Pesquisa Operacional I

Prof. Fabrício Maciel Gomes
Departamento de Engenharia Química
Escola de Engenharia de Lorena – EEL

Resolução Gráfica

Aplicável para modelos com 02 variáveis de decisão

Útil para a ilustração de alguns conceitos básicos utilizados na resolução de modelos de maior porte.

Etapas a serem seguidas na resolução gráfica

1º Passo: identificar a *região viável* do modelo, isto é, quais são os pares (X_1, X_2) que satisfazem a todas as restrições.

2º Passo: achar a melhor solução viável, denominada *Solução Ótima* e denotada por (X_1^*, X_2^*), que leva ao *valor ótimo* da função-objetivo Z^*.

Resolução Gráfica

Problema de *mix* de Produção

Fabricação de dois modelos de brinquedos: B_1 e B_2.

- Recursos disponíveis:

    1000 kg de plástico especial.

    40 horas para produção semanal.

- Requisitos do Departamento de Marketing:

    Produção total não pode exceder 700 dúzias.

    A quantidade de dúzias de B_1 não pode exceder a quantidade de dúzias de B_2, ou seja não pode ser mais que 350 dúzias.

- Dados técnicos:

    B_1 requer 2 kg de plástico e 3 minutos por dúzia.

    B_2 requer 1 kg de plástico e 4 minutos por dúzia.

Resolução Gráfica

A Gerência está procurando um programa de produção que aumente o lucro da Companhia.

Resolução Gráfica

Conceitos importantes:

Os pontos (X_1, X_2) que satisfazem todas as restrições do modelo formam a **Região Viável.**

Esses pontos são chamados de **Soluções Viáveis.**

Usando a resolução gráfica pode-se representar todos as restrições (semi-planos), a função objetivo (reta) e os três tipos de pontos viáveis.

Resolução Gráfica

Conceitos importantes:

Os pontos (X_1, X_2) que satisfazem todas as restrições do modelo formam a **Região Viável.**

Esses pontos são chamados de **Soluções Viáveis.**

Usando a resolução gráfica pode-se representar todos as restrições (semi-planos), a função objetivo (reta) e os três tipos de pontos viáveis.

Resolução Gráfica

1º Passo:

Traçar eixos cartesianos, associando a cada um deles uma variável de decisão.

No exemplo de fabricação de brinquedos: X_1 para o eixo das abscissas e X_2 para o eixo das ordenadas.

As restrições de não-negatividade, $X_1 \geq 0$ e $X_2 \geq 0$, implicam que os pares (X_1, X_2) viáveis estão no 1º quadrante dos eixos considerados.

