Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos

Introdução de Sistemas Fuzzy no Matlab

SEL0364 - Controle Não Linear Aplicado

Rafael Fernando Quirino Magossi
Prof. Dra. Vilma Alves de Oliveira

Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos

26 de março de 2016

Sumário

Considerações iniciais

O universo de discurso deve ser o mesmo para todas as funções de pertinência de uma variável de entrada. Em outras palavras, é necessário definir a função de pertinência para todo valor do universo de discurso.

Vamos definir que as funções de pertinência de uma variável de entrada qualquer, denotadas por μ_A e μ_B, são:

$$\mu_A(x) \in [0, 1], \forall x \in X \tag{1}$$

$$\mu_B(x) \in [0, 1], \forall x \in X. \tag{2}$$

De modo geral, para aplicações práticas o universo de discurso é **discreto**. Ou seja X é um vetor de $\mathbb{R}^n$, consequentemente μ_A e μ_B também são vetores de $\mathbb{R}^n$.

Para os próximos slides, considere que:

$$\mu_A(x) = 0.01x, \forall x \in X = \{0, 1, 2, 3, ..., 99, 100\} \tag{3}$$

$$\mu_B(x) = 0.5, \forall x \in X = \{0, 1, 2, 3, ..., 99, 100\} \tag{4}$$

No Matlab:

```
close all
clear all
clc

% definindo universo de discurso

x = linspace(0,100,101); % gera um vetor de 0 a 100 com 101
    pontos entre os extremos -- linspace(inicio,fim,n pontos)
```

```
ua = 0.01*x; % gera primeira funcao de pertinencia

for n=1:length(x)

ub(n) = 0.5; % funcao de pertinencia precisa ser definida
    para todo valor de x

end

%obs1: ub poderia ser gerado por ub = 0.5*ones(1,length(x))

%plot das funcoes
plot(x,ua,x,ub,'r','LineWidth',3);
title('Funcoes de pertinencia');
legend('\mu_A','\mu_B');
xlabel('x');
ylabel('\mu_A, \mu_B');
```

Obtemos como saída do programa:

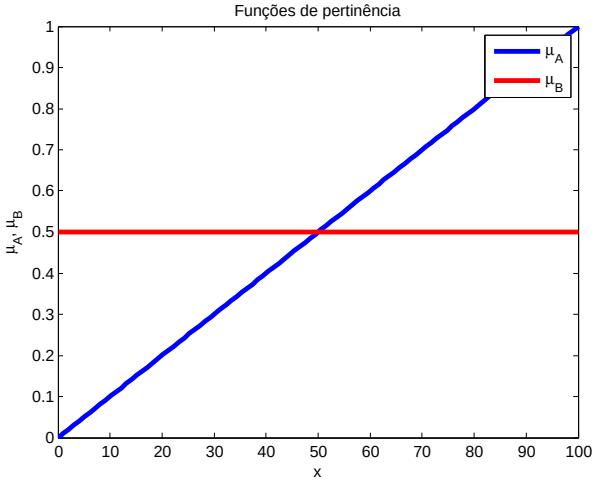

Figura 1: Gráfico das funções de pertinência

Interseção (conector E)

Define-se a interseção através da operação mínimo:

$$\mu_A \cap \mu_B = minimo(\mu_A, \mu_B) \tag{5}$$

No Matlab:

```
%operacao minimo

uaub_min = min(ua,ub);
figure
plot(x,uaub_min,'LineWidth',3);
title('Operacao Minimo');
legend('minimo(\mu_A\mu_B)');
xlabel('x');
ylabel('\mu_A, \mu_B');
axis([0 100 0 1]) %ajusta eixos
```

Obtemos como saída do programa:

