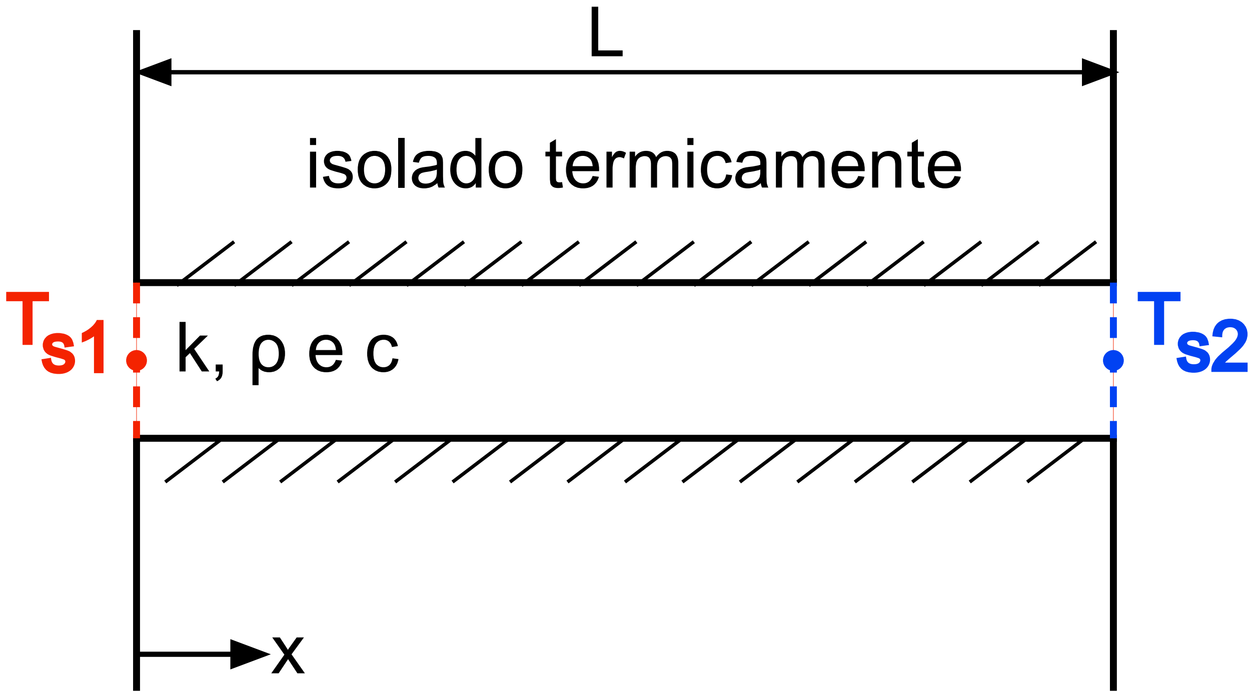
Método dos Volumes Finitos

Exemplo 1: barra isolada

Considere a barra de seção retangular (A_c) cujas extremidades são mantidas a T_1 e T_2:

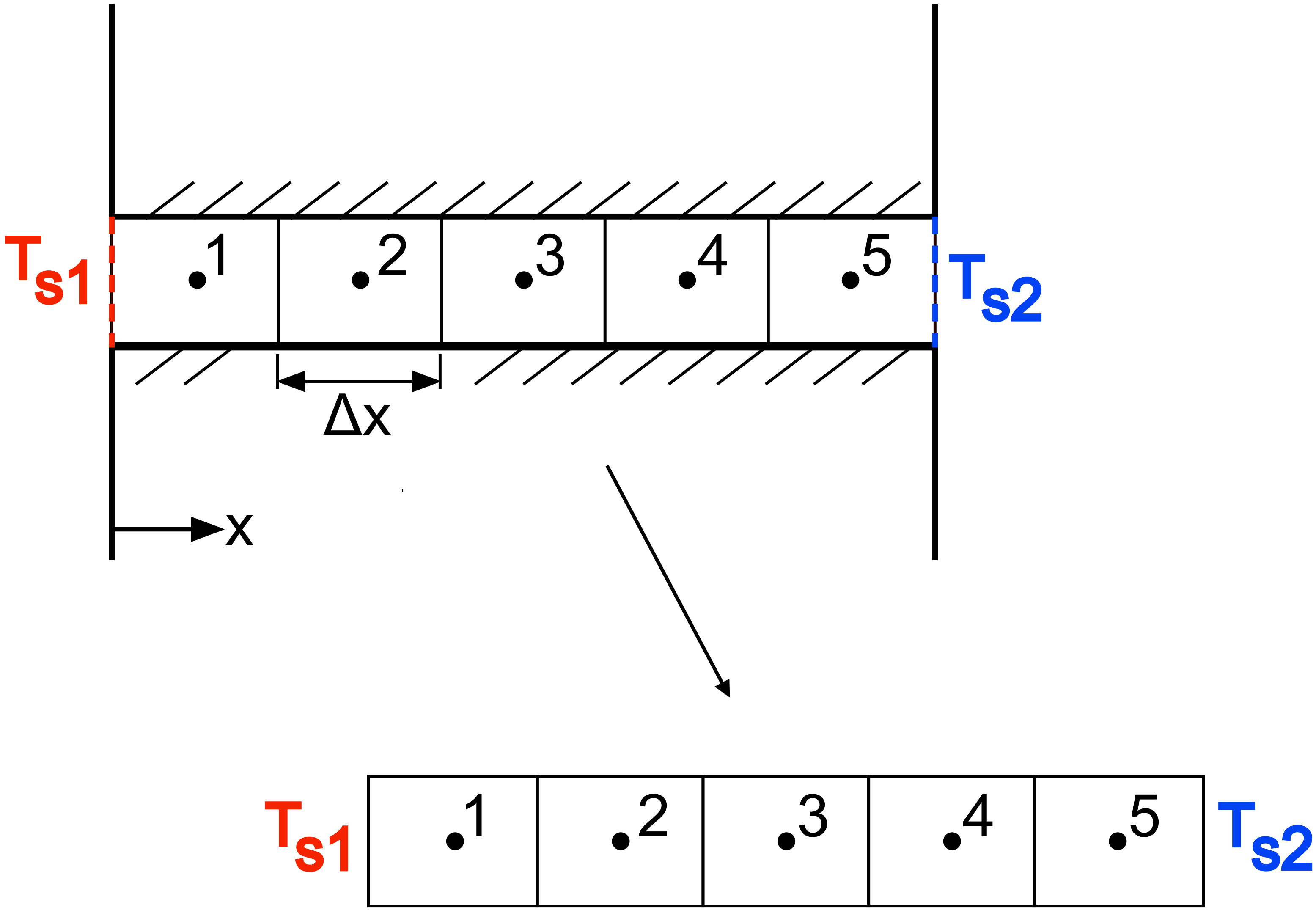


O perfil de temperatura em regime permanente assume a forma:

$$T(x) = \frac{T_{s2} - T_{s1}}{L} x + T_{s1}$$

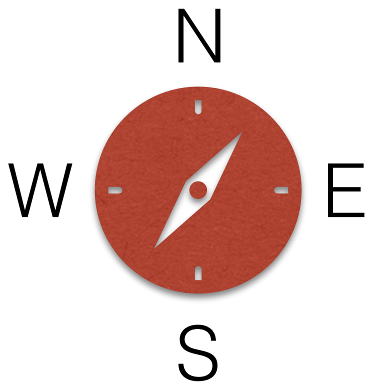
Exemplo 1: barra isolada

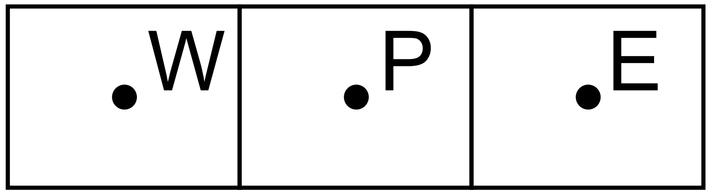
Vamos dividir o domínio em 5 volumes com largura uniforme:



