Princípio de Invariância

SEL 0364 Controle Não Linear

Rayza Araújo

2018

Sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -x^3 + 2y^3 \\
\dot{y} &= -2xy^2
\end{aligned}
$$

Desejamos:

- Encontrar o(s) ponto(s) de equilíbrio
- Tirar conclusões sobre estabilidade

Pontos de Equilíbrio

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^3 + 2y^3 = 0 \\ \dot{y} &= -2xy^2 = 0\end{aligned}$$

Pontos de Equilíbrio

$$\begin{cases} x^3 = 2y^3 \Rightarrow \ x = \sqrt[3]{2}y \\ x = 0 \ \text{ ou } \ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + 2y^3 = 0 \\ \dot{y} &= -2xy^2 = 0 \end{aligned}$$

Pontos de Equilíbrio

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + 2y^3 = 0 \\ \dot{y} &= -2xy^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^3 = 2y^3 \Rightarrow \; x = \sqrt[3]{2}y \\ x = 0 \;\; \text{ou} \;\; y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{se } x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ \text{se } y = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Pontos de Equilíbrio

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + 2y^3 = 0 \\ \dot{y} &= -2xy^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^3 = 2y^3 \Rightarrow \ x = \sqrt[3]{2}y \\ x = 0 \ \text{ ou } \ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{se } x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ \text{se } y = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Origem é o único equilíbrio}}$

Linearização

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \approx \dot{\zeta} = A\zeta$$

Linearização

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \approx \dot{\zeta} = A\zeta$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)} = \begin{bmatrix} -3x_0^2 & 6y_0^2 \\ -2y_0^2 & -4x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Linearização

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \approx \dot{\zeta} = A\zeta$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)} = \begin{bmatrix} -3x_0^2 & 6y_0^2 \\ -2y_0^2 & -4x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Inútil!

Plano de Fase

pplane.m

Lyapunov

Sugestão: $V(x, y) = x^2 + y^2$

Lyapunov

Sugestão: $V(x,y) = x^2 + y^2$

$\checkmark V(0,0) = 0$

Lyapunov

Sugestão: $V(x,y) = x^2 + y^2$

$\checkmark\, V(0,0) = 0$

$\checkmark\, V(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Lyapunov

Sugestão: $V(x,y) = x^2 + y^2$

$\checkmark\, V(0,0) = 0$

$\checkmark\, V(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\checkmark\, V(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

Lyapunov

Sugestão: $V(x,y) = x^2 + y^2$

$\checkmark\, V(0,0) = 0$

$\checkmark\, V(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\checkmark\, V(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

$\dot{V}(x,y) = ?$

$\dot{V}(x, y) = ?$

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}$$

$\dot{V}(x, y) = ?$

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x, y) = (2x)\dot{x} + (2y)\dot{y}$$

$\dot{V}(x, y) = ?$

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x, y) = (2x)\dot{x} + (2y)\dot{y}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x, y) = (2x)(-x^3 + 2y^3) + (2y)(-2xy^2)$$

$\dot{V}(x,y) = ?$

$$\dot{V}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x,y) = (2x)\dot{x} + (2y)\dot{y}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x,y) = (2x)(-x^3 + 2y^3) + (2y)(-2xy^2)$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x,y) = -2x^4 + 4xy^3 - 4xy^3$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x,y) = -2x^4$$

Lyapunov

Sugestão: $V(x,y) = x^2 + y^2$

$\checkmark\, V(0,0) = 0$

$\checkmark\, V(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

$\checkmark\, V(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\checkmark\, \dot{V}(x,y) \leq 0$

Lyapunov

Sugestão: $V(x,y) = x^2 + y^2$

✓ $V(0,0) = 0$

✓ $V(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

✓ $V(x,y) \geq 0 \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

✓ $\dot{V}(x,y) \leq 0$

...mas sabemos que a origem é assintoticamente estável!

Princípio de Invariância

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1. Seja L uma constante real tal que $\omega_L = \{r \in \mathbb{R}^n : V(r) < L\}$ seja limitado. Admita que $\dot{V}(r) \leq 0 \; \forall r \in \omega_L$ e defina o conjunto $E = \{r \in \omega_L : \dot{V}(r) = 0\}$.
Seja B o maior conjunto invariante contido em E, então todas as soluções iniciando em ω_L tendem para B quando $t \to \infty$.