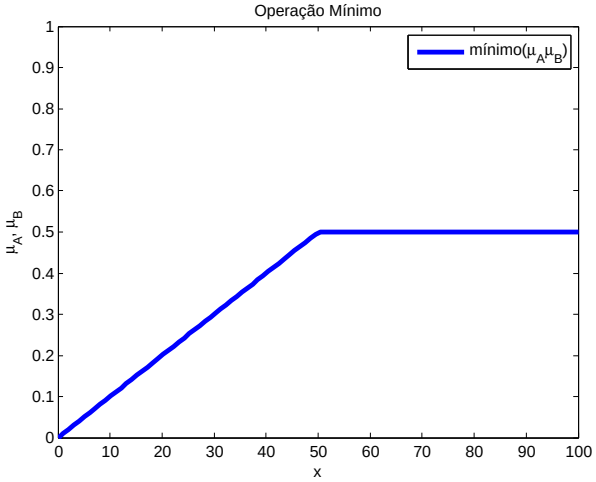

Figura 2: Gráfico da operação mínimo

União (conector OU)

Define-se a união através da operação máximo:

$$\mu_A \cup \mu_B = maximo(\mu_A, \mu_B) \tag{6}$$

No Matlab:

```
%operacao maximo

uaub_max = max(ua,ub);
figure
plot(x,uaub_min,'LineWidth',3);
title('Operacao Maximo');
legend('maximo(\mu_A\mu_B)');
xlabel('x');
ylabel('\mu_A, \mu_B');
axis([0 100 0 1]) %ajusta eixos
```

Obtemos como saída do programa:

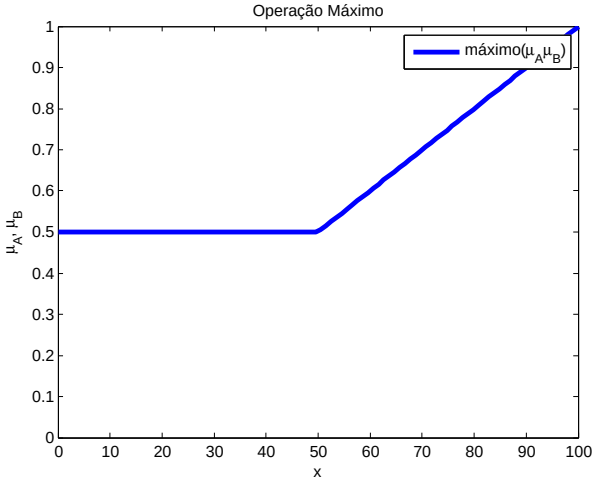

Figura 3: Gráfico da operação máximo

Complemento (Não é)

Define-se o complemento através da operação:

$$\mu_A = 1 - \mu_A \tag{7}$$

No Matlab:

```
%operacao complemento

ua_comp = 1-ua;
figure
plot(x,ua_comp,'LineWidth',3);
title('Operacao Complemento');
xlabel('x');
ylabel('Complemento \mu_A');
axis([0 100 0 1]) %ajusta eixos
```

Obtemos como saída do programa:

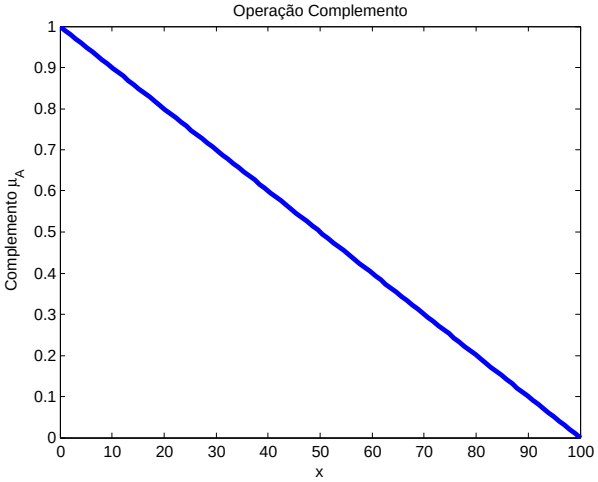

Figura 4: Gráfico do complemento de μ_A

Tipos básicos

Os tipos básicos de funções de pertinência são:

- Triangular
- Trapezoidal
- Gaussiana
- Degrau

Mas existem inúmeras outras e há também a possibilidade de criá-las a partir de uma função qualquer desejada.

