PSI3211 – Circuitos Elétricos I

Experiência envolvendo conceitos de impedância e admitância

Edição 2015

I.S./01
VHN/04/05/06
MTMS/07/09/10
MDM/09/10
DC/09

1 – Definições e Fórmulas

1.1 – Impedância e Admitância Complexas

Em corrente contínua, CC, a resistência de um dispositivo linear de dois terminais é definida como a relação entre a tensão sobre o dispositivo e a corrente que o atravessa, de acordo com a lei de Ohm $R = V / I$. Essa quantidade é chamada de resistência CC, denotada como R_{CC}. Em corrente alternada (sinais senoidais), CA, a relação entre tensão e corrente deve ser feita usando fasores e resulta, em geral, um número complexo. O equivalente CA da lei de Ohm na representação cartesiana é $\hat{V}/\hat{I} = Z = R + jX$, sendo que Z é chamada de *impedância* do dispositivo e $\hat{V}$ e $\hat{I}$ são os fasores da tensão e da corrente em seus terminais, respectivamente. A parte real R é o componente resistivo ou dissipativo da impedância (algumas vezes escrito como R_{ca}). A parte imaginária X é o componente reativo da impedância, também chamado de *reatância* e representa a parte de armazenamento de energia da impedância. Ambas quantidades R e X são função da frequência. Em CC, X é igual a zero ou infinito.

A recíproca da resistência em CC é a *condutância* em CC, e a recíproca da impedância é chamada *admitância*, Y. A admitância é também uma grandeza complexa e tem uma parte real chamada de componente condutivo, G, e uma parte imaginária chamada de componente susceptivo, ou *susceptância*, B. Note que G e B não são os recíprocos de R e X, respectivamente, pois:

$$Y = G + jB = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2}. \qquad (1)$$

Como todas as grandezas envolvidas dependem da frequência, um dado valor de qualquer uma delas não terá sua especificação completa a menos que a frequência da medida seja conhecida.

1.2 – Forma Polar

A impedância pode ser dada nas formas cartesiana e polar; as relações entre essas representações são:

$$Z = R + jX = |Z|\,(\cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta) = |Z|\,e^{j\theta}, \tag{2}$$

em que a magnitude da impedância é dada por $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$ e a fase da impedância por $\theta =$ arctan(X,R).

A representação na forma polar será útil para introduzirmos aspectos práticos relativos às definições apresentadas. A uma dada frequência, suponha que um dado dispositivo apresente uma impedância genérica $Z = |Z|e^{j\theta}$. Dessa representação, temos que os fasores da tensão e da corrente aplicadas ao dispositivo obedecem a $\hat{V}/\hat{I} = |Z|e^{j\theta}$. Note que, $\hat{V}$ e $\hat{I}$ são grandezas complexas: $\hat{V} = |\hat{V}|e^{j\alpha}$ e $\hat{I} = |\hat{I}|e^{j\beta}$. Essas igualdades nos dizem, em sua representação fasorial [1] que, para sinais senoidais e a uma determinada frequência f, o sinal de tensão vale $v(t) = |\hat{V}|\cos(2\pi\, f\, t + \alpha)$ e o sinal de corrente vale $i(t) = |\hat{I}|\cos(2\pi\, f\, t + \beta)$. Dessa forma,

$$|Z| = \frac{|\hat{V}|}{|\hat{I}|} \quad \text{e} \quad \theta = \alpha - \beta. \tag{3}$$

Isto é, a magnitude da impedância pode ser obtida pela razão entre os valores da amplitude da tensão e da corrente senoidais sobre o dispositivo, e a fase da impedância é obtida pela medida de defasagem entre os sinais senoidais de tensão e de corrente no dispositivo. O Problema 1 a seguir ilustra o que foi dito.

Problema 1: Determine o valor da impedância do dispositivo cujas formas de onda de tensão e de corrente medidas são dadas pela Figura 1.