Resolução Gráfica

Representando as condições de não negatividade

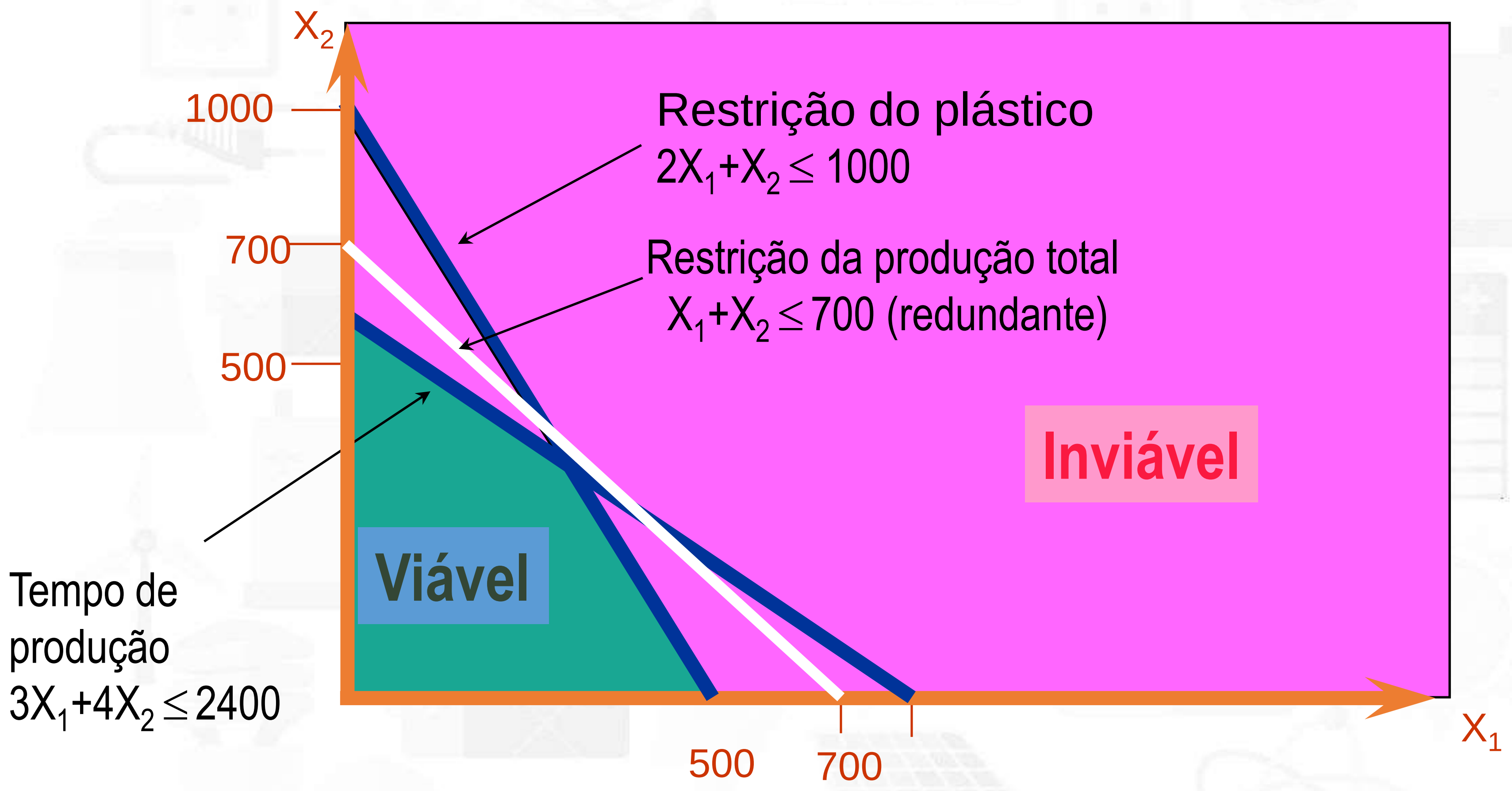
Resolução Gráfica

Observar que no exemplo dos brinquedos, as restrições correspondem a semi-planos associados, respectivamente, às retas suportes dadas por:

