

MAE0221 - Probabilidade
Quarta Lista de Exercícios

1. Se X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$$

, então X_1 e $X_1 \cdot X_2$ são independentes?

2. Considere uma amostra sem reposição, de tamanho 2 retirada de uma urna contendo 3 bolas numeradas 1, 2 e 3. Sejam:

X : o número da primeira bola retirada

Y : o maior dos dois números retirados.

A) Encontrar a função de probabilidade conjunta de (X, Y)

B) Encontrar $P(X = 1|Y = 3)$.

C) Encontrar $Cov(X, Y)$.

3. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição geométrica de parâmetro p . Encontrar $P(X = Y)$, $P(X \geq Y)$.

4. Considere o lançamento de dois tetraedros com lados numerados de 1 a 4. Sejam Y_1 o menor dos números e Y_2 o maior dos números observados.

A) Qual a função de probabilidade conjunta de (Y_1, Y_2) ?

B) Encontre $P(Y_1 > 1, Y_2 > 1)$

C) Encontrar a distribuição condicional de $Y_2|Y_1$ para cada um dos possíveis valores de Y_1 .

D) Encontrar o coeficiente de correlação linear entre Y_1 e Y_2 .

5. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição uniforme no conjunto $\{0, 1, 2, \dots, N\}$.

A) Obtenha $P(X \geq Y)$ e $P(X = Y)$.

B) Encontre as funções de probabilidades de $M = \min\{X, Y\}$ e de $|Y - X|$.

6. Suponha que uma caixa contenha r bolas numeradas de 1 a r . Selecciona-se, sem reposição, uma amostra aleatória de tamanho n . Seja Y o maior número observado na amostra e Z o menor.

Determine $P(Y \leq y)$ e $P(Z \geq z)$.

7. Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$. Seja Y uma variável aleatória com

$$P(Y = y|X = x) = \binom{n}{y} x^y (1-x)^{n-y}, \quad y = 0, 1, \dots, n.$$

Encontre $E[Y]$. Qual a função de distribuição de Y ?

8. Três moedas justas são lançadas. Sejam

X : O número de cara das duas primeiras moedas;

Y : O número de coroas das duas últimas moedas.

A) Qual a distribuição conjunta de (X, Y) ?

B) Encontrar a função de probabilidade da variável aleatória $(Y|X = 1)$. Qual sua função de distribuição?

C) Calcular $Cov(X, Y)$.

9. Seja X uma variável aleatória com função de probabilidade $P(X = 1) = \frac{1}{3}$ e $P(X = 2) = \frac{2}{3}$. Considere a variável aleatória condicional $(Y|X = x)$ com distribuição binomial de parâmetros x e $\frac{1}{2}$.
- A) Qual é a $E[Y]$ e a $Var(Y)$?
- b) Qual é a distribuição conjunta de (X, Y) ?
10. Seja Y uma variável aleatória com distribuição de Poisson com parâmetro λ . Considere a variável aleatória condicional $(X|Y = y)$ com distribuição binomial de parâmetros y e p . Encontre a distribuição de X .
11. Seja X e Y variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $P(X = k) = p(1-p)^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Qual a função de probabilidade da variável aleatória $Z = \frac{X}{X+Y}$? (Definir $\frac{X}{X+Y} = 0$ se $X+Y = 0$).
12. Se X_1, X_2, \dots, X_k são variáveis aleatórias com distribuições de Poisson com parâmetros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, respectivamente. Mostre que a distribuição condicional de $(X_1|X_1 + X_2 + \dots + X_k)$ tem distribuição binomial.
13. A) Se X_1, X_2, \dots, X_n são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição geométrica, qual a distribuição de $X_1 + X_2 + \dots + X_n$?
- B) Se X_1, X_2, \dots, X_n são variáveis aleatórias independentes com distribuições de Poisson de parâmetros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, respectivamente, qual a distribuição de $X_1 + X_2 + \dots + X_n$?
- C) Se X_1, X_2, \dots, X_n são variáveis aleatórias independentes com distribuições binomiais negativas de parâmetros r_1, r_2, \dots, r_n e p , respectivamente, qual a distribuição de $X_1 + X_2 + \dots + X_n$?