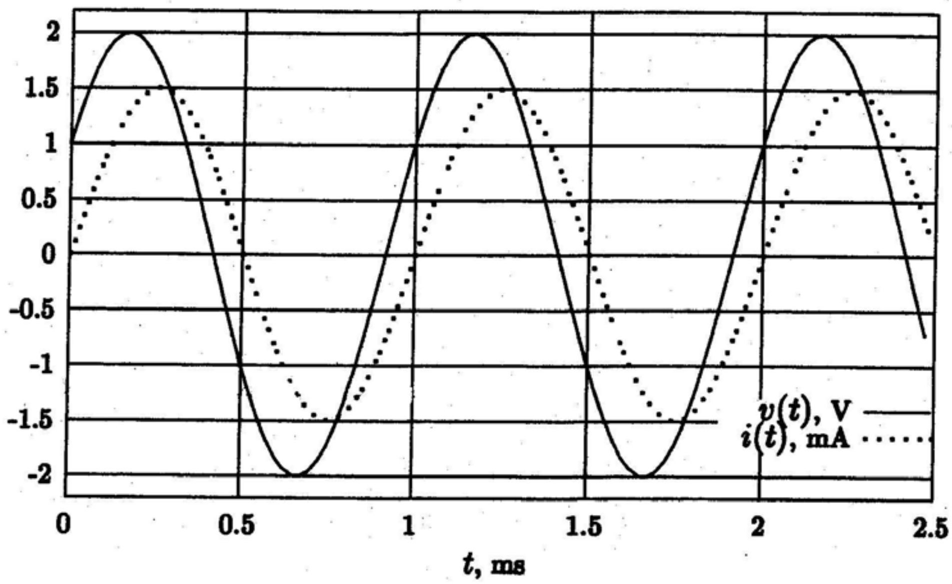

Figura 1 – Tensão e corrente, em função do tempo, em um dispositivo

Analisando a Figura 1, vemos que os sinais têm período de 1 ms, correspondendo a uma frequência f = 1 kHz, a frequência de medida. Temos também que:

$$v(t) = 2\cos(2\pi f t - \pi/3) \Rightarrow \hat{V} = 2\,e^{-j\pi/3}$$

$$i(t) = 0{,}0015\cos(2\pi f t - \pi/2) \Rightarrow \hat{I} = 0{,}0015\,e^{-j\pi/2}$$

Portanto, em 1 kHz,

$$|Z| = \frac{2}{0{,}0015} \cong 1333\,\Omega \quad \text{e} \quad \theta = -\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6}\ \text{rad.}$$

Note que nesse problema o sinal de tensão v(t) cruza o zero antes do sinal de corrente i(t) e portanto, a tensão está adiantada em relação à corrente. Essa informação é importante e nos diz que o dispositivo apresenta características indutivas. Sabemos que um indutor ideal com indutância L possui impedância (reatância) $Z_L = j2\pi f L = 2\pi f L e^{j\,90^o}$.

Caso v(t) estivesse atrasado em relação a i(t) o dispositivo teria características capacitivas. Sabemos também que um capacitor ideal, com capacitância C, apresenta impedância (reatância) $Z_C = (j\,2\pi f C)^{-1} = (2\pi f C)^{-1} e^{-j90^o}$. Quando v(t) está em fase com i(t) o dispositivo é resistivo.

O Problema 1 sugere que com um voltímetro, um amperímetro e um osciloscópio (para medir a defasagem entre os sinais de tensão e de corrente) poderemos determinar a impedância de um dado dispositivo. Existem várias técnicas de medição de impedâncias que prescindem do uso de um osciloscópio, como por exemplo [3, 4, 5]:

- método dos três voltímetros,
- método do wattímetro,
- pontes de impedância (Wheatstone, Maxwell, Hay, Wien, Schering, etc.).