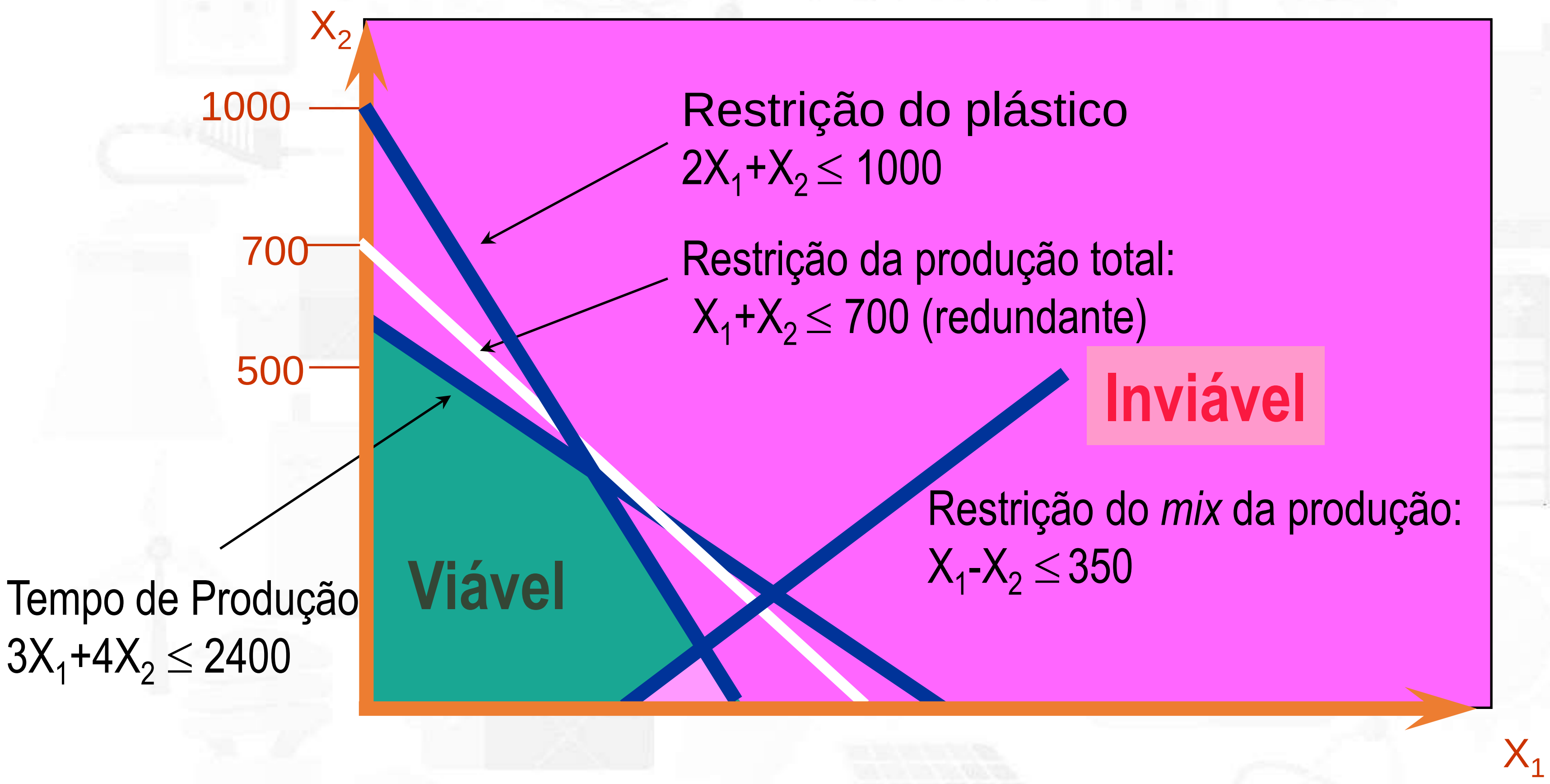
$$2X_1 + 1X_2 = 1000$$
$$3X_1 + 4X_2 = 2400$$
$$X_1 + X_2 = 700$$
$$X_1 - X_2 = 350$$
$$X_j \geq 0, \ j = 1,2$$

Notar que cada reta suporte define dois semi-planos no espaço (X_1, X_2).
Para identificar qual destes semi-planos é de interesse no caso, ou seja, contém os pontos que satisfazem a desigualdade da restrição, basta testar algum ponto à esquerda ou à direita (acima ou abaixo) da reta suporte da desigualdade.
Um ponto que torna isto fácil é a origem (0, 0), mas poderia ser qualquer outro.