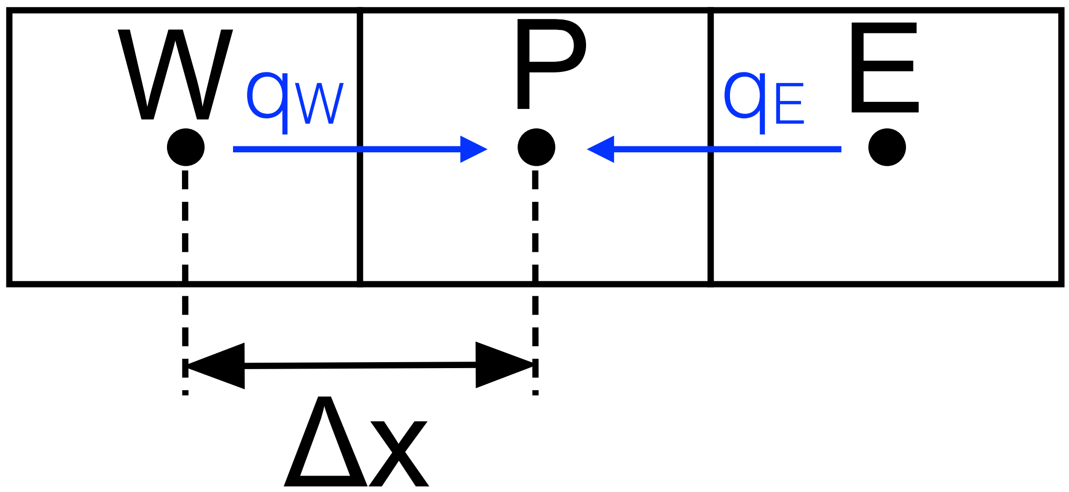
Exemplo 1: barra isolada

Apliquemos um balanço de energia a cada um dos volumes, começando pelos internos (2, 3 ou 4):

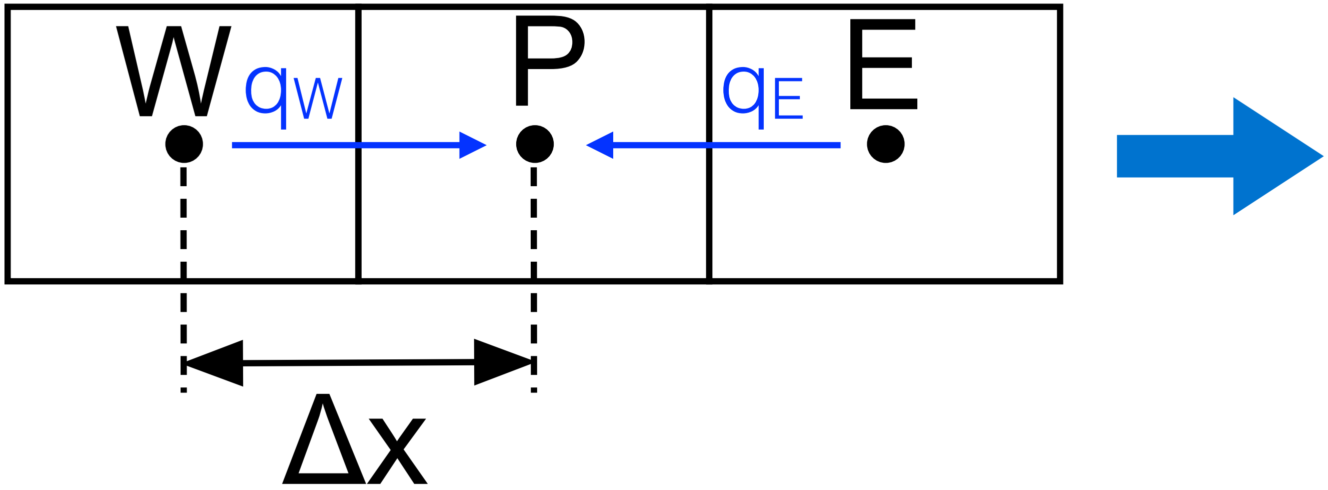




Taxas de transferência de calor:



Exemplo 1: barra isolada



$q_E + q_W = \dot{E}_{AC}$

$$\rho c A_c \Delta x \frac{T_P^n - T_P}{\Delta t} = k A_c \frac{T_W - T_P}{\Delta x} + k A_c \frac{T_E - T_P}{\Delta x}$$

$$\rho c \Delta V \frac{T_P^n - T_P}{\Delta t} = k A_c \frac{T_W - T_P}{\Delta x} + k A_c \frac{T_E - T_P}{\Delta x}$$

Exemplo 1: barra isolada

$$\rho c \Delta V \frac{T_P^n - T_P}{\Delta t} = kA_c \frac{T_W - T_P}{\Delta x} + kA_c \frac{T_E - T_P}{\Delta x}$$

Podemos definir:

$$A_t \left(T_P^n - T_P \right) = A_W \left(T_W - T_P \right) + A_E \left(T_E - T_P \right)$$

$$A_W = \frac{kA_c}{\Delta x}$$

$$A_E = \frac{kA_c}{\Delta x}$$

$$A_t = \frac{\rho c \Delta V}{\Delta t}$$

Exemplo 1: barra isolada

Assim, para os volumes internos:

$$A_t T_P^n = A_W T_W + A_E T_E + \left(A_t - A_W - A_E\right) T_P$$

$$A_W = \frac{kA_c}{\Delta x}$$

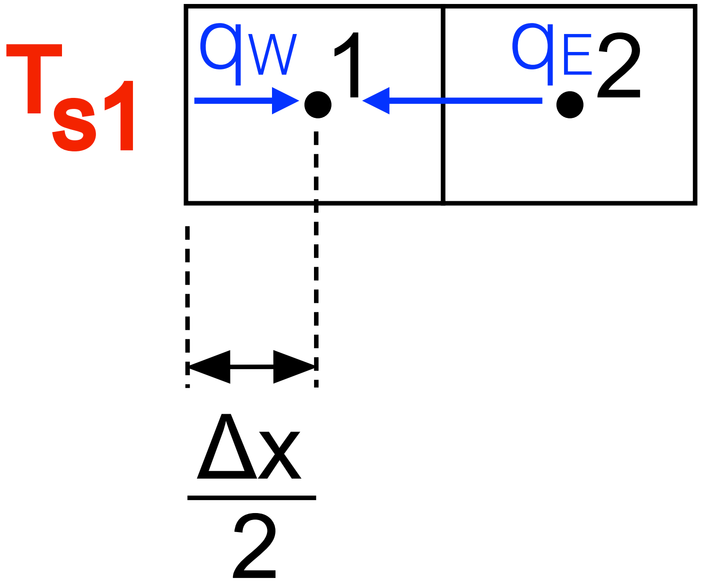
$$A_E = \frac{kA_c}{\Delta x}$$

$$A_t = \frac{\rho c \Delta V}{\Delta t}$$

$$A_P = A_t - A_W - A_E$$

Exemplo 1: barra isolada

Apliquemos um balanço de energia o volume externo 1:



$$q_E + q_W = \dot{E}_{AC}$$

$$\rho c \Delta V \frac{T_P^n - T_P}{\Delta t} = kA_c \frac{T_{s1} - T_P}{\Delta x / 2} + kA_c \frac{T_E - T_P}{\Delta x}$$