1.3 – Resposta em frequência

Se um circuito linear for alimentado com um sinal senoidal, em regime permanente, sua saída também será um sinal senoidal com a mesma frequência da entrada, mas poderá ter a amplitude e a fase alteradas. O efeito que um circuito tem sobre a amplitude e a fase do sinal senoidal de entrada para cada frequência é denominado *resposta em frequência*. Ela é definida como a razão entre o fasor do sinal senoidal de saída e o fasor do sinal senoidal de entrada em função da frequência ω. Por exemplo, considere o circuito da Figura 2.

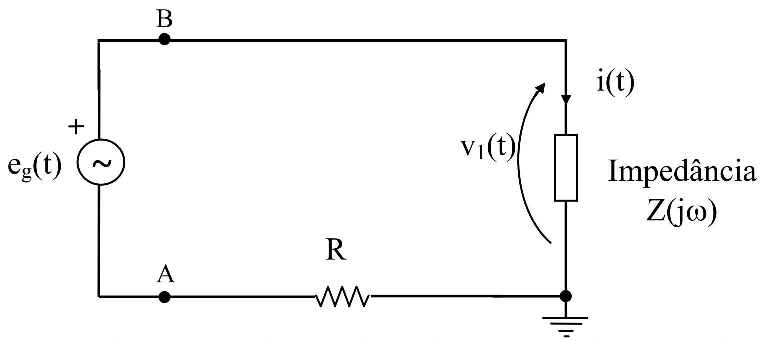

Figura 2 – Uso da variação de uma impedância para alterar sinais.

Se a tensão de entrada $e_g(t)$ for senoidal, a tensão de saída $v_1(t)$ em regime permanente também será senoidal, e seu fasor será dado por

$$\hat{V}_1 = \frac{Z(j\omega)}{R + Z(j\omega)}\hat{E}_g .$$

A resposta em frequência desse circuito será

$$G(j\omega) = \frac{\hat{V}_1}{\hat{E}_g} = \frac{Z(j\omega)}{R + Z(j\omega)}, \tag{4}$$

sendo seu módulo dado por

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{\left|\hat{V}_1\right|}{\left|\hat{E}_g\right|} = \frac{\left|Z(j\omega)\right|}{\left|R + Z(j\omega)\right|}. \tag{5}$$

É importante observar que como a entrada e a saída desse circuito são tensões, o módulo da resposta em frequência é adimensional. Caso a entrada fosse uma corrente e a saída fosse uma tensão, o módulo teria dimensão de impedância (Ω, no Sistema Internacional de Unidades). É comum representar a resposta em frequência de um circuito graficamente, exibindo separadamente os gráficos do módulo e da fase de $G(j\omega)$ em função da frequência.

Note que como $Z(j\omega)$ depende da frequência, tanto a amplitude quanto a fase de $\hat{V}_1$ irão variar se a frequência do sinal de entrada $e_g(t)$ variar, mesmo que o fasor $\hat{E}_g$ permaneça constante. Essa dependência pode ser usada para alterar sinais de maneira controlada.

2 – Parte Prática

Toda a parte prática da experiência será baseada no esquema elétrico da Figura 3 e o procedimento experimental para a determinação do valor da impedância será fundamentado na solução do Problema 1 da página 3. O dispositivo para o qual desejamos determinar o valor da impedância aparece com a denominação "Carga" e poderá ser apenas um resistor ou uma combinação de componentes passivos (resistores, indutores, e/ou capacitores).

A frequência da medida será definida pelo gerador de sinais senoidais, E_{ca} (que possui resistência interna de 50Ω). A função da resistência R_s é de fornecer ao canal 2 do osciloscópio um sinal proporcional e em fase com a corrente elétrica i(t) que atravessa a carga, desde que o canal 2 do osciloscópio esteja invertido, já que $v_2/R_s = -i(t)$ devido à convenção do gerador.