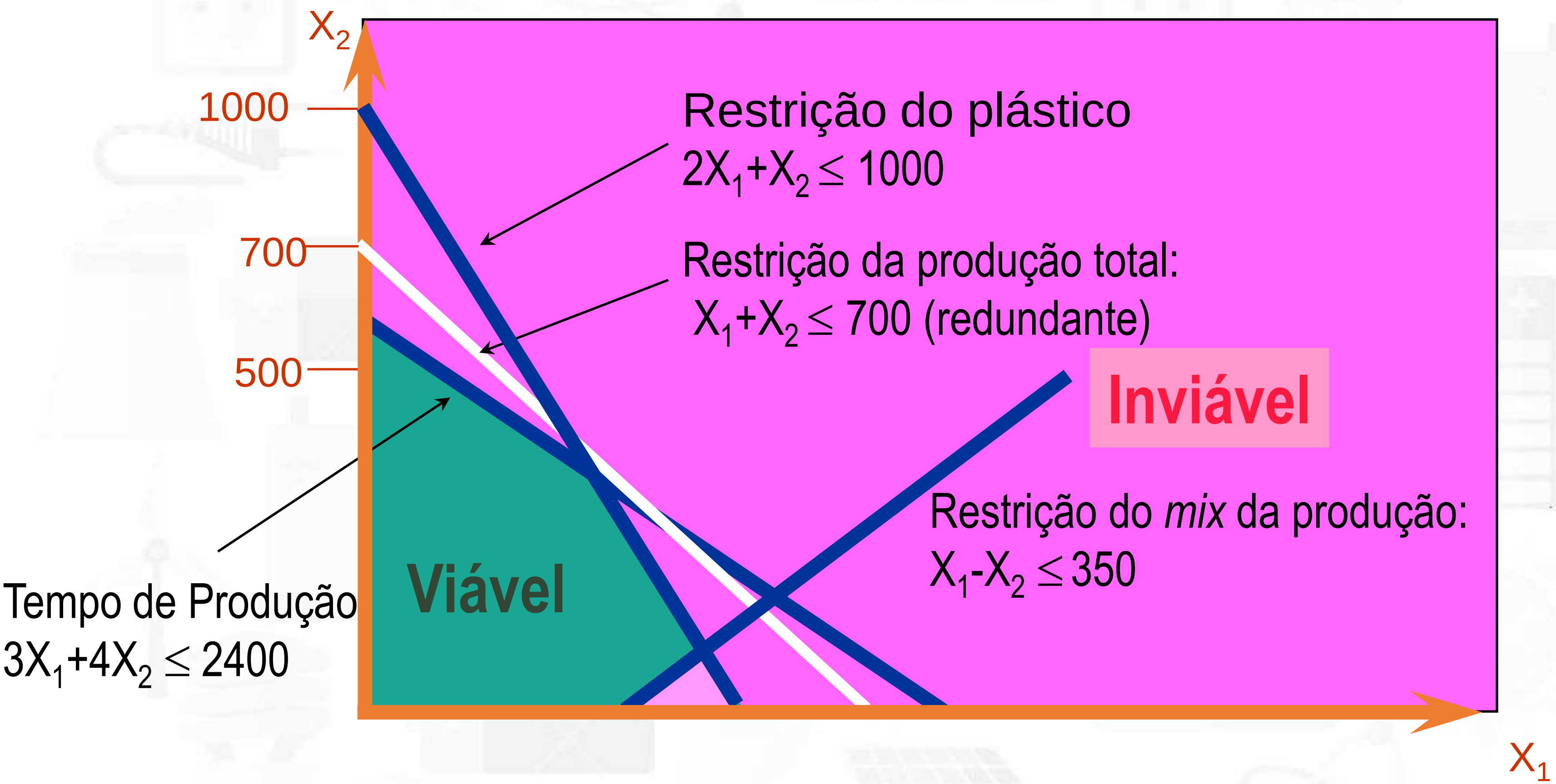
Resolução Gráfica



Resolução Gráfica



Resolução Gráfica



Resolução Gráfica

2º Passo:

Observar que a função-objetivo, ao se fixar um valor para Z, representa uma reta. Alterações neste valor de Z gera uma família de retas paralelas.

No exemplo dos brinquedos: considere a reta obtida fazendo Z= 2000, isto é , a reta dada por $8X_1 + 5X_2 = 2000$. Percebe-se que ao se traçar retas paralelas no sentido de ficar mais afastado da origem (0, 0), o valor de Z aumenta.

De fato pode-se verificar que a reta paralela, que contém algum ponto da região viável, no caso o ponto ótimo X* = (320, 360), e está mais afastada da origem, corresponde a um valor ótimo da função objetivo Z* = 4360.