Triangular

Trata-se de uma função de pertinência básica muito utilizada:

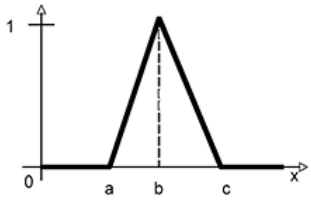

Figura 5: Função triangular

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & se \quad a < x \leqslant b \\ \dfrac{c-x}{c-b} & se \quad b < x \leqslant c \\ 0 & se \quad x > c \end{cases}$$

Hands-on!

Desejamos criar uma função no Matlab que receba o universo de discurso x e os pontos a, b e c, e retorne a função de pertinência triangular.

```
function y = triangular(x,a,b,c)


end
```

OBS1: Salve o script com o nome triangular.m (mesmo nome da função que deseja criar).

OBS2: Para testar considere que $x \in X = 1, 2, 3, ..., 99, 100$ e $a = 25$,$b = 50$ e $c = 75$.

OBS3: Tenha brio, não olhe a solução no próximo slide antes de tentar fazer! (:

Solução

```
function y = triangular(x,a,b,c)

        for k = 1:length(x)

                if x(k)<=a
                y(k)=0;
                elseif (x(k)>a && x(k)<=b)
                y(k)=(x(k)-a)/(b-a);
                elseif (x(k)>b && x(k)<=c)
                y(k)=(c-x(k))/(c-b);
                else
                y(k)=0;
                end
        end
end
```

Solução

Utilizando a função:

```
% uni. disc. e constantes

x = linspace(0,100,101);
a = 25;
b = 50;
c = 75;

ua = triangular(x,a,b,c);
figure
plot(x,ua);
```

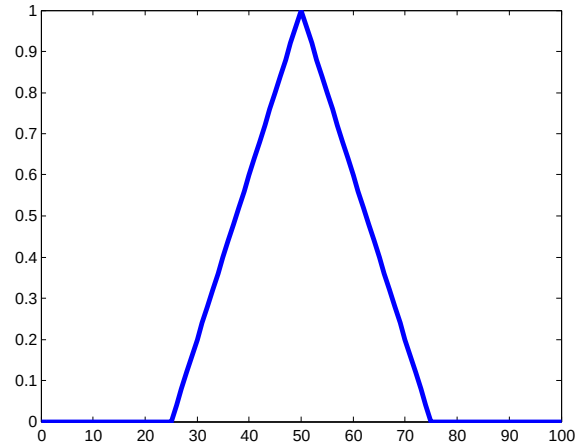

Figura 6: Gráfico da função de pertinência triangular.

Trapezoidal

A função trapezoidal também é muito utilizada. Segue função para Matlab:

```
function y = trapezoidal(x,a,b,c,d)
        for k = 1:length(x)
                if x(k)<=a
                y(k)=0;
                elseif (x(k)>a&&x(k)<=b)
                y(k)=(x(k)-a)/(b-a);
                elseif (x(k)>b&&x(k)<=c)
                y(k) = 1;
                elseif (x(k)>c&&x(k)<=d)
                y(k)=(d-x(k))/(d-c);
                else
                y(k)=0;
                end
        end
end
```

Utilizando a função:

```
% uni. disc. e constantes

x = linspace(0,100,101);
a = 20;
b = 40;
c = 60;
d = 80;

ua = trapezoidal(x,a,b,c,d);
figure
plot(x,ua,'LineWidth',3);
```

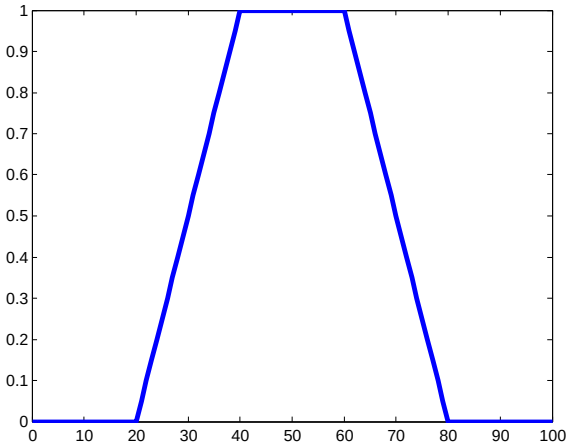

Figura 7: Gráfico da função de pertinência trapezoidal.