Usaremos nesta experiência um gerador de funções, cuja saída tem normalmente um terminal aterrado através da tomada. Esse gerador será conectado então à rede através de um transformador de isolação que tem relação de espiras 1:1. O primário é ligado à rede de alimentação e o secundário tem os dois terminais flutuando, isto é, nenhum está aterrado. Ao se conectar a tomada do gerador ao secundário do transformador, sua saída estará flutuante. Dessa forma, o sinal de saída do gerador não estará aterrado. O ponto de terra do circuito será definido pelo terminal de terra da ponta de prova do osciloscópio (que poderá ser qualquer ponto de conexão da placa didática, e não necessariamente os pontos "GND" e "T1").

O canal 1 do osciloscópio apresenta a forma de onda da tensão $v_1(t)$ sobre a carga. Portanto, da tela do osciloscópio poderemos obter os valores desejados: valor pico-a-pico da tensão, V_{1pp} , amplitude pico-a-pico da corrente, I_{pp}, (vamos usar valores pico-a-pico, que são mais fáceis de serem medidos no osciloscópio), e a defasagem entre tensão e corrente θ, permitindo o cálculo da impedância na frequência da medida.

Sabendo que um um sinal senoidal de amplitude A tem valor eficaz $A/\sqrt{2}$, o valor fornecido pelo amperímetro "**A**" na Figura 3 corresponde ao valor eficaz da corrente elétrica através da carga, que é dado por $\left|\hat{I}\right|/\sqrt{2}$. Esse valor também pode ser obtido através de manipulação matemática com o valor pico-a-pico do sinal no canal 2 do osciloscópio, V_{2pp}, e o valor de R_s, ou seja,

$$I_{max} = \left|\hat{I}\right| = \frac{V_{2pp}}{2\,R_s} \;\Rightarrow\; \text{Leitura do amperímetro} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{V_{2pp}}{2\sqrt{2}\,R_s}.$$

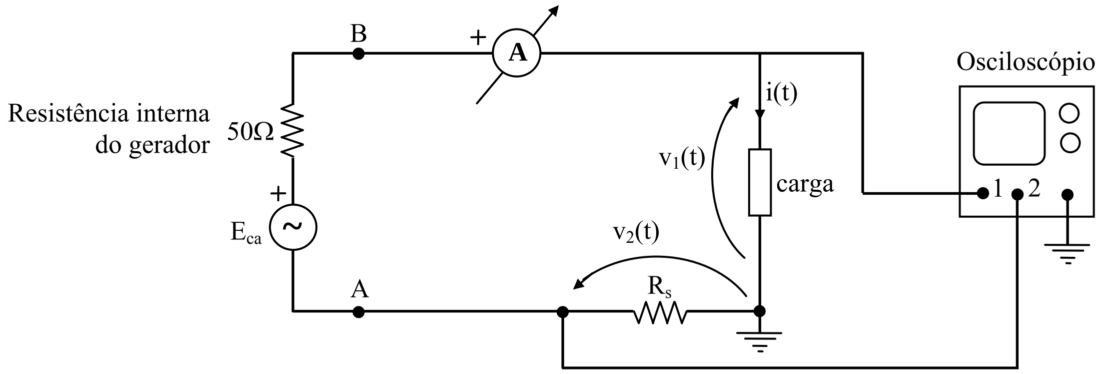

Figura 3 – Esquema elétrico do circuito básico

Nas seções seguintes estudaremos o comportamento do circuito elétrico da Figura 3 para carga resistiva e carga ressonante. A carga ressonante será constituída por um indutor e um capacitor em paralelo. Atente que os valores dos componentes a serem utilizados encontram-se definidos na Seção 3.