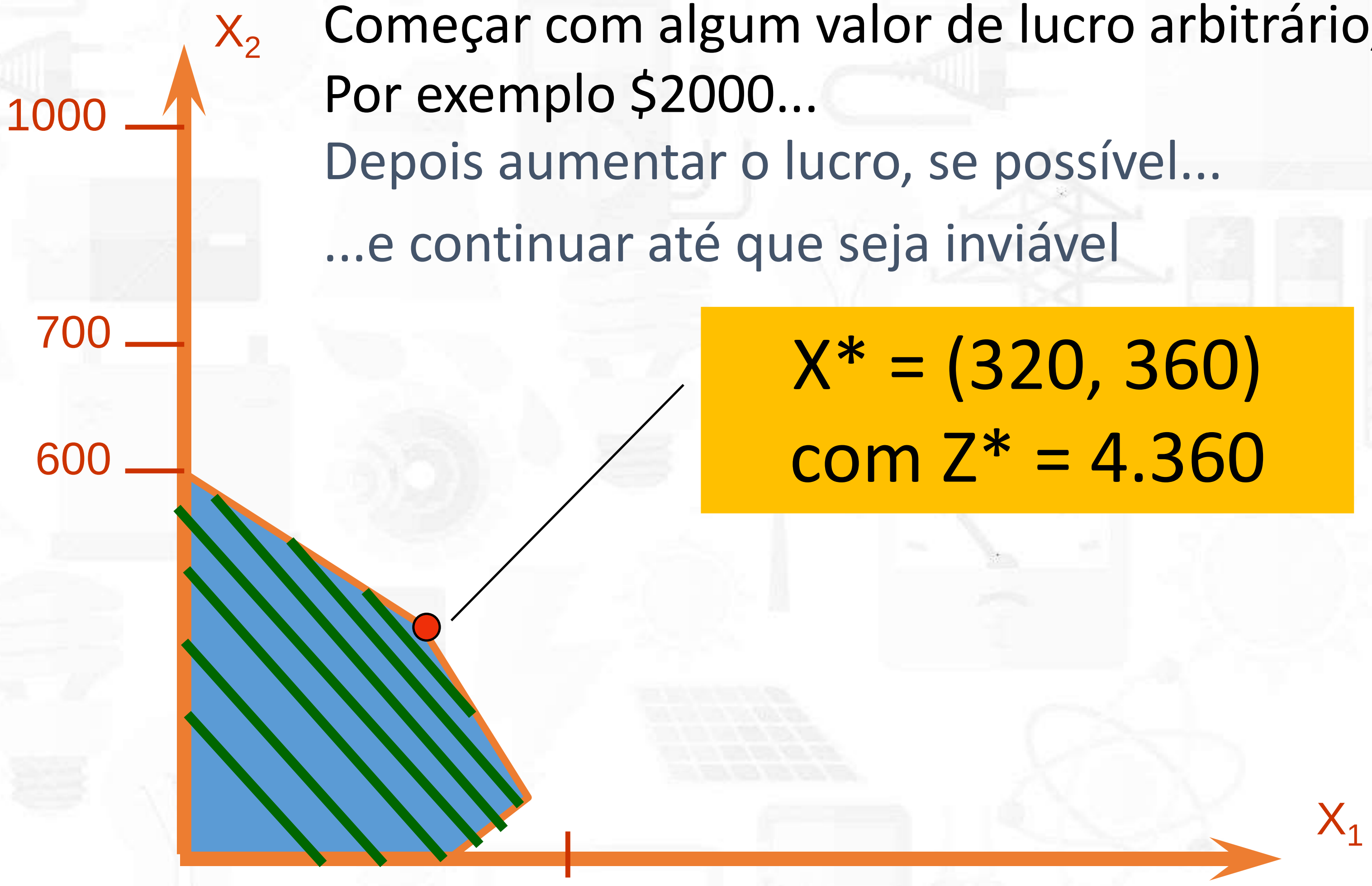
Resolução Gráfica

A busca por uma Solução Ótima:

Começar com algum valor de lucro arbitrário,
Por exemplo $2000...

Depois aumentar o lucro, se possível...

