MAE0221 - Probabilidade
Quarta Lista de Exercícios

1. Uma variável aleatória X tem função densidade de probabilidade

$$f(x) = 1,4\exp[-kx], \forall x > 0.$$

a) Qual o valor de k?

b) Qual a média, a variância e a mediana de X?

b) Qual a função de distribuição, $F_X(x)$, de X.

2. A perda aleatória X, com sinistros domiciliares, em unidades monetárias, é modelada uniformemente sobre o intervalo $[0, 1.000]$. A Cia de Seguros impõe uma frânquia de 200 unidades monetárias.

Se Y é o número de perdas excedendo a frânquia nos próximos 100 sinistros, calcule a probabilidade de que Y esteja entre dois desvio padrão da média.

3. Em um modelo atuarial as perdas em um portifólio de apólices ocorrem de acordo com um processo de Poisson com taxa igual a 5. Qual a distribuição do tempo de espera para a primeira ocorrência? E para a segunda ocorrência? Qual a distribuição do tempo entre a primeira e a segunda ocorrências?

4. Uma perda aleatória é representada pela variável X com função densidade de probabilidade

$$f(x) = cx\exp[-0,0016x^2], \quad x > 0.$$

Calcule a probabilidade de que a perda exceda 25.

5. O tempo de vida de uma bateria à energia solar, Y, tem função densidade de probabilidade dada por

$$f(y) = \frac{c}{y^4}, \forall y > 3.$$

Calcule a média, o desvio padrão e a mediana de Y.

6. O tempo de ocorrência de acidentes envolvendo motoristas de alto risco é distribuido de acordo com uma distribuição exponencial de média igual a 3 horas.

a) Qual a probabilidade de que um motorista de alto risco, escolhido aleatóriamente, provoque um acidente depois de dirigir 5 horas?

b) Entre 10 motoristas de alto risco escolhidos aleatóriamente qual a probabilidade de que ao menos três provoquem acidentes depois de dirigir 5 horas?

7. Se a variável aleatória Y tem distribuição normal com média $\mu = 15$ e desvio padrão $\sigma = 10$. Calcule:

a) $P(Y > 18)$;

b) $P(3 < Y \leq 27)$;

c) $P(-3 < Y \leq 13)$;

d) Qual o intervalo simétrico em torno da média, que contém 90% das observações?

e) Quais os quartis da variável aleatória Y?

8. Os custos de sinistros referentes a certa apólice tem distribuição normal com média $R\$600,00$ e desvio padrão $R\$80,00$. A Cia de seguros impõe, a cada sinistro, um custo fixo de $R\$50,00$ e um custo de despesas equivalente a três porcento do custo do sinistro. Calcule a probabilidade de que o custo total de um sinistro exceda $R\$610,00$.

9. Uma amostra aleatória de tamanho 10 é selecionada de uma população com distribuição normal com média 10 e variância 2. Calcule a probabilidade de que 4 das amostra selecionadas sejam menores do que 8 e as outras 6 amostras, maiores do que 8.

10. O tempo necessário para que um candidato realize o exame do ENEM tem distribuição normal com média de 3 horas e desvio padrão de uma hora.

    a) Estima-se que um aluno com um bom perfil no ensino secundário da escola pública gaste um tempo superior à média menos um desvio padrão e inferior à média mais um desvio padrão. Qual a probabilidade de que tal fato aconteça?

    b) Calcule a probabilidade de que entre 10 alunos, com tal perfil, escolhidos aleatoriamente, 5 terminem a prova no intervalo descrito acima?

    c) Calcule a probabilidade aproximada, utilizando a aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal, de que entre 100 alunos com tal perfil, escolhidos aleatoriamente, no máximo 75 terminem a prova no intervalo descrito acima?

11. O McDonald's anunciou que usará um novo óleo na fritura de suas batatas que diminuirá os níveis de ácido de gordura trans e aumentará a quantidade de gordura poliinsaturada, mais benéfica. A empresa alega que 0,9 de seus clientes não conseguem detectar diferença no gosto do produto devido á troca. Assumindo que esse valor esteja correto, em uma amostra aleatória de 2000 clientes:

    a) Qual o valor esperado e a variância do número de clientes que não percebem alteração no gosto devido à troca?

    b) Use a aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal para calcular a probabilidade de que, no máximo, 1830 clientes não percebam alteração no gosto devido à troca.

12. Em uma população a proporção de pessoas infectadas pelo vírus ebola é de 0,01. A sensitividade de um teste para a detecção da doença (probabilidade de que um infectado seja classificado como doente) é 0,98 e a sua especificidade (probabilidade de que uma pessoa não infectada seja classificada como sadia) é de 0,99.

    a) Qual a probabilidade de que uma pessoa escolhida ao acaso dessa população fazer o teste e resultar negativo?

    b) Entre 1000 pessoas escolhidas aleatoriamente dessa população, qual a probabilidade aproximada de que no mínimo 10 e no máximo 20 apresentem resultados positivos?

13. Uma indústria produz componentes eletrônicos dos quais 0,1 apresentam defeitos.

    a) Em 200 itens selecionados ao acaso da produção qual é a probabilidade aproximada de que no máximo 10 apresentem defeitos?

    b) A indústria vende os componentes em lotes de 200 unidades e pretende instituir um nÃºmero k de defeituosos no lote a fim de que este seja devolvido. Qual o valor de k de maneira que um lote seja devolvido com probabilidade de 0,01? Use a aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal,

14. Seja X uma variável aleatória contínua com média μ e variância σ^2.

    A) Mostre que $E[(X-b)^2]$, como função de b tem mínimo em $b=\mu$.

    B) Mostre que $E[|X-b)|]$, como função de b tem mínimo em $b=m$, onde m é a mediana de X.

15. Se X é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f(x) = |1-x|, , \quad 0 \leq x \leq 2.$$

    Calcule a média e a varância de X.

16. Se X é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = 2xe^{-x^2}, \quad x > 0.$$

Encontre a função densidade de probabilidade de $Y = X^2$.

17. Se X é uma variável aleatória com função de distribuição Beta, qual a a função densidade de probabilidade de $Y = 1 - X$?

18. Se X temm função de distribuição

$$F_X(x) = \exp[-e^{-(\frac{x-\alpha}{\beta})}].$$

Qual a função de distribuição de

$$Y = \exp[-(\frac{x-\alpha}{\beta})]?$$

19. Se X é uma variável aleatória com com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$ encontre a distribuição de $Y = \frac{1}{X}$. Cacule $E[Y]$, se existir.

20. Se X é uma variável aleatória com com distribuição uniforme no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, encontre a função de distribuição de $Y = \tan(X)$.

21. Se X é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\theta & : \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & : \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}(1-\theta) & : \quad 2 < x < 3 \end{cases}.$$

onde

θ é uma constante fixada satisfazendo $0 \leq \theta \leq 1$.
A) Encontre a função de distribuição de X.
B) Encontre a média, mediana e variância de X.