Função Singleton

O universo de discurso é discreto 1,2,...,100. Mas e se o sistema receber uma entrada do tipo 3.1459 ? O que fazer ?

Para isso existe a função singleton. Essa função procura a entrada no universo de discurso e aproxima linearmente através da média o valor de pertinência. A função no Matlab pode ser obtida por:

```
function s = singleton(x,y,a)
        n = find(x>=a,1,'first');
                if(n<=1) s = y(n);
                else s = (y(n)+y(n-1))*0.5;
                end
end
```

onde x é vetor universo discurso, y a função de pertinência relativa a x, e a o valor da entrada que se deseja saber o valor decimal correspondente à função de pertinência discretizada.

Mandani

Em lógica fuzzy é comum encontramos a seguinte formulação de regra:

- Se velocidade é alta **E** massa é grande **ENTÃO** pressão freio é grande.

O conectivo **E** já fora adotado como sendo o mínimo. O **ENTÃO** é conhecido como implicação. Mas como se faz ? A mais utilizada como implicação é a de **Mamdami**.

A implicação de Mamdami é definida como sendo:

$$a \Rightarrow b = a * minb \tag{8}$$

onde *min é o **produto externo**, correspondendo à aplicação da operação mínimo em cada elemento do produto cartesiano entre a e b.

Mamdani na prática

Ao usar a definição formal de Mamdani o que obtemos na verdade é um ato de **ceifar** a função de pertinência ao qual será implicada a ação, como ilustrado abaixo:

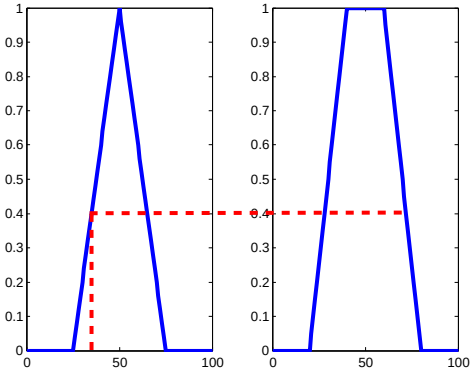

Figura 8: Implicação de Mamdani.

No Matlab, para gerar o vetor da implicação de Mamdani podemos usar a função:

```
function b = saida(y,s)

y(y>s) = s;
b = y;

end
```

onde y é a função de pertinência e s o valor o qual a função deve ser "ceifada".

Como exemplo considere a função triangular e que desejamos ceifá-la em .5. Assim:

```
% uni. disc. e constantes

x = linspace(0,100,101);
a = 25;
b = 50;
c = 75;

ua = triangular(x,a,b,c);
ua = saida(ua,.5);

figure
plot(x,ua,'LineWidth',3);
axis([0 100 0 1]) %ajusta eixos
```

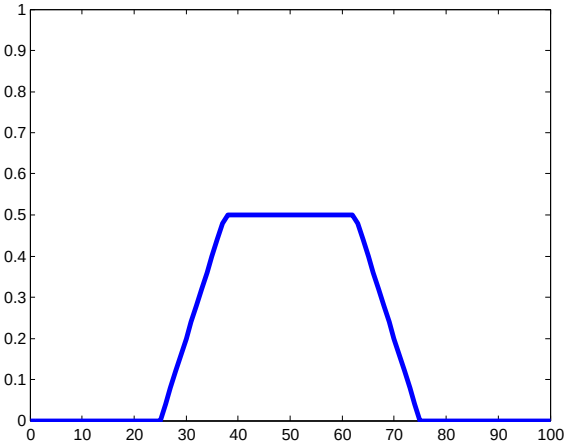

Figura 9: Gráfico da função de pertinência ceifada.

Agregação

Após verificar quais foram as regras ativadas e suas respectivas saídas, utiliza-se a agregação para juntar todas as respostas. O operador de agregação mais comum é a **operação máximo**. Em linhas gerais, a agregação transformará os vetores ceifados em um único vetor equivalente utilizando o máximo como operador.

Centro de área (CDA)

Ótimo, tenho um gráfico que representa minha saída. Mas qual é o valor crisp para essa saída ?