...e continuar até que seja inviável

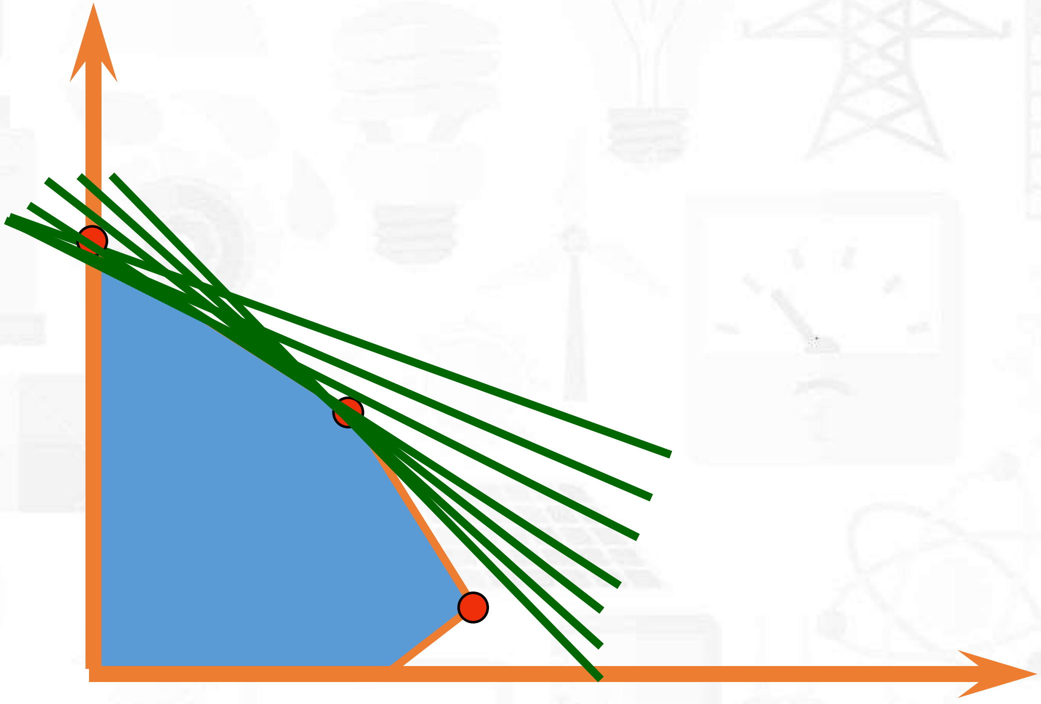


$X^* = (320, 360)$
com $Z^* = 4.360$

Resolução Gráfica

Pontos extremos e Soluções Ótimas

Se o problema de Programação Linear tem uma Solução Ótima, um ponto extremo é Solução Ótima.