Exemplo 1: barra isolada

Assim, para o volume 1:

$$A_t\left(T_P^n - T_P\right) = A_W\left(T_{s1} - T_P\right) + A_E\left(T_E - T_P\right)$$

$$A_W = \frac{kA_c}{\Delta x / 2}$$

$$A_E = \frac{kA_c}{\Delta x}$$

$$A_t = \frac{\rho c \Delta V}{\Delta t}$$

Exemplo 1: barra isolada

Assim, para o volume 1:

$$A_t T_P^n = A_E T_E + \left(A_t - A_W - A_E\right) T_P + S$$

$$A_W = \frac{kA_c}{\Delta x / 2}$$

$$A_E = \frac{kA_c}{\Delta x}$$

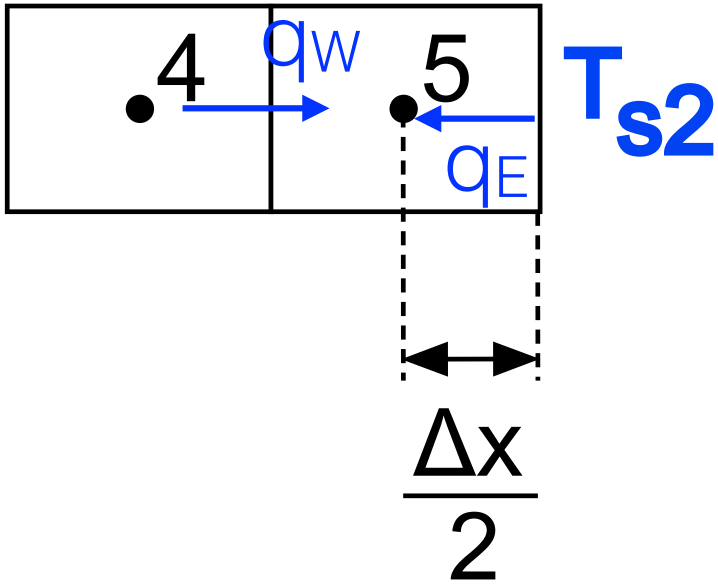
$$A_t = \frac{\rho c \Delta V}{\Delta t}$$

$$A_P = A_t - A_W - A_E$$

$$S = A_W T_{s1}$$

Exemplo 1: barra isolada

Apliquemos um balanço de energia o volume externo 5:



$$q_E + q_W = \dot{E}_{AC}$$

$$\rho c \Delta V \frac{T_P^n - T_P}{\Delta t} = k A_c \frac{T_W - T_P}{\Delta x} + k A_c \frac{T_{s2} - T_P}{\Delta x / 2}$$

Exemplo 1: barra isolada

Assim, para o volume 5:

$$A_t\left(T_P^n - T_P\right) = A_W\left(T_W - T_P\right) + A_E\left(T_{s2} - T_P\right)$$

$$A_W = \frac{kA_c}{\Delta x}$$

$$A_E = \frac{kA_c}{\Delta x / 2}$$

$$A_t = \frac{\rho c \Delta V}{\Delta t}$$

Exemplo 1: barra isolada

Assim, para o volume 5:

$$A_t T_P^n = A_W T_W + \left(A_t - A_W - A_E\right) T_P + S$$

$$A_W = \frac{kA_c}{\Delta x}$$

$$A_E = \frac{kA_c}{\Delta x / 2}$$

$$A_t = \frac{\rho c \Delta V}{\Delta t}$$

$$S = A_E T_{s2}$$

$$A_P = A_t - A_W - A_E$$

Exemplo 1: barra isolada - Estrutura de dados

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

k (W/mK)	**α (m^2/s)**		**A_W (W/°C)**	**A_W (W/°C)**	**A_W (W/°C)**	**A_W (W/°C)**	**A_W (W/°C)**		
0,5	1,316E-07		0,25000	0,12500	0,12500	0,12500	0,12500		
ρ (kg/m^3)	**Fo**		**A_E (W/°C)**	**A_E (W/°C)**	**A_E (W/°C)**	**A_E (W/°C)**	**A_E (W/°C)**		
1000	8,224E-04		0,12500	0,12500	0,12500	0,12500	0,25000		
c (J/kg°C)	**T_0 (°C)**		**A_t (W/°C)**	**A_t (W/°C)**	**A_t (W/°C)**	**A_t (W/°C)**	**A_t (W/°C)**		
3800	25		152,00	152,00	152,00	152,00	152,00		
T_1 (°C)	**T_2 (°C)**		**A_P (W/°C)**	**A_P (W/°C)**	**A_P (W/°C)**	**A_P (W/°C)**	**A_P (W/°C)**		
40	10		151,6	151,8	151,8	151,8	151,6		
L (m)	**A_c (m^2)**		**S (W)**	**S (W)**	**S (W)**	**S (W)**	**S (W)**		
0,2	0,01		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0		
n		**x_{s1} (m)**	**x_1 (m)**	**x_2 (m)**	**x_3 (m)**	**x_4 (m)**	**x_5 (m)**	**x_{s2} (m)**	
5		0,00	0,02	0,06	0,10	0,14	0,18	0,20	
Δx (m)	**ΔV (m^3)**	**T_{s1} (°C)**	**T_1 (°C)**	**T_2 (°C)**	**T_3 (°C)**	**T_4 (°C)**	**T_5 (°C)**	**T_{s2} (°C)**	
0,04	0,000400	40	37	31	25	19	13	10	**EXATA**
Δt (s)			35,848616	29,288379	25,000000	20,711621	14,151384		**NUMÉRICA**
10		**T_{s1} (°C)**	**T_1 (°C)**	**T_2 (°C)**	**T_3 (°C)**	**T_4 (°C)**	**T_5 (°C)**	**T_{s2} (°C)**	**t (s)**
		40,00	25,000000	25,000000	25,000000	25,000000	25,000000	10,00	0,00
		40,00	25,024671	25,000000	25,000000	25,000000	24,975329	10,00	10,00

Exemplo 1: barra isolada

Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo

Vamos calcular usando os seguintes valores:

k (W/mK)	α (m²/s)
0,5	1,316E-07
ρ (kg/m³)	**Fo**
1000	8,224E-02
c (J/kg°C)	**T_0 (°C)**
3800	25
T_1 (°C)	**T_2 (°C)**
40	10
L (m)	**A_c (m²)**
0,2	0,01
n	
5	

Difusividade térmica

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

Dica, manter Fo < 0,1

$$Fo = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$$

Exemplo 1: barra isolada

Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo

Resultados:

	x_1 (m)	x_2 (m)	x_3 (m)	x_4 (m)	x_5 (m)
	0,02	0,06	0,10	0,14	0,18
	T_1 (^oC)	T_2 (^oC)	T_3 (^oC)	T_4 (^oC)	T_5 (^oC)
Exata	37	31	25	19	13
Numérica	37,000000	31,000000	25,000000	19,000000	13,000000