Os valores medidos e calculados nessa experiência são

f : frequência do sinal senoidal,

V_{1pp} : tensão pico-a-pico no canal 1,

V_{2pp} : tensão pico-a-pico no canal 2,

A : corrente lida no amperímetro,

$\left|\hat{V}\right| = V_{1max}$: amplitude da tensão na carga,

$\left|\hat{I}\right| = V_{2max}/R_s$: amplitude da corrente na carga,

$|Z| = \left|\hat{V}\right|/\left|\hat{I}\right|$: magnitude da impedância da carga,

θ : defasagem entre sinal de tensão e corrente na carga.

A frequência f pode ser obtida do osciloscópio ou lida no painel do amperímetro. V_{1pp} e V_{2pp} podem ser medidos diretamente no osciloscópio. O parâmetro θ, como visto no Problema 1, é a fase da impedância da carga e corresponde à defasagem entre os sinais de tensão e de corrente na carga. Esse parâmetro pode ser facilmente obtido da representação desses sinais na tela do osciloscópio por

$$\theta = (\pm)\frac{\Delta t}{T} 360^o , \quad \text{em graus} \tag{10}$$

ou

$$\theta = (\pm)\frac{\Delta t}{T} 2\pi , \quad \text{em radianos} \tag{11}$$

sendo que $T = 1/f$ é o período dos sinais em segundos e Δt é o atraso, em segundos, entre os sinais ($0 \leq \Delta t \leq T/2$). Se o sinal de tensão estiver adiantado em relação ao sinal de corrente, a carga será indutiva e $\theta > 0$. Em contrapatida, se o sinal de tensão estiver atrasado em relação ao sinal de corrente, a carga será capacitiva e $\theta < 0$. Na Figura 4, o sinal v(t) está adiantado de $\Delta t = 83{,}3\ \mu s$ em relação ao sinal i(t). Como ambos os sinais têm T = 1 ms, utilizando as expressões (10) e (11) resulta $\theta = +30^o$ ou $\pi/6$ rad.

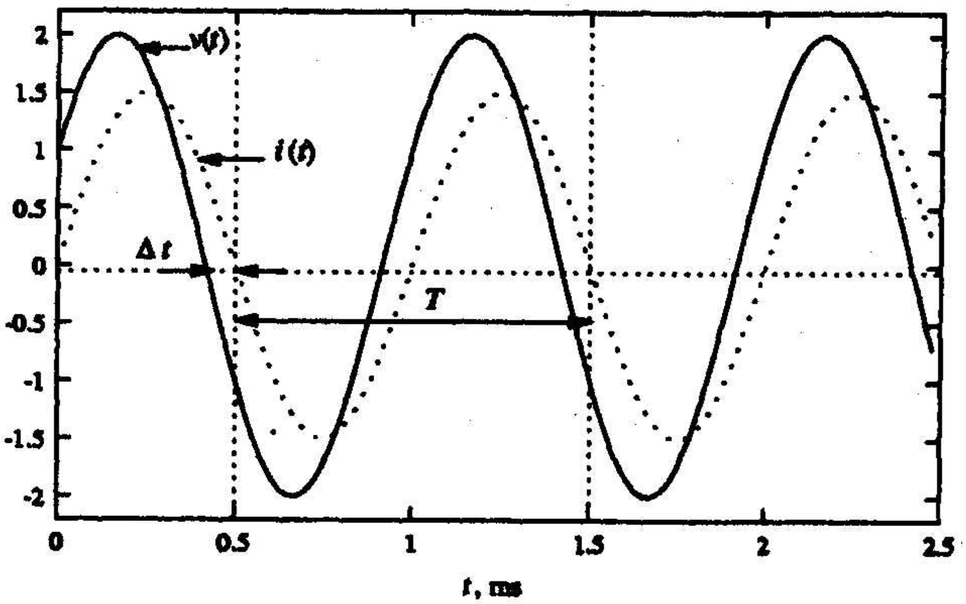

Figura 4 - Diferença Δt entre dois sinais de período T

2.1 – Procedimento para carga resistiva

Antes de montar o circuito da Figura 5, meça com o multímetro o valor da resistência da carga R e da resistência R_{s1}.