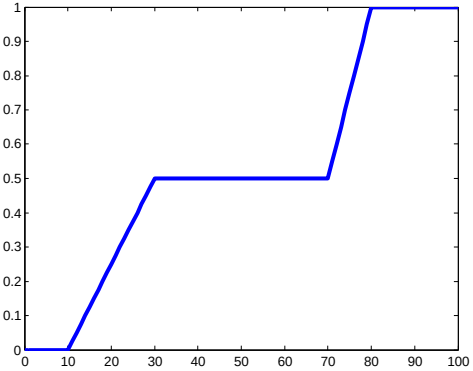

Figura 10: Gráfico para defuzzificação.

Centro de área

O centro de área é utilizado para ponderar o valor de saída após todo processo feito. Por definição a localização no universo de discurso de saída do centro de área é:

$$CM = \frac{< x, \mu(x) >}{\sum_{i=0}^{n} \mu_i(x)} \tag{9}$$

onde $< x, \mu(x) >$ é o **produto interno** entre a função de pertinência e o universo de discurso.

No Matlab:

```
function cm = centroarea(x,y)

cm = sum(x.*y)/sum(y);

end
```

onde x é o universo de discurso e y a função de pertinência já agregada.

Exemplo para entender tudo

A determinação da pressão a ser imprimida num sistema automatizado para freios automotivos pode ser estimada a partir da quantidade de movimento (massa e velocidade) do veículo.

Os especialistas envolvidos com o projeto do sistema especificaram o seguinte sistema fuzzy para ser aplicado neste problema:

- Variáveis de Entrada
  1. Velocidade (km/h) $V \in [0; 180]$.
  2. Massa do veículo (ton) $M \in [0; 2.4]$
- Variáveis de Saída
  1. Pressão no freio (bar) $P \in [0; 20]$.

Objetivo: Deseja-se então conhecer qual seria a pressão a ser exercida nos freios para um veículo com massa de 0.7309 ton e com uma velocidade instantânea de 109.8 km/h. .

Os operadores fuzzy a serem utilizados serão os seguintes:

- Conectivo: E (Mínimo) e OU (Máximo)
- Implicação: Mamdani
- Agregação: Máximo
- Defuzzificação: Centro de Área (CDA)

Conjunto de termos:

- Velocidade
  - Baixa: trapezoidal a=0,b=0,c=50,d=100;
  - Média: triangular a=50,b=125;c=150;
  - Alta: trapezoidal a=100,b=150,c=180,d=180;
- Massa
  - Pequena: trapezoidal a=0,b=0,c=.5,d=1;
  - Média: triangular a=.5,b=1.25;c=1.5;
  - Grande: trapezoidal a=1.25,b=2,c=2.4,d=2.4;
- Pressão
  - Fraca: trapezoidal a=0,b=0,c=5,d=15;
  - Elevada: trapezoidal a=5,b=15,c=20,d=20;

Conjunto de regras:

- Se velocidade é baixa E massa é pequena ENTÃO pressão é fraca;
- Se velocidade é baixa E massa é média ENTÃO pressão é fraca;
- Se velocidade é baixa E massa é grande ENTÃO pressão é elevada;
- Se velocidade é média E massa é pequena ENTÃO pressão é fraca;
- Se velocidade é média E massa é média ENTÃO pressão é elevada;
- Se velocidade é média E massa é grande ENTÃO pressão é elevada;
- Se velocidade é alta E massa é pequena ENTÃO pressão é elevada;
- Se velocidade é alta E massa é média ENTÃO pressão é elevada;
- Se velocidade é alta E massa é grande ENTÃO pressão é elevada;

Solução

```
close all
clear all
clc

% Primeiro passo: Definir o universo de discurso.
    Vamos dividir em 10000.

v = linspace(0,180,10000);
m = linspace(0,2.4,10000);
p = linspace(0,20,10000);
```

Solução

```
% Segundo passo: Gerar as funcoes de pertinencia para cada
    input

vbaixa = trapezoidal(v,0,0,50,100);
vmedia = triangular(v,50,125,150);
valta = trapezoidal(v,100,150,180,180);


mpequena = trapezoidal(m,0,0,.5,1);
mmedia = triangular(m,.5,1.25,1.5);
mgrande = trapezoidal(m,1.25,2,2.4,2.4);

pfraca = trapezoidal(p,0,0,5,15);
pelevada = trapezoidal(p,5,15,20,20);
```