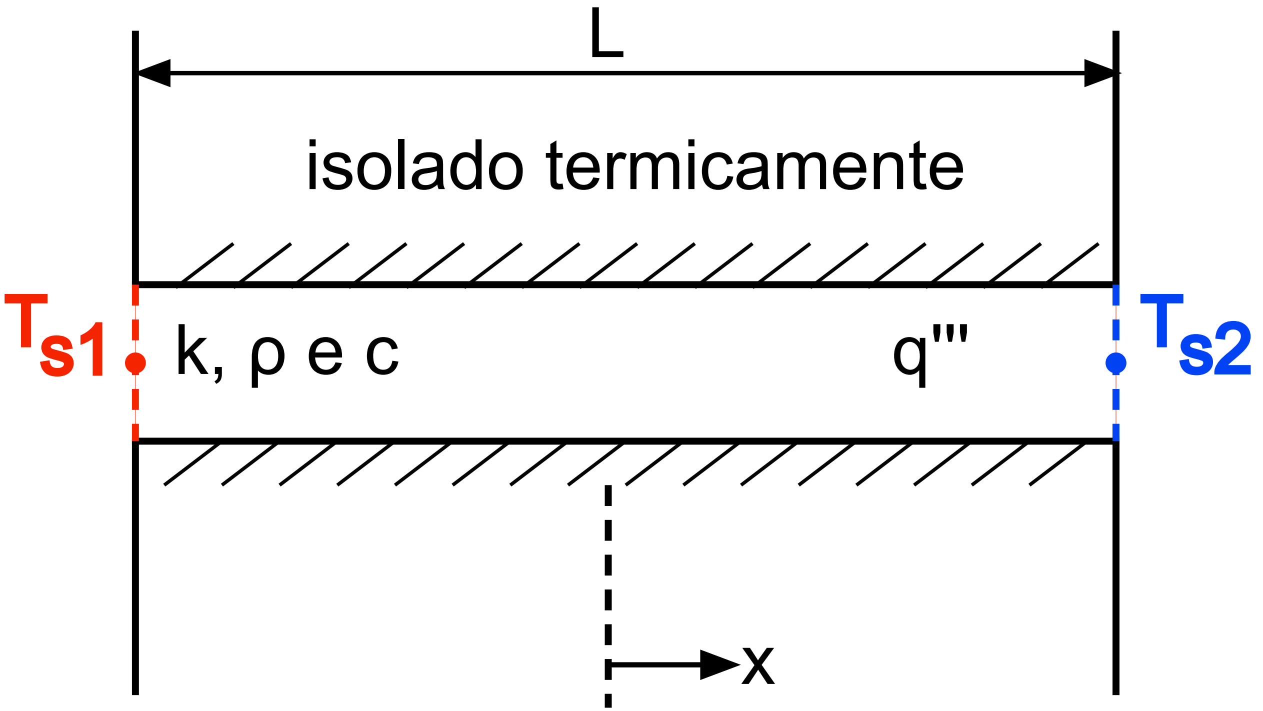
Por que a solução numérica é igual à exata?

Sugestão de testes:

- Inverta os valores de T_{s1} e T_{s2}, a nova solução dever simétrica à anterior com relação ao volume 3;
- Simule uma condição de temperatura uniforme, o perfil de temperatura deve ser simétrico com relação ao volume 3

Exemplo 2: barra com geração

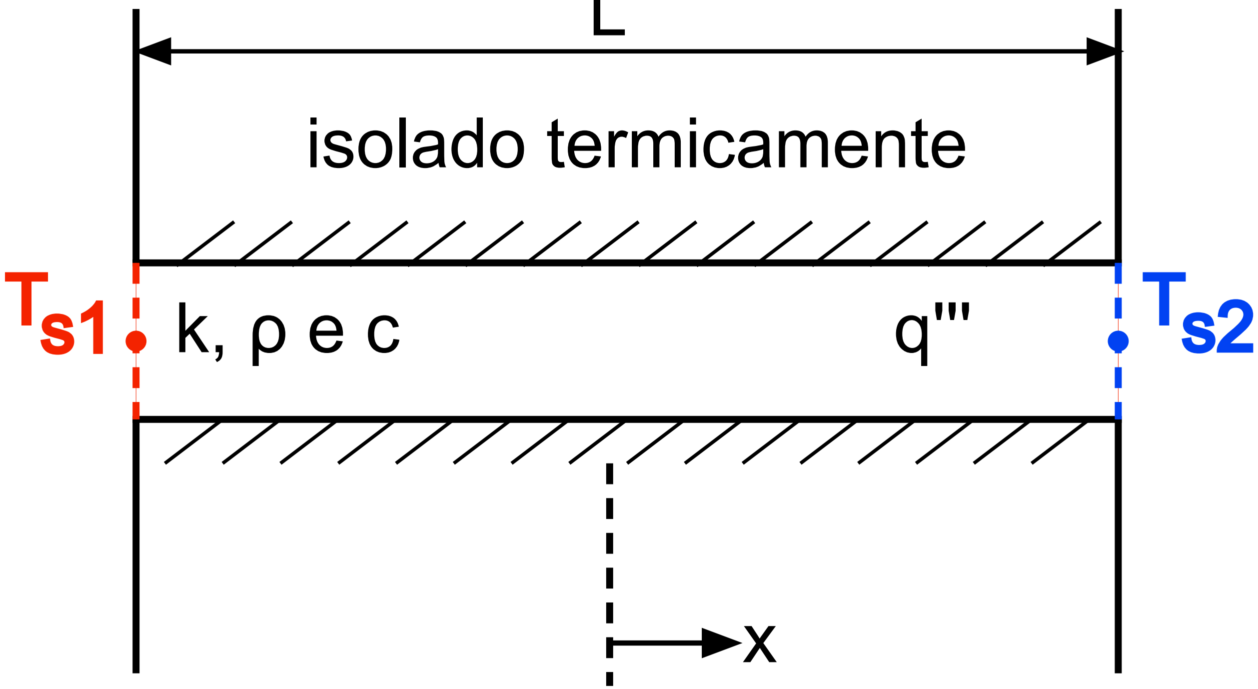
Considere a barra de seção retangular (A_c) cujas extremidades são mantidas a T_1 e T_2 e energia térmica é gerada a uma taxa volumétrica q"' uniforme



O perfil de temperatura em regime permanente assume a forma:

$$T(x) = \frac{q''' L^2}{8k}\left(1 - 4\frac{x^2}{L^2}\right) + \left(T_{s2} - T_{s1}\right)\frac{x}{L} + \frac{T_{s2} + T_{s1}}{2}$$

