

3ª Lista de Exercícios Álgebra I 2018
Prof. Eduardo Marcos

1) Prove ou escreva contra exemplo.

a) Se $x = a^2$, $a \in \mathbb{Z}$ então o resto da divisão de x por 4 deve ser 0 ou 1.

b) Se $x = a^3$, $a \in \mathbb{Z}$ então o resto da divisão de x por 9 deve pertencer ao conjunto $\{0, 1, 8\}$.

c) $6 \mid n(n+1)(2n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

d) Para $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$ vale

d1) $7 \mid 2^n - 1$; d2) $8 \mid 3^{2^n} + 7$; d3) $3 \mid 2^n - (-1)^n$

2) Prove ou de um contra-exemplo

a) $\text{mdc}(\text{mdc}(a, b), c) = \text{mdc}(a, \text{mdc}(b, c))$

b) a operação definida em \mathbb{N}^* por
 $(a, b) \rightarrow \text{mdc}(a, b)$ tem elemento neutro

c) $\text{mdc}(ab, cd) = \text{mdc}(a, c) \cdot \text{mdc}(b, d)$

$a \neq 0 \wedge b \neq 0$ então
d) $\text{mdc}(a, b) = |b| \Leftrightarrow b \mid a$

e) $\text{mdc}(a, b) = |b| \Leftrightarrow b \mid a$

f) $\text{mdc}(a \pm b, ab) = 1$

g) $a^n \mid b^n \Leftrightarrow a \mid b$ aqui $n \in \mathbb{N}^*$.

h) $\text{mdc}(a, b) = 1 \Leftrightarrow \text{mdc}(a^n, b^n) = 1$

3) Prove ou exiba contra exemplo

a) $\text{m.m.c.}(n, n+1) = |n(n+1)|$ sempre que $n(n+1) \neq 0$

b) $\text{m.m.c.}(a, b) = \text{m.d.c.}(a, b) \Leftrightarrow |a| = |b|$

c) $4k+3$ e $5k+4$ são primos entre si.

d) Todo inteiro maior que 11 é soma de dois compostos positivos

e) 1009 é primo

f) Se $n > 1$ então $n^2 + 4n + 3$ não é primo.

g) Se $n > 1$ então $3^n + 2$ é primo

4) Em cada uma das proposições abaixo diga qual a tese e qual a hipótese

a) 4 é par \Leftrightarrow 3 é primo

b) se 4 é par então 3 é primo

c) se 3 é primo então 4 é par

d) Para 4 ser par é suficiente que 3 seja primo.

e) Para 3 ser primo é suficiente que 4 seja par.

f) Para 4 ser par 3 tem que ser primo

5) Seja a um inteiro maior que 1
cujas expressões na base 10 é

$$b = r_n 10^n + \dots + r_1 10 + r_0$$

Prove ou dê contra exemplo

a) $3|b \Leftrightarrow 3|r_0 + r_1 + \dots + r_n$

b) $9|b \Leftrightarrow 9|r_0 + r_1 + \dots + r_n$

c) $5|b \Leftrightarrow 5|r_0$

d) $6|b \Leftrightarrow 3|r_0 + \dots + r_n \text{ e } 2|r_0$