Solução

```
% Terceiro passo: Obter os valores singleton dos valores de amostra
% Cria liberdade para o usuario entrar com o dado de v e m
prompt = 'Qual o valor da velocidade do carro nesse momento ?\n\n';
va = input(prompt);
while(va>180 || va<0)
display('Valor invalido.')
va = input(prompt);
end
prompt = 'Qual o valor da massa do carro nesse momento ?\n\n';
ma = input(prompt);
while(ma>2.4 || ma<0)
display('Valor invalido.')
ma = input(prompt);
end
```

Solução

```
% Agora os singleton

s1 = singleton(v,vbaixa,va);
s2 = singleton(v,vmedia,va);
s3 = singleton(v,valta,va);
s4 = singleton(m,mpequena,ma);
s5 = singleton(m,mmedia,ma);
s6 = singleton(m,mgrande,ma);
```

Solução

```
% Quarto passo: Usar o conectivo das regras

r1 = min(s1,s4);
r2 = min(s1,s5);
r3 = min(s1,s6);

r4 = min(s2,s4);
r5 = min(s2,s5);
r6 = min(s2,s6);

r7 = min(s3,s4);
r8 = min(s3,s5);
r9 = min(s3,s6);
```

Solução

```
% Quinto passo: Usar a implicacao de Mamdani

out1 = saida(pfraca,r1);
out2 = saida(pfraca,r2);
out3 = saida(pelevada,r3);

out4 = saida(pfraca,r4);
out5 = saida(pelevada,r5);
out6 = saida(pelevada,r6);

out7 = saida(pelevada,r7);
out8 = saida(pelevada,r8);
out9 = saida(pelevada,r9);
```

Solução

```
% Sexto passo: Agregacao das saidas

agreg = max([out1;out2;out3;out4;out5;out6;out7;out8;out9]);
```

Solução

```
% Setimo passo: Usar centro de area para obter valor da
    pressao no freio

psaida = centroarea(p,agreg);
```

Solução

```
% vamos ver como ficou!

display(sprintf('O valor da pressao no freio e: %.2f',psaida)
    )

figure

plot(v,vbaixa,v,vmedia,v,valta,'LineWidth',3);
legend('vbaixa','vmedia','valta')
title('Entrada: Velocidade');
xlabel('V [km/h]');
ylabel('\mu_v');
axis([0 180 0 1]) %ajusta eixos
grid on
```

Solução

```
figure

plot(m,mpequena,m,mmedia,m,mgrande,'LineWidth',3);
legend('mpequena','mmedia','mgrande')
title('Entrada: Massa');
xlabel('M [ton]');
ylabel('\mu_m');
axis([0 2.4 0 1]) %ajusta eixos
grid on
```

Solução

```
figure

plot(p,pfraca,p,pelevada,'LineWidth',3);
legend('pfraca','pelevada')
title('Saida: Pressao');
xlabel('P [bar]');
ylabel('\mu_p');
axis([0 20 0 1]) %ajusta eixos
grid on
```

Solução

```
figure

plot(p,[out1;out2;out3;out4;out5;out6;out7;out8;out9],'
    LineWidth',3);
legend('out1','out2','out3','out4','out5','out6','out7','out8
    ','out9')
title('Saida: Pressao cada regra');
xlabel('P [bar]');
ylabel('\mu_p');
axis([0 20 0 1]) %ajusta eixos
grid on
```

Solução

```
figure

plot(p,agreg,'LineWidth',3);
title('Saida: Pressao');
xlabel('P [bar]');
ylabel('\mu_p');
axis([0 20 0 1]) %ajusta eixos
grid on
```

Resultado

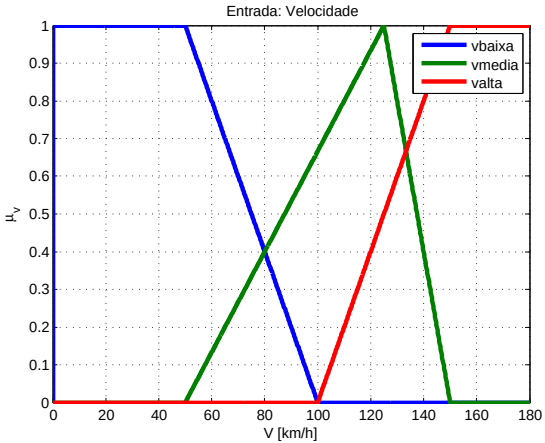

Figura 11: Gráfico velocidade.