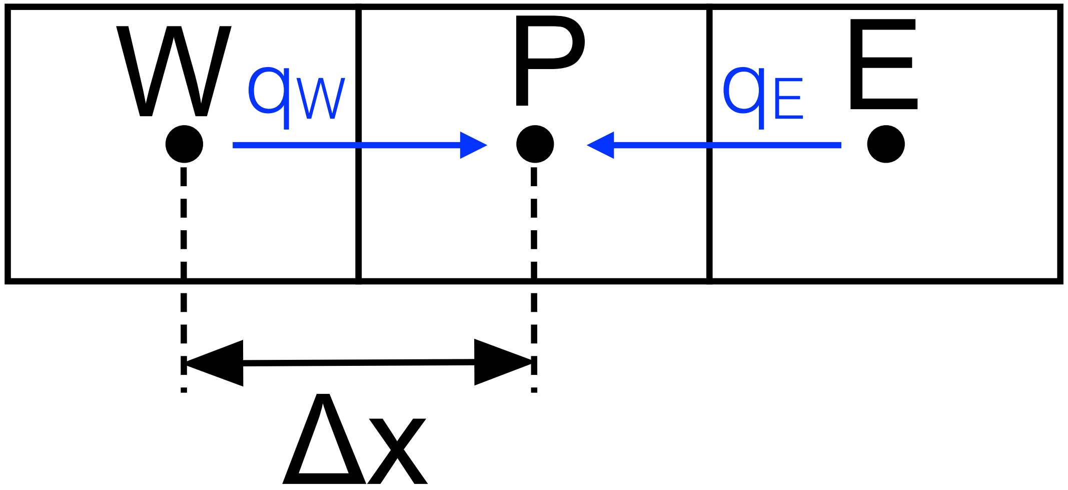
Exemplo 2: barra com geração



O perfil de temperatura em regime permanente com simetria ($h = h_1 = h_2$ e $T_s = T_{s1} = T_{s2}$) assume a forma:

$$T(x) = \frac{q''' L^2}{8k}\left(1 - 4\frac{x^2}{L^2}\right) + T_s$$

Exemplo 2: barra com geração



$q_E + q_W + q'''.\Delta V = \dot{E}_{AC}$

$$\rho c A_c \Delta x \frac{T_P^n - T_P}{\Delta t} = k A_c \frac{T_W - T_P}{\Delta x} + k A_c \frac{T_E - T_P}{\Delta x} + q''' \Delta V$$

$$\rho c \Delta V \frac{T_P^n - T_P}{\Delta t} = k A_c \frac{T_W - T_P}{\Delta x} + k A_c \frac{T_E - T_P}{\Delta x} + q''' \Delta V$$

Exemplo 2: barra com geração

Assim, para os volumes internos:

$$A_t T_P^n = A_W T_W + A_E T_E + \left(A_t - A_W - A_E\right) T_P + S$$

$$A_W = \frac{kA_c}{\Delta x}$$

$$A_E = \frac{kA_c}{\Delta x}$$

$$A_t = \frac{\rho c \Delta V}{\Delta t}$$

$$A_P = A_t - A_W - A_E$$

$$S = q''' \Delta V$$

Exemplo 2: barra com geração

Analogamente, para o volume 1:

$$A_t T_P^n = A_E T_E + \left(A_t - A_W - A_E \right) T_P + S$$

$$A_W = \frac{kA_c}{\Delta x / 2}$$

$$A_E = \frac{kA_c}{\Delta x}$$

$$A_t = \frac{\rho c \Delta V}{\Delta t}$$

$$A_P = A_t - A_W - A_E$$

$$S = A_W T_{s1} + q''' \Delta V$$

Exemplo 2: barra com geração

Analogamente, para o volume 5:

$$A_t T_P^n = A_W T_W + \left(A_t - A_W - A_E\right) T_P + S$$

$$A_W = \frac{kA_c}{\Delta x}$$

$$A_E = \frac{kA_c}{\Delta x / 2}$$

$$A_t = \frac{\rho c \Delta V}{\Delta t}$$

$$A_P = A_t - A_W - A_E$$

$$S = A_E T_{s2} + q''' \Delta V$$

Exemplo 2: barra com geração

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Vamos calcular usando os seguintes valores:

k (W/mK)	**α (m^2/s)**
0,5	1,316E-07
ρ (kg/m^3)	**Fo**
1000	8,224E-04
c (J/kg^{o}C)	**T_0 (^{o}C)**
3800	34
T_1 (^{o}C)	**T_2 (^{o}C)**
34	34
L (m)	**A_c (m^2)**
0,2	0,01
n	
5	
Δx (m)	**ΔV (m^3)**
0,04	0,000400
Δt (s)	
10	

Exemplo 2: barra com geração

Resultados:

	T_1 (°C)	T_2 (°C)	T_3 (°C)	T_4 (°C)	T_5 (°C)
Exata	35,296	37,024	37,6	37,024	35,296
Numérica	35,440000	37,168000	37,743999	37,168000	35,440000
	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)
	0,4080	0,3889	0,3830	0,3889	0,4080

Por que a solução numérica não é igual à exata?

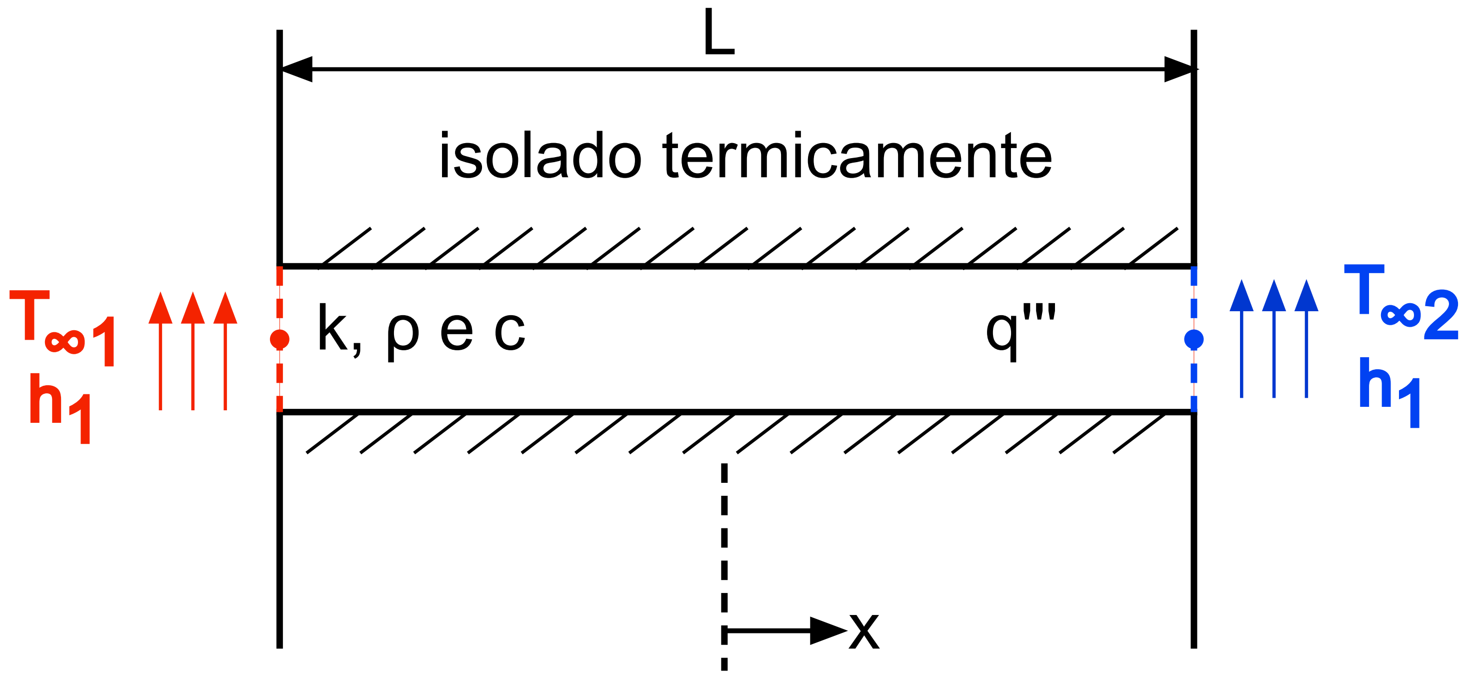
Como melhorar nosso resultado?