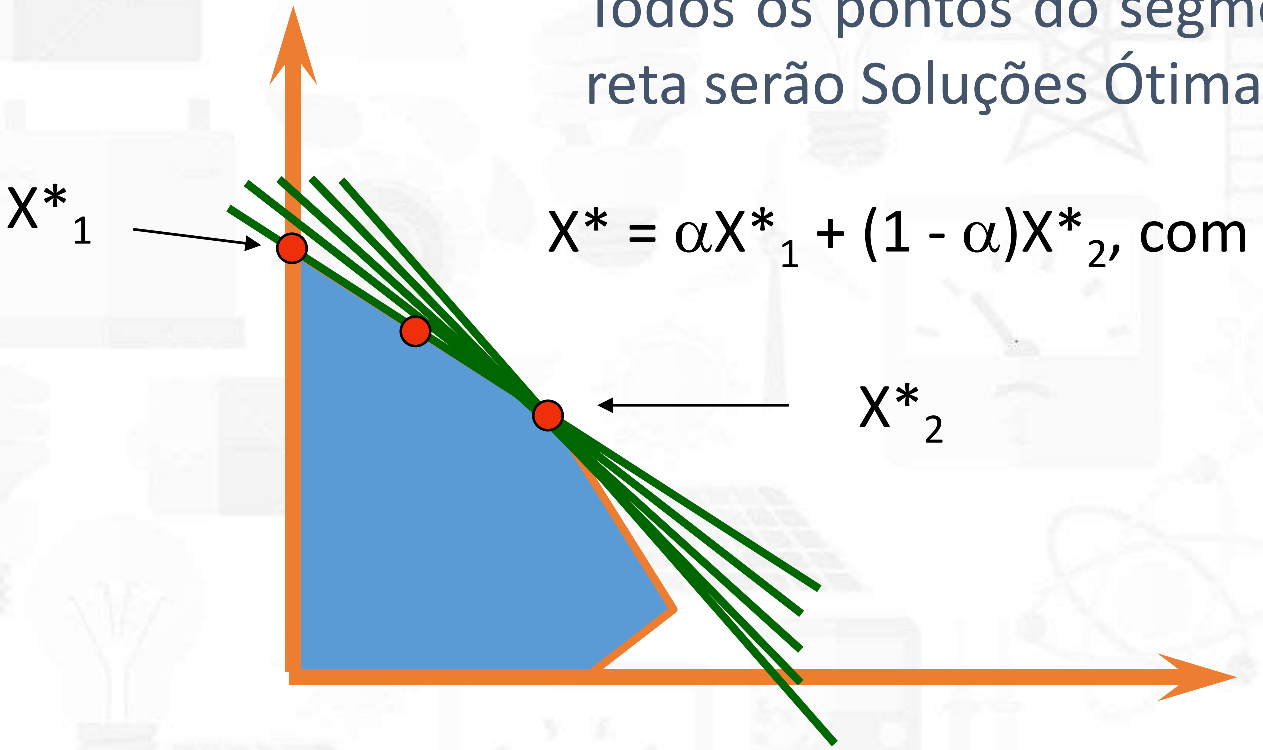


Resolução Gráfica

Soluções Ótimas Múltiplas

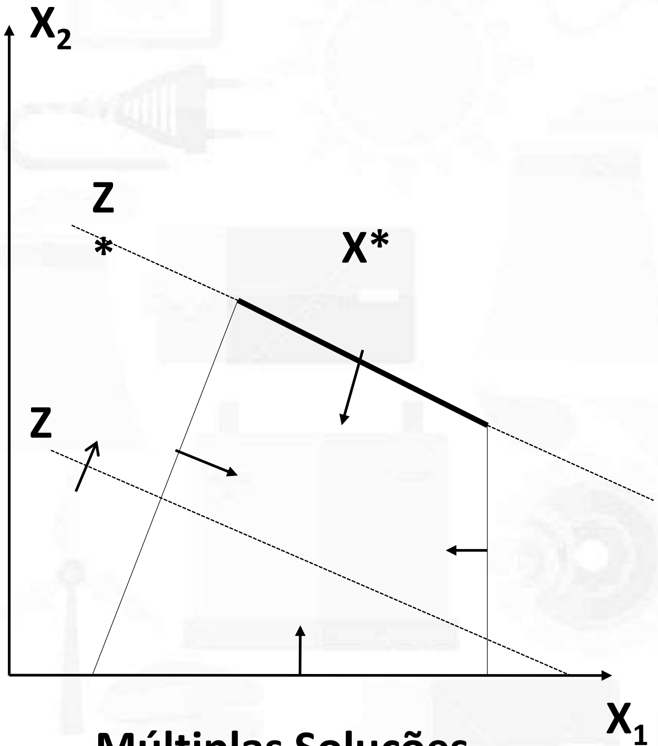
Quando a função objetivo é paralela a alguma restrição.

Todos os pontos do segmento de reta serão Soluções Ótimas.