Resultado

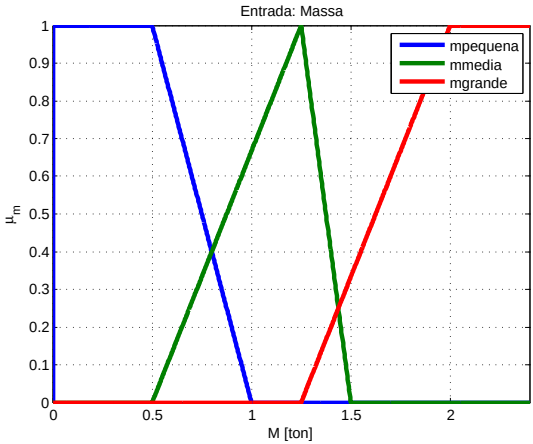

Figura 12: Gráfico massa.

Resultado

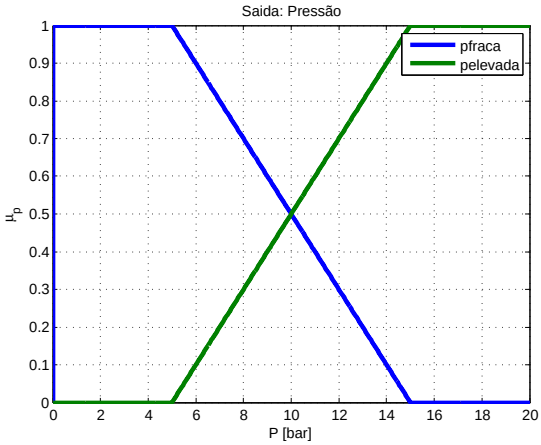

Figura 13: Gráfico pressão.

Resultado

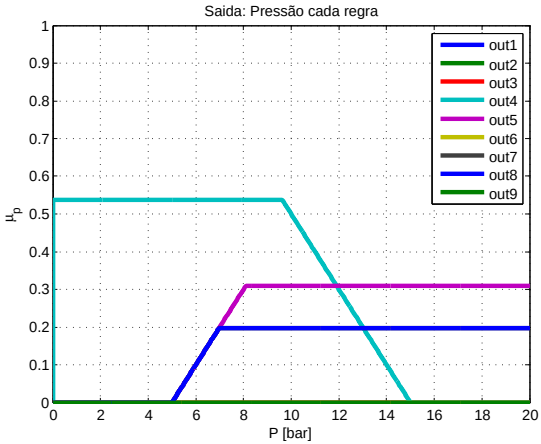

Figura 14: Gráfico pressão das regras.

Resultado

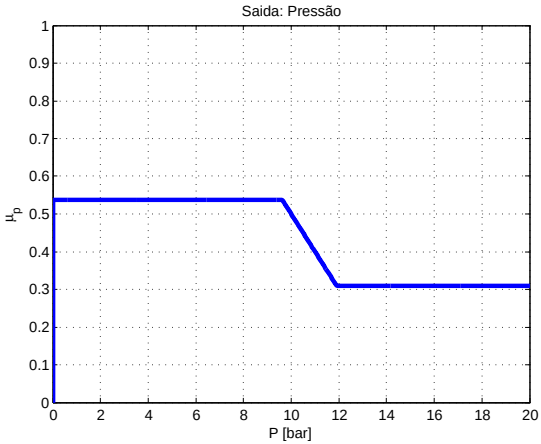

Figura 15: Gráfico pressão respostas agregadas.

Resultado

No prompt do Matlab:

Qual o valor da velocidade do carro nesse momento ?