T_1 (°C)	T_2 (°C)	T_3 (°C)	T_4 (°C)	T_5 (°C)	T_6 (°C)	T_7 (°C)	T_8 (°C)	T_9 (°C)	T_{10} (°C)
34,684	35,836	36,7	37,276	37,564	37,564	37,276	36,7	35,836	34,684
34,720	35,872	36,736	37,312	37,600	37,600	37,312	36,736	35,872	34,720
(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)
0,1038	0,1005	0,0981	0,0966	0,0958	0,0958	0,0966	0,0981	0,1005	0,1038

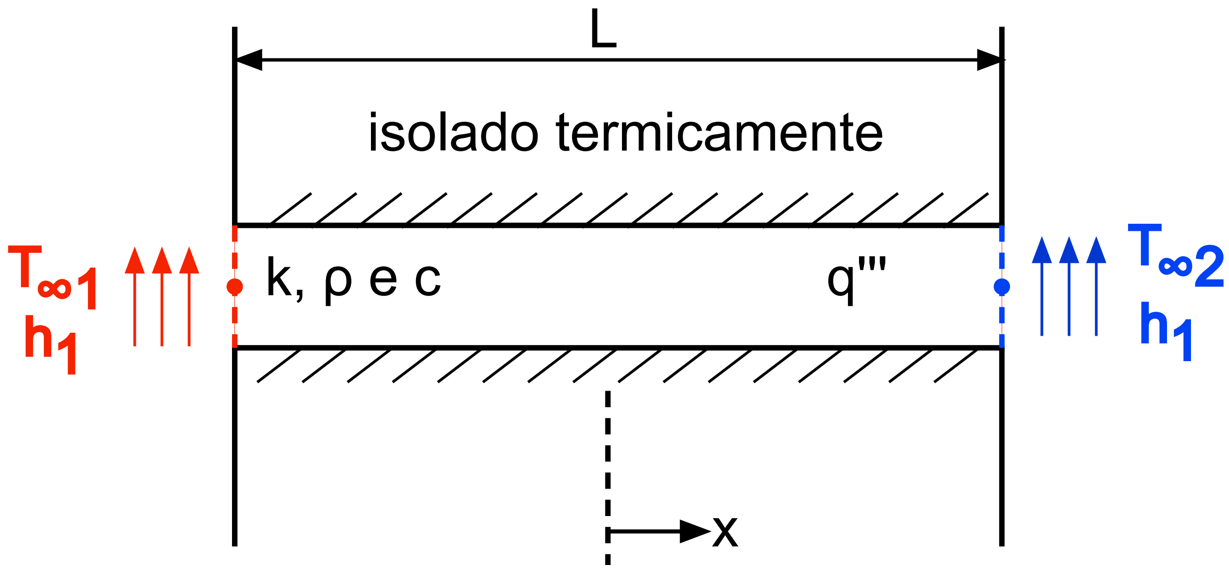
$n = 10$

Exemplo 3: barra com geração e convecção

Considere a barra de seção retangular (A_c) cujas extremidades são estão expostas a fluidos a $T_{\infty 1}$ e $T_{\infty 2}$ e energia térmica é gerada a uma taxa volumétrica q''' uniforme



Exemplo 3: barra com geração e conveccão



O perfil de temperatura em regime permanente com simetria ($h = h_1 = h_2$ e $T_\infty = T_{\infty 1} = T_{\infty 2}$) assume a forma:

$$T(x) = \frac{q''' L^2}{8k}\left(1 - 4\frac{x^2}{L^2}\right) + T_s$$

$$\frac{q''' A_c L}{2} = h A_c \left(T_s - T_\infty\right) \Rightarrow T_s = T_\infty + \frac{q''' L}{2h}$$

Exemplo 3: barra com geração e conveccão

As temperaturas superficiais instantâneas podem ser determinadas a partir das temperaturas dos fluidos através da aplicação de um balanço de energia:

$$A_{W1}\left(T_1 - T_{s1}\right) = h_1 A_c \left(T_{s1} - T_{\infty 1}\right) \Rightarrow T_{s1} = \frac{h_1 A_c T_{\infty 1} + A_{W1} T_1}{h_1 A_c + A_{W1}}$$

$$A_{En}\left(T_n - T_{s2}\right) = h_2 A_c \left(T_{s2} - T_{\infty 2}\right) \Rightarrow T_{s2} = \frac{h_2 A_c T_{\infty 2} + A_{En} T_n}{h_2 A_c + A_{En}}$$

Todas as equações e coeficientes permanecem iguais aos do exemplo 2. Assim, podemos aproveitar integralmente o código.

Vamos calcular usando os seguintes valores:

k (W/mK)	**α (m^2/s)**	**q'''(W/m^3)**
0,5	1,316E-07	1200
ρ (kg/m^3)	**Fo**	**h_1 (W/m^2K)**
1000	6,579E-02	10
c (J/kg^{o}C)	**T_0 (^{o}C)**	**h_2 (W/m^2K)**
3800	34	10
$T_{\infty 1}$ (^{o}C)	**$T_{\infty 2}$ (^{o}C)**	
25	25	
L (m)	**A_c (m^2)**	
0,2	0,01	
n		
10		
Δx (m)	**ΔV (m^3)**	
0,02	0,000200	
Δt (s)		
10		

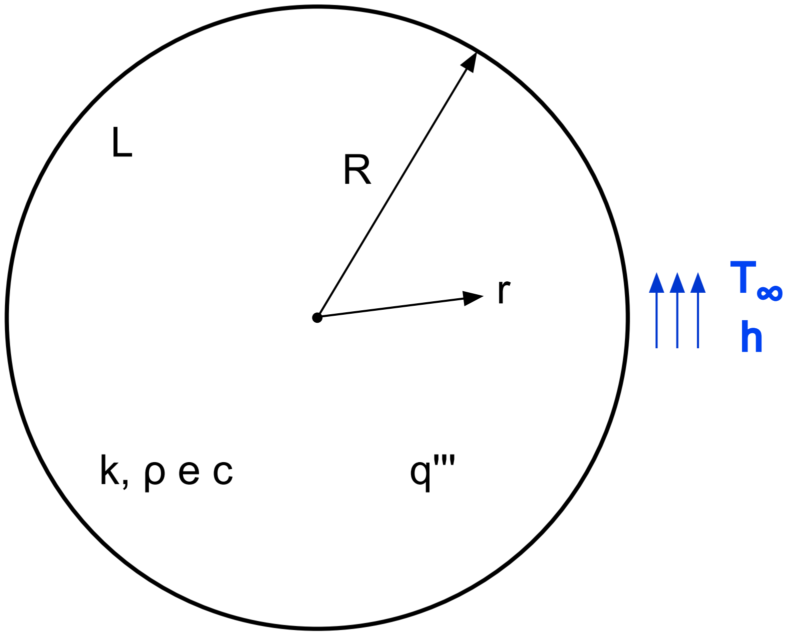
Resultados:

