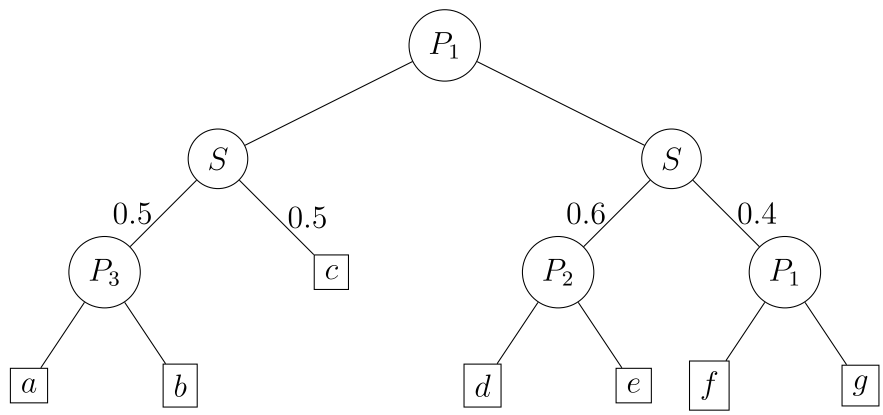


A tabela acima é uma árvore de jogo com sorteio. A função de pagamento dos vértices terminais é dada na tabela abaixo:

	a	b	c	d	e	f	g
P_1	2	1	2	0	0	3	0
P_2	2	0	1	1	2	0	1
P_3	1	1	0	0	2	1	0

1. Se o jogador P_2 joga a sub-árvore de escolha $S_2 = \{a, b, c, e, f, g\}$ e o jogador P_3 a estratégia $S_3 = \{b, c, d, e, f, g\}$ qual será o pagamento do jogador P_1 para cada uma de suas possíveis estratégias? Se o jogador P_1 escolher $S_1 = \{a, b, c\}$ será que S_1, S_2, S_3 é um perfil de equilíbrio? Por quê?

Neste caso o jogador P_1 tem três estratégias

$$S_1 = \{a, b, c\}$$
$$T_1 = \{d, e, f\}$$
$$U_1 = \{d, e, g\}$$

Para S_1 o pagamento será $\Pi_1(S_1, S_2, S_3) = 0.5 * 1 + 0.5 * 2 = 1.5$.
Para T_1 o pagamento será $\Pi_1(T_1, S_2, S_3) = 0.6 * 0 + 0.4 * 3 = 1.2$.
Para U_1 o pagamento será $\Pi_1(U_1, S_2, S_3) = 0.6 * 0 + 0.4 * 0 = 0$.
Note que a estratégia S_1 é a que maximiza o pagamento do jogador P_1. Mudando as estratégias de P_2 ou P_3 obteremos sempre as subárvores $\{b, c\}$ ou $\{a, c\}$ que não mudam os pagamentos dos jogadores P_2 e P_3, então o perfil S_1, S_2, S_2 é um equilíbrio.

2. A tabela abaixo representa a função de pagamento de um jogo na forma normal com três jogadores, cada um com duas estratégias puras disponíveis. Identifique os perfis de equilíbrio deste jogo

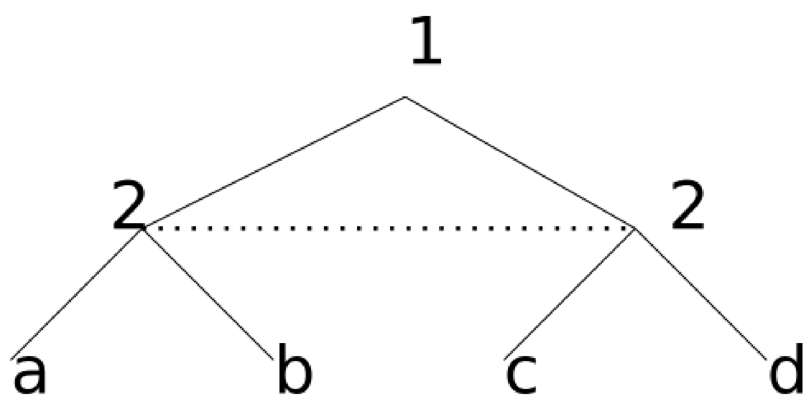
Perfil de estratégias	-	vetor de pagamento
$(1,1,1)$	+-+	(0,-1,0)
$(1,1,2)$	+-+	(0,-2,0)
$(1,2,1)$	+++	(3,0,-1)
$(1,2,2)$	-++	(1,-1,-1)
$(2,1,1)$	+-+	(0,0,0)
$(2,1,2)$	+- -	(0,0,-1)
$(2,2,1)$	-++	(-1,1,1)
$(2,2,2)$	++-	(2,1,-1)

O perfil de estratégias $(1,2,1)$ é o único equilíbrio.

