Mecânica Quântica — 7600022

Terceira Lista — provinha no dia 10/3/2017

1. Reproduza o cálculo da soma de dois spins feito em classe na notação formal. Em outras palavras, escreva os operadores na forma

$$\vec{J} = \vec{S}_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{S}_2,$$

em lugar de $\vec{J} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$, e, por exemplo,

$$|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$$

em lugar de $|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle$. Nessa notação encontre as expressões para $|j = 1, m_j = 1\rangle$, $|j = 1, m_j = 0\rangle$, $|j = 1, m_j = -1\rangle$ e $|j = 0, m_j = 0\rangle$.

2. Suponhamos que $\ell = 7$ e $s = 5/2$. Encontre o número de estados que deve resultar da soma $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ somando o número de estados $|j, m_j\rangle$ permitidos. Confira que o número é igual ao encontrado quando se multiplica o número de estados $|\ell, m_\ell\rangle$ pelo número de estados $|s, m_s\rangle$.

3. Efetue a soma $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ para $\ell = 1$ e $s = 1/2$.

4. Encontramos em classe que

$$|j = 1, m = 1\rangle = |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle.$$

Empregue a expressão

$$J^2 = \frac{J_+J_- + J_-J_+}{2} + J_z^2$$

para calcular $J^2|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle$.

5. A partir da expressão

$$|j = 0, m_j = 0\rangle = \frac{|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle}{\sqrt{2}},$$

encontrada em classe, calcule $J^+|j = 0, m_j = 0\rangle$. Você acha razoável o resultado?

6. A partir da expressão

$$|j = 1, m_j = 0\rangle = \frac{|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle}{\sqrt{2}},$$

encontrada em classe, calcule $J^+|j = 1, m_j = 0\rangle$. Você acha razoável o resultado?

7. Mostra-se facilmente que

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{J^2}{2} - \frac{S_1^2 + S_2^2}{2},$$

onde $\vec{J} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$. A partir desse resultado, mostre que $|1, m_j\rangle$ ($m_j = -1, 0, 1$) e $|0, 0\rangle$ são autoestados de $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$, e encontre os autovalores correspondentes.

8. Mostre explicitamente que o lado direito da igualdade na questão 5 é autoestado do operador

$$A = S_+S_- + S_-S_+.$$

9. Parta da igualdade na questão 7 para mostrar que $|j=0, m_j=0\rangle$ é autoestado do operador A na questão 8.

10. O operador

$$\vec{K} = \vec{L} - \vec{S}$$

obedece às regras de comutação do momento angular. Podemos portanto definir os operadores K^2, K_z e $K_\pm$.

(a) Mostre que $|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle$ é autoestado de K_z, mas não é autoestado de K^2.

(b) Mostre que $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$ é autoestado de K_z e de K^2. Quais são os autovalores correspondentes?

(c) Mostre que

$$|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle$$

é autoestado de K_z e de K^2. Quais são os autovalores correspondentes?