T_{s1} (°C)	T_1 (°C)	T_2 (°C)	T_3 (°C)	T_4 (°C)	T_5 (°C)	T_6 (°C)	T_7 (°C)	T_8 (°C)	T_9 (°C)	T_{10} (°C)	T_{s2} (°C)
31	32,14	34,06	35,5	36,46	36,94	36,94	36,46	35,5	34,06	32,14	31
31,000	32,200	34,119	35,559	36,519	36,999	36,999	36,519	35,559	34,119	32,200	31,000
(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)
-0,0013	0,1852	0,1744	0,1670	0,1624	0,1602	0,1602	0,1624	0,1670	0,1744	0,1852	-0,0013

$n = 10$

Exemplo 4: Cilindro com geração e convecção

Considere o cilindro de raio R e comprimento L, com geração interna e convecção na superfície:

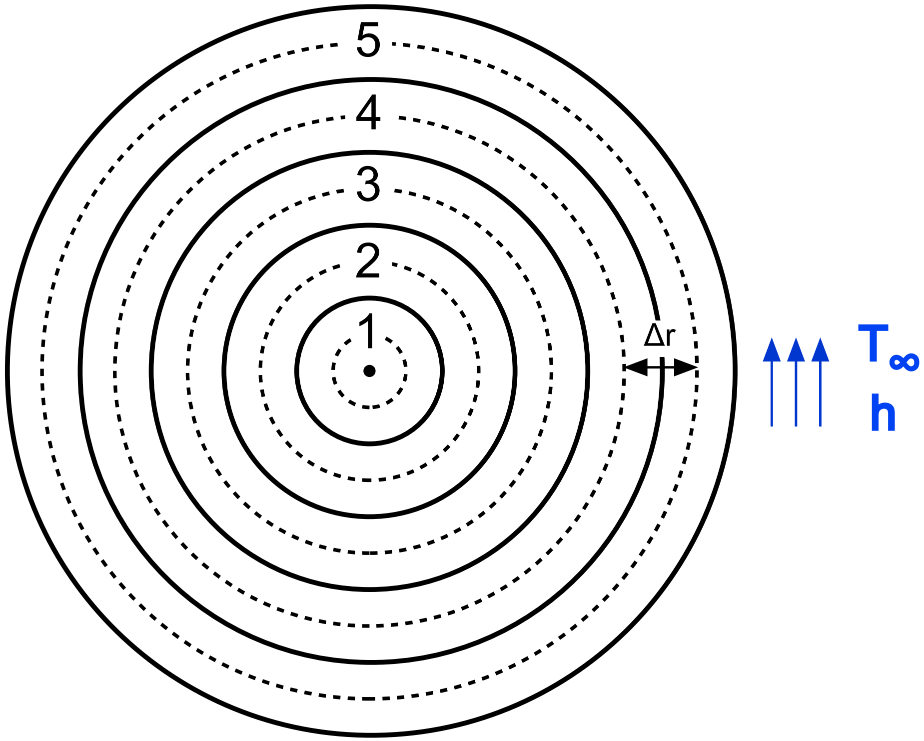


O perfil de temperatura unidimensional em regime permanente assume a forma:

$$T(x) = \frac{q'''R^2}{4k}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + T_s \qquad T_s = T_\infty + \frac{q'''R}{2h}$$

Exemplo 4: Cilindro com geração e convecção

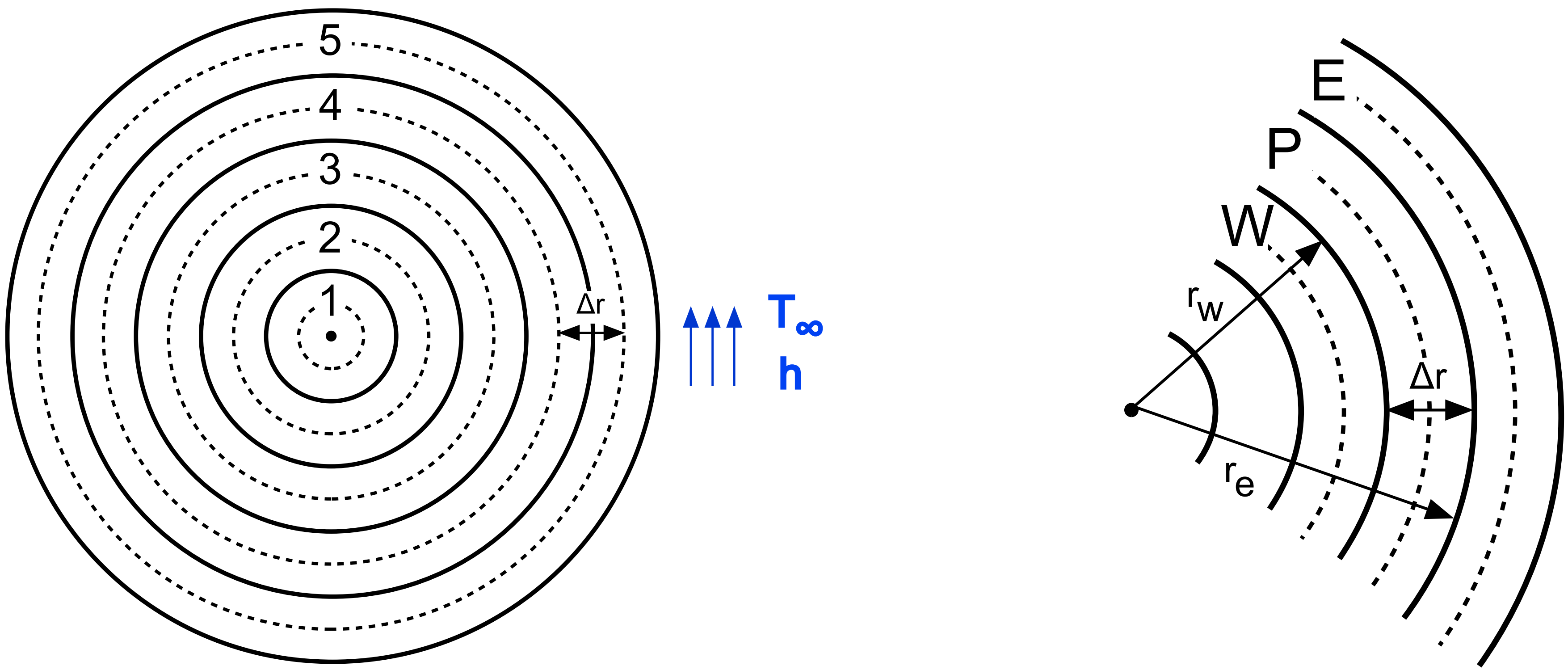
Vamos dividir o domínio em 5 volumes com largura uniforme:



A discretização não muda, muda apenas a forma de cálculo dos coeficientes.

Exemplo 4: Cilindro com geração e convecção

Vamos dividir o domínio em 5 volumes com largura uniforme:



A discretização não muda, muda apenas a forma de cálculo dos coeficientes.