3. Num jogo de soma zero, com cada um dos dois jogadores dispondo de duas estratégias $\{L,R\}$, com a função de pagamento do jogador 1 dada por

$$\Pi_1(L,L)=3\ ,\ \Pi_1(L,R)=-1$$
$$\Pi_1(R,L)=-1 \text{ e } \Pi_1(R,R)=3$$

Verificar se existe um perfil de equilíbrio representar o jogo na forma extensiva.
Não existe perfil de equilíbrio neste jogo, pois para cada perfil o jogador 1 pode melhorar seu pagamento para 3 se estiver ganhando -1 e o jogador 2 pode aumentar para 1 se estiver perdendo -3. Uma representação do jogo é:



Os vértices terminais valem:

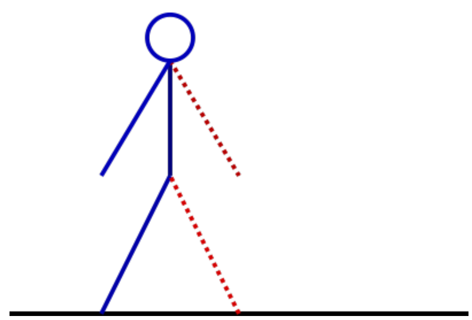
	a	b	c	d
P_1	3	-1	-1	3
P_2	-3	1	1	-3

4. Num jogo NIM (o último que retira as fichas ganha) com três pilhas de fichas, e onde cada pilha pode ter no máximo 5 fichas, quais são as posições em que o jogador da vez tem estratégia vencedora.

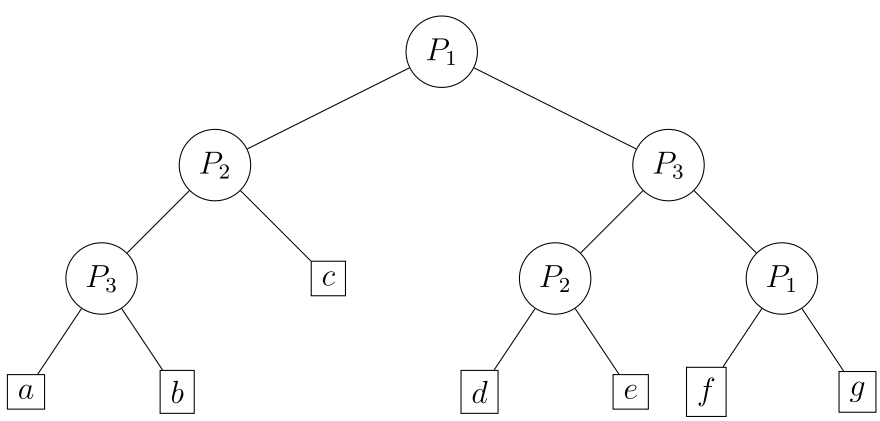
O primeiro jogador irá vencer sempre que a posição estiver desbalanceada. Isto inclui

- Todas as posições (a, a, a) com $a \neq 0$.
- Todas as posições (a, a, b) com $b \neq 0$, e suas permutações.
- Todas as posições $(a, b, 0)$ com $a \neq b$, e suas permutações .
- $(1, 2, 4)$, $(1, 2, 5)$,$(1, 3, 4)$, $(1, 3, 5)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$, $(2, 4, 5)$ e $(3, 4, 5)$ e suas permutações

5. No jogo Hackenbush, o jogador azul retira de um grafo as arestas contínuas (azuis) e o outro jogador (vermelho) retira as arestas pontilhadas (vermelhas). Uma vez retirada uma aresta, ela também elimina todas as arestas que ficam desconectadas do chão. O o último jogador que consegue retirar uma aresta vence a partida. No grafo abaixo, quem tem uma estratégia vencedora, o primeiro (azul) ou o segundo (vermelho) jogador. Este jogo é imparcial ou parcial. Faça uma grafo onde o outro jogador tenha uma estratégia vencedora.
Este jogo é parcial já que os jogadores vermelho e azul têm um número diferente de jogadas em cada posição. O jogador azul vence no diagrama abaixo.



6. (alternativa ao exercício 1)



A tabela acima é uma árvore de jogo com sorteio. A função de pagamento dos vértices terminais é dada na tabela abaixo:

	a	b	c	d	e	f	g
P_1	2	1	2	0	0	3	0
P_2	2	0	1	1	2	0	1
P_3	1	1	0	0	2	1	0

Se o jogador P_2 joga a sub-árvore de escolha $S_2 = \{a, b, e, f, g\}$ e o jogador P_3 a estratégia $S_3 = \{b, c, d, e, \}$ qual será o pagamento do jogador P_1 para cada uma de suas possíveis estratégias? Se o jogador P_1 escolher $S_1 = \{a, b, c\}$ será que S_1, S_2, S_3 é um perfil de equilíbrio? Por quê?

Neste caso o jogador P_1 tem três estratégias

$$S_1 = \{a, b, c\}$$
$$T_1 = \{d, e, f\}$$
$$U_1 = \{d, e, g\}$$

e daí temos

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \{b\}$$
$$T_1 \cap S_2 \cap S_3 = \{e\}$$
$$U_1 \cap S_2 \cap S_3 = \{e\}$$

Que correspondem aos pagamentos 1, 0 e 0 para o jogador 1 respectivamente.
O perfil (S_1, S_2, S_3) não é um equilíbrio pois se o jogador P_2 usar a estratégia $T_2 = \{c, e, f, g\}$ temos que $S_1 \cap T_2 \cap S_3 = \{c\}$ e $\Pi_2(S_1, T_2, S_3) = 1 \geq \Pi_2(S_1, S_2, S_3) = 0$