

MAE0221 - Probabilidade
Quarta Avaliação

1. A

Nome:

No. USP:

2. Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty.$$

A) Qual a função geradora de momentos de X ?

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-|x|} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{(t+1)x} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{(t-1)x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{(t+1)x}}{t+1} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{2} \frac{e^{(t-1)x}}{t-1} \Big|_0^{\infty}. \end{aligned}$$

Se $|t| < 1$, temos

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t+1} - 0 \right) + \frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{t-1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) = \frac{1}{1-t^2}. \end{aligned}$$

B) Qual a média de X ?

$$\begin{aligned} (M_X(t))' &= \frac{2t}{(1-t^2)^2} \\ E[X] &= (M_X(0))' = 0. \end{aligned}$$

3. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição exponencial padrão. Qual a função densidade de probabilidade da variável aleatória definida por

$$Y = (X - 1)^2.$$

$X \sim f_X(x) = e^{-x}, x > 0$. e $Y = (X - 1)^2$.

Como $g(x) = (x - 1)^2$ não é bijetiva, dividimos o domínio de $f_X(x)$ (os reais positivos) em dois, J_1 e J_2 .

$$J_1 = \{x : x < 1\}$$

onde $g^{-1}(x) = -\sqrt{x} + 1$. Observe que $g^{-1}(g(x)) = -\sqrt{(x-1)^2} + 1 = -[-(x-1)] + 1x - 1 + 1 = x$.

Portanto, nest domínio temos $\frac{dg^{-1}(x)}{dy} = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$ e

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \exp[1 - \sqrt{y}].$$

Em

$$J_2 = \{x : x \geq 1\},$$

$g^{-1}(x) = \sqrt{x} + 1$. Observe que $g^{-1}(g(x)) = \sqrt{(x-1)^2} + 1 = x - 1 + 1 = x$.

Portanto, nest domínio temos $\frac{dg^{-1}(x)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ e

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \exp[1 + \sqrt{y}].$$

Concluimos

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \exp[1 - \sqrt{y}]1_{\{0 < y < 1\}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \exp[1 + \sqrt{y}]1_{\{1 \leq y < \infty\}}.$$