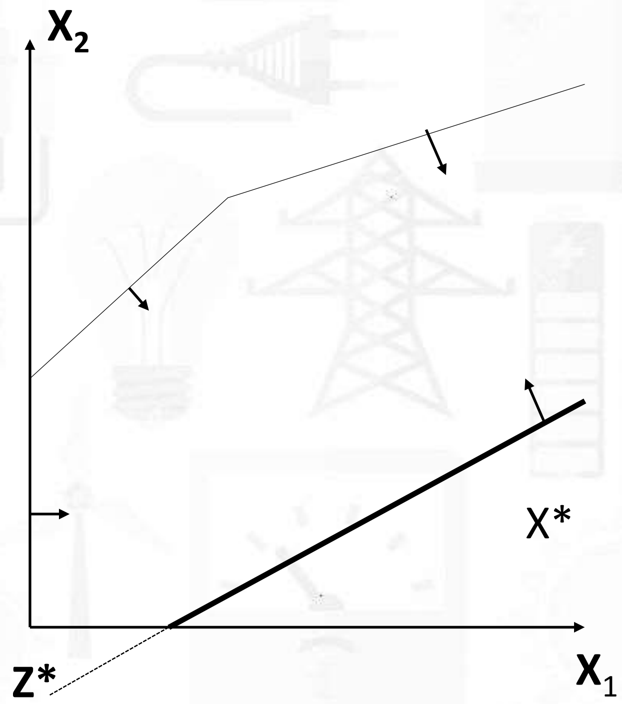


$X^* = \alpha X^*_1 + (1 - \alpha)X^*_2$, com $0 \leq \alpha \leq 1$

Resolução Gráfica

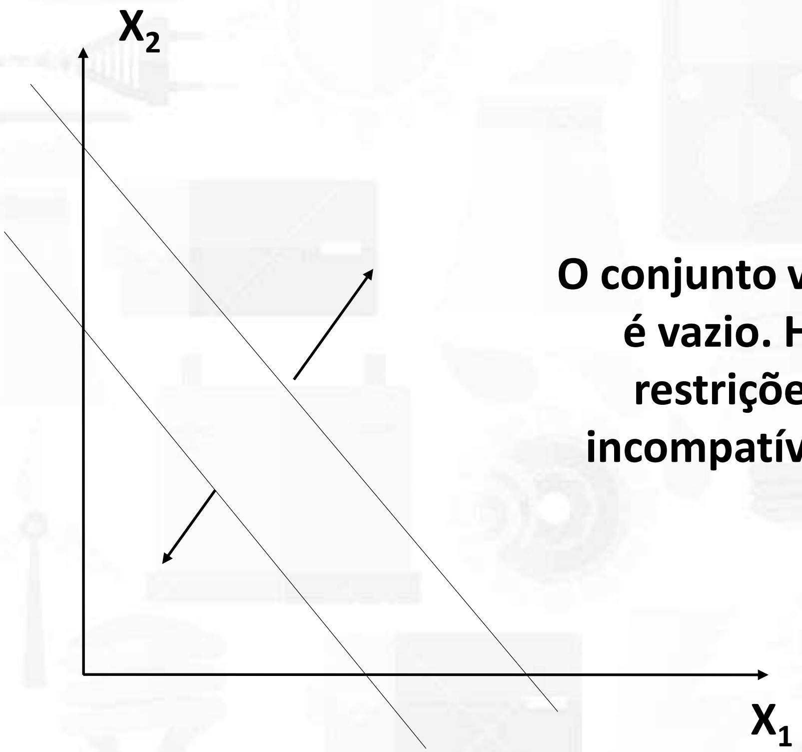


Múltiplas Soluções Ótimas 1 – Segmento de Reta Ótimo



Múltiplas Soluções Ótimas 2 Semi-reta Ótima

Resolução Gráfica



O conjunto viável é vazio. Há restrições incompatíveis.

⟹

Problema inviável

Resolução Gráfica

Agora é com você.

Uma fábrica de computadores produz 2 modelos de computador: A e B. O modelo A fornece um lucro de R$ 180,00 e B de R$ 300,00. O modelo A requer, na sua produção, um gabinete pequeno e uma unidade de disco. O modelo B requer 1 gabinete grande e 2 unidades de disco. Existem no estoque: 60 unidades do gabinete pequeno, 50 do gabinete grande e 120 unidades de disco. Pergunta-se: qual deve ser o esquema de produção que maximiza o lucro ?

Resolução Gráfica

Sabe-se que uma pessoa necessita, em sua alimentação diária, de um mínimo de 15 unidades de proteínas e 20 unidades de carboidratos. Supondo que, para satisfazer esta necessidade, ela disponha dos produtos A e B.

Um kg do produto A contém 3 unidades de proteínas, 10 unidades de carboidratos e custa R$ 2,00. Um kg do produto B contém 6 unidades de proteínas, 5 unidades de carboidratos e custa R$ 3,00. Que quantidade deve-se comprar de cada produto de modo que as exigências da alimentação sejam satisfeitas a um custo mínimo ?

Resolução Gráfica

Uma microempresa produz dois tipos de jogos para adultos e sua capacidade de trabalho é de 50 horas semanais. O jogo A requer 3 horas para ser produzido e propicia um lucro de R$ 30,00, enquanto que o jogo B precisa de 5 horas para ser produzido e acarreta um lucro de R$ 40,00. Quantas unidades de cada jogo devem produzidas semanalmente a fim de maximizar o lucro?