se } -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

Solução: Denotando $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, segue que

$$\widehat{u}(\omega, t) = \widehat{f}(\omega) \cos \omega t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega|} \cos \omega t.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathcal{F}^{-1}(e^{-|\omega|}\cos\omega t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{i\omega\theta}+e^{-i\omega\theta}}{2}e^{-|\omega|}\right)\\
&= \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left(e^{i\omega\theta}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|\omega|}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-i\omega\theta}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|\omega|}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(x+t)^2}+\frac{1}{1+(x+t)^2}\right),
\end{aligned}$$

usando a propriedade da transformada de Fourier de uma translação, pois $\mathcal{F}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|\omega|}\right) = \frac{1}{1+x^2}$. Observe que esta resposta coincide com a solução de D'Alembert.

8.3.3 Exercícios

1. Resolva a equação do calor ou da onda dada. Em todos os casos, assuma $-\infty < x < \infty$ e $t > 0$.

a) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(x,0) = \dfrac{1}{4+x^2} \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(x,0) = \begin{cases} \cos x & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{se } -\infty < x < \infty \text{ e } t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2} & \text{se } -\infty < x < \infty. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_t = \frac{1}{100}u_{xx} \\ u(x,0) = \begin{cases} 100 & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases} \end{cases}$.

e) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(x,0) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{2} & \text{se } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases} \end{cases}$.

g) $\begin{cases} u_t = \frac{1}{4}u_{xx} \\ u(x,0) = \begin{cases} 20 & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases} \end{cases}$

h) $\begin{cases} u_t = \frac{1}{100}u_{xx} \\ u(x,0) = \begin{cases} 100 & \text{se } -2 < x < 0, \\ 50 & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{cases}$

i) $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = \dfrac{100}{1+x^2}. \end{cases}$

j) $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = e^{-|x|}. \end{cases}$

2. Usando o método da transformada de Fourier, resolva o problema de valor inicial dado. Em todos os casos, assuma $-\infty < x < \infty$ e $t > 0$.

a) $\begin{cases} u_{xt} = u_{xx} \\ u(x,0) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} e^{-|x|} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} u_{tt} = u_{xxxx} \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3u_t + u_x = 0 \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} au_t + bu_x = 0 \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_t + tu_x = 0 \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} u_t = t^2 u_x \\ u(x,0) = 3\cos x. \end{cases}$

g) $\begin{cases} u_t + a(t)u_x = 0 \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} u_t + (\operatorname{sen} t)u_x = 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen} x. \end{cases}$

i) $\begin{cases} u_t = u_x \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$ **j)** $\begin{cases} u_t = tu_{xx} \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$

k) $\begin{cases} u_t = a(t)u_{xx} \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \quad , \quad a(t) > 0.$ **l)** $\begin{cases} u_{tt} + 2u_t = -u \\ u(x,0) = f(x), \\ u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$

m) $\begin{cases} u_t = e^{-t} u_{xx} \\ u(x,0) = 100, \end{cases}$ **n)** $\begin{cases} u_t = tu_{xxxx} \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$

o) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xxt} \\ u(x,0) = f(x), \\ u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$ **p)** $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xxt} + 3u_{xxxx} \\ u(x,0) = f(x), \\ u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$

3. Resolva o problema do calor com convecção na barra infinita (isto é, existe troca de calor da barra com o meio ambiente):
$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} + ku_x & \text{se } -\infty < x < \infty \text{ e } t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & \text{se } -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

4. Resolva o problema da vibração da corda infinita com amortecimento ($b > 0$):
$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} - 2bu_t & \text{se } -\infty < x < \infty \text{ e } t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & \text{se } -\infty < x < \infty, \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{se } -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

5. Resolva o problema da vibração na viga infinita:
$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xxxx} & \text{se } -\infty < x < \infty \text{ e } t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & \text{se } -\infty < x < \infty, \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{se } -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

6. Resolva a equação de Korteweg-de Vries linearizada:
$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xxx} & \text{se } -\infty < x < \infty \text{ e } t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & \text{se } -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

Encontre a solução para $f(x) = e^{-x^2/2}$ e quando f é a função pulso (em ambos os casos tome $c = 1$).

7. Usando o método da transformada de Fourier, mostre que a solução da equação de Laplace no semiplano superior (problema de Dirichlet)

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{se } -\infty < x < \infty \text{ e } y > 0, \\ u(x,0) = f(x) & \text{se } -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

é dada por

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{(x-s)^2 + y^2}\, ds.$$

Use esta fórmula (chamada a *fórmula integral de Poisson*) para resolver o problema de Dirichlet para

$$f(x) = \begin{cases} 100 & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Determine as isotermas no semiplano superior para este problema específico.

8. Definimos o *núcleo de Poisson* como sendo a função

$$P_y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \text{para } -\infty < x < \infty \text{ e } y > 0.$$

Usando a transformada de Fourier, mostre a *propriedade de semigrupo* do núcleo de Poisson:

$$(P_{y_1} * P_{y_2})(x) = P_{y_1 + y_2}(x).$$

De posse desta propriedade e usando também o exercício anterior, resolva o problema de Dirichlet para $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Quais são as isotermas neste caso?