109.8
Qual o valor da massa do carro nesse momento ?

0.7309
O valor da pressão no freio é: 8.68

No toolbox do Matlab:

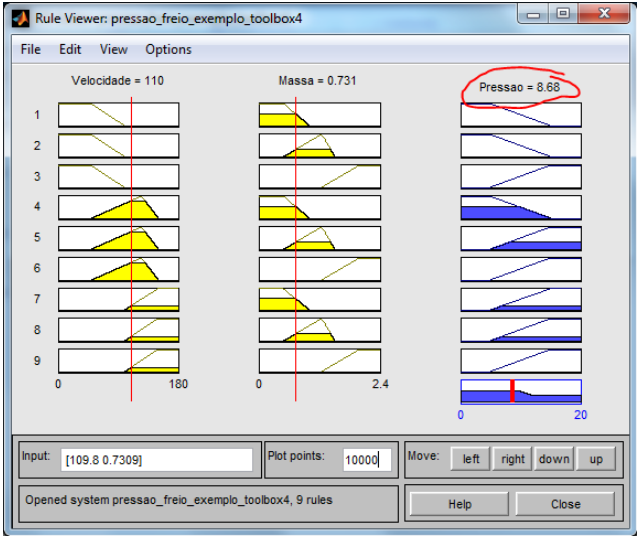

Figura 16: Tela toolbox fuzzy Matlab.

Hands-on! Sistema de Gorjeta

Projete um sistema fuzzy para estipular a gorjeta a ser dada em um restaurante de acordo com a qualidade do serviço e da comida. Considere as seguintes diretrizes gerais:

- Um número entre zero e dez representa a qualidade do serviço de um restaurante (dez é excelente);
- Outro número entre zero e dez representa a qualidade da comida (dez é excelente);
- Suponha que uma gorjeta pequena é 10%, uma gorjeta razoável é 15% e uma gorjeta grande é 20%.

Conjunto de termos:

- Serviço
  - Muito Ruim: trapezoidal a=0,b=0,c=2,d=4;
  - Razoável: triangular a=0,b=5;c=10;
  - Muito Bom: trapezoidal a=6,b=8,c=10,d=10;
- Comida
  - Muito Ruim: trapezoidal a=0,b=0,c=2,d=4;
  - Razoável: triangular a=1,b=5;c=7;
  - Muito Boa: trapezoidal a=6,b=8,c=10,d=10;
- Gorjeta
  - Pequena: trapezoidal a=0,b=0,c=10,d=10;
  - Razoável: trapezoidal a=10,b=10,c=15,d=15;
  - Grande: trapezoidal a=15,b=15,c=20,d=20;

Conjunto de regras:

- Se serviço é muito ruim E comida é muito ruim ENTÃO gorjeta é pequena;
- Se serviço é muito ruim E comida é razoável ENTÃO gorjeta é pequena;
- Se serviço é muito ruim e comida é muito boa ENTÃO gorjeta é razoável;
- Se serviço é razoável E comida é muito ruim ENTÃO gorjeta é pequena;
- Se serviço é razoável E comida é razoável ENTÃO gorjeta é razoável;
- Se serviço é razoável E comida é muito boa ENTÃO gorjeta é razoável;
- Se serviço é muito bom E comida é muito ruim ENTÃO gorjeta é razoável;
- Se serviço é muito bom E comida é razoável ENTÃO gorjeta é grande;
- Se serviço é muito bom E comida é muito boa ENTÃO gorjeta é grande;

Os operadores fuzzy a serem utilizados serão os seguintes:

- Conectivo: E (Mínimo) e OU (Máximo)
- Implicação: Mamdani
- Agregação: Máximo
- Defuzzificação: Centro de Área (CDA)

Para esse exercício pede-se para uma discretização do universo de discurso de 10000:

1. Gráficos das variáveis de entrada;
2. Gráficos das variáveis de saída;
3. Valor da gorjeta caso: serviço = 3.7 e comida = 6.8;
4. Gráfico das regras ativadas;
5. Gráfico da saída após agregar as regras ativadas;
6. Se a discretização for feita com 10 pontos, há muita diferença ?
7. Qual a diferença para o garçom de uma gorjeta grande possuir a função de pertinência igual a 0.8 e uma probabilidade de 0.8 ?

Obrigado!