Princípio de Invariância

Sejam $\boxed{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n}$ e $\boxed{V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$ funções de classe C^1. Seja L uma constante real tal que $\boxed{\omega_L = \{r \in \mathbb{R}^n : V(r) < L\}}$ seja limitado. Admita que $\boxed{\dot{V}(r) \leq 0 \ \forall r \in \omega_L}$ e defina o conjunto $\boxed{E = \{r \in \omega_L : \dot{V}(r) = 0\}}$. Seja $\boxed{B \text{ o maior conjunto invariante}}$ contido em E, então todas as soluções iniciando em ω_L tendem para B quando $t \to \infty$.

Sistema

F. Lyapunov

Conjunto próximo da origem

A ser definido dentro de ω_L

Restringe a trajetória

CONJUNTO INVARIANTE

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

CONJUNTO INVARIANTE

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

$$r_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

CONJUNTO INVARIANTE

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

$$r_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$r_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix}$$

CONJUNTO INVARIANTE

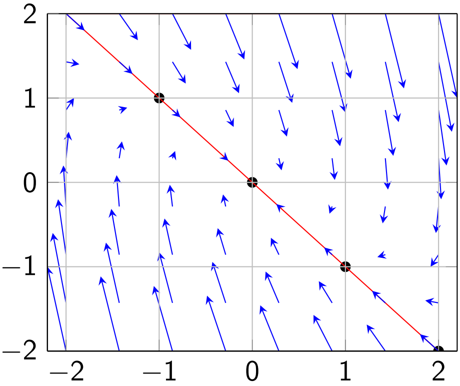
$$\begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

$$r_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$r_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$r_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

CONJUNTO INVARIANTE



Princípio de Invariância

$$\dot{x} = -x^3 + 2y^3$$
$$\dot{y} = -2xy^2$$

Princípio de Invariância

$$\dot{x} = -x^3 + 2y^3$$
$$\dot{y} = -2xy^2$$

$$V(x,y) = x^2 + y^2$$
$$\dot{V}(x,y) = -2x^4$$

Princípio de Invariância

$$\dot{x} = -x^3 + 2y^3$$
$$\dot{y} = -2xy^2$$

$$V(x,y) = x^2 + y^2$$
$$\dot{V}(x,y) = -2x^4$$

Escolher $L = l^2 \Rightarrow \omega_L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n : V(x,y) < l^2\}$ é limitado (por definição). E, de fato, $\dot{V}(x,y) \leq 0 \, \forall (x,y) \in \omega_L$

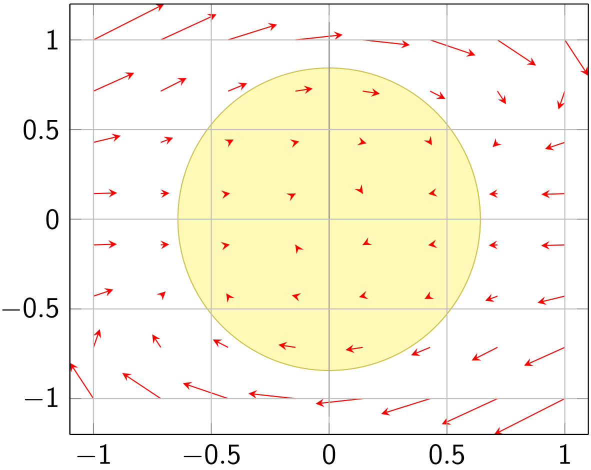
Princípio de Invariância

$$\dot{x} = -x^3 + 2y^3$$
$$\dot{y} = -2xy^2$$

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$
$$\dot{V}(x, y) = -2x^4$$

Escolher $L = l^2 \Rightarrow \omega_L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : V(x, y) < l^2\}$ é limitado (por definição). E, de fato, $\dot{V}(x, y) \leq 0 \; \forall (x, y) \in \omega_L$

$E = \{(x, y) \in \omega_L : \dot{V}(x, y) = 0\} \Leftrightarrow E = \{(x, y) \in \omega_L : x = 0\}$


1
0.5
0
−0.5
−1
−1
−0.5
0
0.5
1

O maior conjunto invariante em E é a origem $\Rightarrow$ pelo princípio da invariância, todas as trajetórias iniciando em ω_L tendem para B (a origem) quando $t \to \infty$ $\Rightarrow$ a origem é assintoticamente estável

Tarefa

Encontre os pontos de equilíbrio e prove a estabilidade assintótica da origem do sistema a seguir:

$$\dot{x} = -y - x^3$$
$$\dot{y} = x^5$$