Exemplo 4: Cilindro com geração e convecção

Assim, para os volumes internos (2, 3 e 4):

$$A_t T_P^n = A_W T_W + A_E T_E + \left(A_t - A_W - A_E\right) T_P + S$$

$$A_W = \frac{kA_w}{\Delta r} = \frac{k\left(2\pi r_w L\right)}{\Delta r} = \frac{k\left[2\pi\left(r_p - \Delta r/2\right)L\right]}{\Delta r}$$

$$A_E = \frac{kA_e}{\Delta r} = \frac{k\left(2\pi r_e L\right)}{\Delta r} = \frac{k\left[2\pi\left(r_p + \Delta r/2\right)L\right]}{\Delta r}$$

$$A_t = \frac{\rho c \Delta V}{\Delta t} = \frac{\rho c\left(2\pi r_p \Delta r L\right)}{\Delta t}$$

$$A_P = A_t - A_W - A_E$$

$$S = q''' \Delta V$$

$$\Delta V = \left(\pi r_e^2 - \pi r_w^2\right)L = \left[\pi\left(r + \Delta r/2\right)^2 - \pi\left(r - \Delta r/2\right)^2\right]L$$

$$\Delta V = \pi L\left[\cancel{r^2} + r\Delta r + \cancel{\frac{\Delta r^2}{4}} - \cancel{r^2} + r\Delta r - \cancel{\frac{\Delta r^2}{4}}\right] = 2\pi r \Delta r L$$

Para o volume interno 1:

$$A_t\left(T_P^n - T_P\right) = A_W\left(T_{s1} - T_P\right) + A_E\left(T_E - T_P\right) + S$$

$$A_W = 0$$

$$A_E = \frac{kA_e}{\Delta r} = \frac{k\left[2\pi\left(r_p + \Delta r/2\right)L\right]}{\Delta r}$$

$$A_t = \frac{\rho c \Delta V}{\Delta t} = \frac{\rho c\left(2\pi r_p \Delta r L\right)}{\Delta t}$$

$$S = q''' \Delta V$$

Exemplo 4: Cilindro com geração e convecção

Assim, para o volume externo 5:

$$A_t\left(T_P^n - T_P\right) = A_W\left(T_W - T_P\right) + A_E\left(T_{s2} - T_P\right) + S$$

$$A_W = \frac{kA_w}{\Delta r} = \frac{k\left[2\pi\left(r_p - \Delta r/2\right)L\right]}{\Delta r}$$

$$A_E = \frac{kA_e}{\Delta r/2} = \frac{k\left[2\pi\left(r_p + \Delta r/2\right)L\right]}{\Delta r/2}$$

$$A_t = \frac{\rho c \Delta V}{\Delta t} = \frac{\rho c\left(2\pi r_p \Delta r L\right)}{\Delta t}$$

$$S = A_E T_s + q''' \Delta V$$

A temperatura superficial instantâneas pode ser calculada de forma análoga ao Exemplo 3:

$$A_{En}\left(T_n - T_s\right) = hA_c\left(T_s - T_\infty\right) \Rightarrow T_s = \frac{hA_c T_\infty + A_{En} T_n}{hA_c + A_{En}}$$

A única alteração a ser feita é inserir uma nova expressão para a área da seção transversal:

$$A_c = 2\pi RL$$

Exemplo 4: Cilindro com geração e convecção

k (W/mK)	**α (m²/s)**	**q'''(W/m³)**
0,5	1,316E-07	641
ρ (kg/m³)	**Fo**	**h (W/m²K)**
1000	1,170E-01	10
c (J/kg°C)	**T_0 (°C)**	
3800	34	
	T_∞ (°C)	
	25	
L (m)	**R (m)**	
1,76	0,15	
n		
10		
Δr (m)		
0,015		
Δt (s)		
200		

Exemplo 4: Cilindro com geração e convecção

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

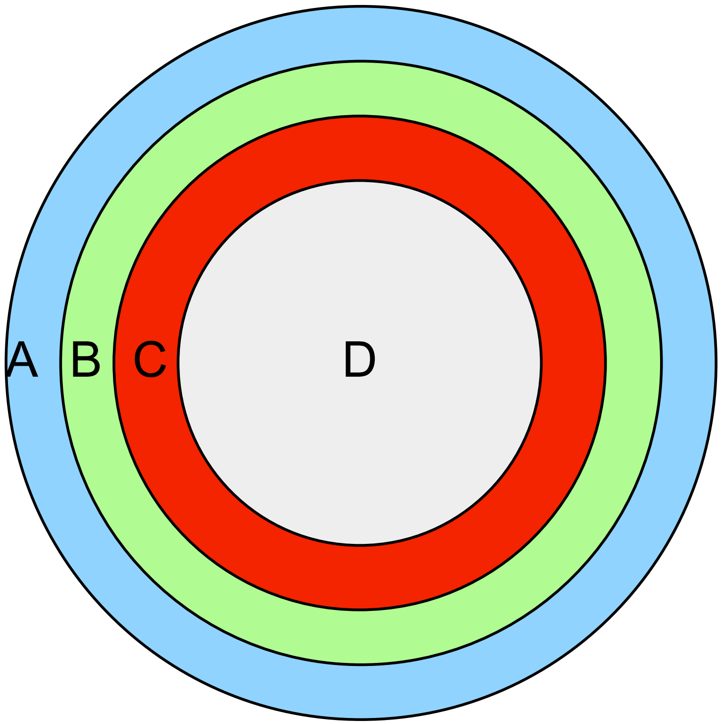
Resultados:

T_1 (°C)	T_2 (°C)	T_3 (°C)	T_4 (°C)	T_5 (°C)	T_6 (°C)	T_7 (°C)	T_8 (°C)	T_9 (°C)	T_{10} (°C)	T_s (°C)
37,0007	36,8565	36,5680	36,1354	35,5585	34,8373	33,9720	32,9624	31,8086	30,5106	29,8075
37,0188	36,8745	36,5861	36,1534	35,5765	34,8554	33,9900	32,9805	31,8267	30,5286	29,8075
(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)
0,0487	0,0489	0,0493	0,0499	0,0507	0,0517	0,0531	0,0547	0,0567	0,0591	0,0000

$n = 10$

Exemplo 5: Cilindro multicamada com geração

Dados:



4 camadas

Material	k / (W/mK)	r_e / mm	q''' / (W/m³)
A	100	0,2	1000
B	0,5	0,4	0
C	50	0,6	0
D	0,2	0,8	0

ρ = 1000 kg/m³
c = 3800 J/kgK

h = 10 W/(mK)
T_∞ = 25 °C

Solução analítica:

Material	C_1	C_2	T_{int} (ºC)	T_{ext} (ºC)
A	0,00000	84,25628	84,25628	84,15628051
B	46,56170	179,09445	84,15628051	56,43039329
C	2,06630	59,12373	56,43039329	56,26820725
D	1116,62082	1076,66674	56,26820725	27,5

$$T(r) = -\frac{\dot{q}}{4k} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

Exemplo 6: Cilindro multicamada com geração - transitório

Dados:

k (W/mK)	α (m^2/s)	q'''(W/m^3)
1,0	1,250E-05	2000
ρ (kg/m^3)	Fo	h (W/m^2K)
40	2,500E-01	10000000
c (J/kg^{o}C)	T_0 (^{o}C)	
2000	0	
	T_∞ (^{o}C)	
	0	
L (m)	R (m)	
1,76	1,00	
n		
10		
Δr (m)		
0,100		
Δt (s)		
200		

*** Trabalhe com 4 camadas de mesmo tecido.**

Solução analítica:

$$T = \frac{q'''\left(R^2 - r^2\right)}{4k} - \frac{2q'''}{Rk}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\alpha_n^2 t}\,\frac{J_0\left(r\alpha_n\right)}{\alpha_n^3 J_1\left(R\alpha_n\right)}$$

$$J_0\left(\alpha_n R\right) = 0$$

Exemplo 6: Cilindro multicamada com geração - transitório