Agora, monte o circuito esquematizado na Figura 5 (lembre-se de inverter o canal 2 para fazer corretamente as medidas de fase). Ajuste o gerador de sinais para fornecer entre os nós A e B uma tensão senoidal de 4 V pico-a-pico (com a carga já conectada ao circuito) com frequência f = 1 kHz. Para fazer essa medida, troque momentaneamente o terra do osciloscópio para o ponto A e faça a medida com o canal 1. Não se esqueça de voltar a(s) garra(s) de terra para o ponto indicado na Figura 5. Obtenha os sinais na tela do osciloscópio, os quais deverão estar estáveis. Para diminuir a influência de ruídos, recomenda-se que o recurso de cálculo de médias dos sinais mostrados na tela do osciloscópio seja ativado. Faz-se isso através da tecla "ACQUIRE" e da escolha dos menus "Média" e "Médias = 128". Utilize acoplamento CA. **Nota:** Ao se usar o recurso "AUTOSET " do osciloscópio, o equipamento desabilita a inversão do canal 2.

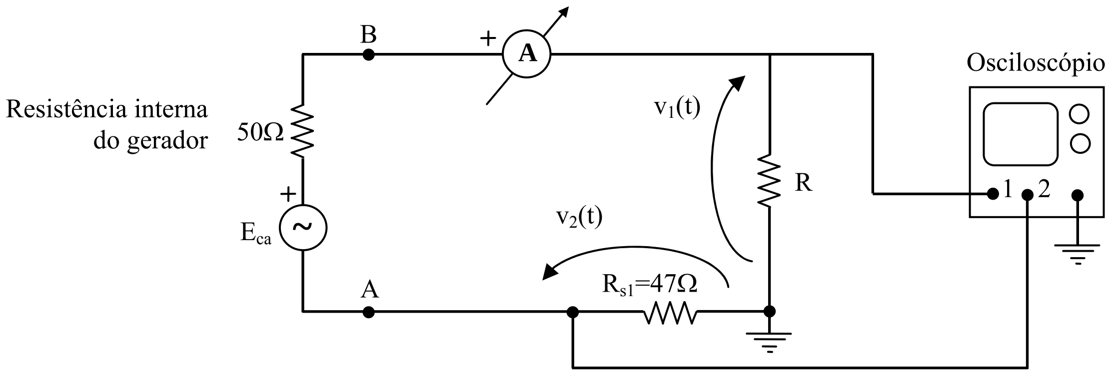

Figura 5 – Circuito com carga resistiva

2.2 – Procedimento para carga ressonante

A carga ressonante será composta pela associação em paralelo de uma bobina e um capacitor. Antes de montar o circuito da Figura 6, meça com o multímetro o valor da resistência R_{s2}, o valor da capacitância C. O indutor tem valor nominal de L = 600 μH e pode ser medido com um *medidor de impedâncias*.

Agora, monte o circuito esquematizado na Figura 6. Ajuste o gerador de sinais para fornecer uma tensão senoidal com aproximadamente 15V pico-a-pico, com frequência $f_0 = (2\pi\sqrt{LC})^{-1}$. Como você já pôde comparar as medidas do amperímetro com as do osciloscópio no item 2.1, não usaremos mais o amperímetro. Use agora um resistor

R_{s2} =10kΩ para medir a corrente. Nesse item, use o canal 2 para controlar o disparo do osciloscópio (botão TRIGGER, opção – à esquerda – Origem: CH2).

Antes de mais nada, meça o valor pico-a-pico V_{BA} da tensão do gerador $V_{BA}(t)$, mudando a posição do terra, como feito no item 2.1. Cuidado para não deixar os terras das pontas de prova em lugares diferentes do circuito (se fizer isto, você vai estar curto-circuitando o trecho do circuito entre as duas garras de terra).

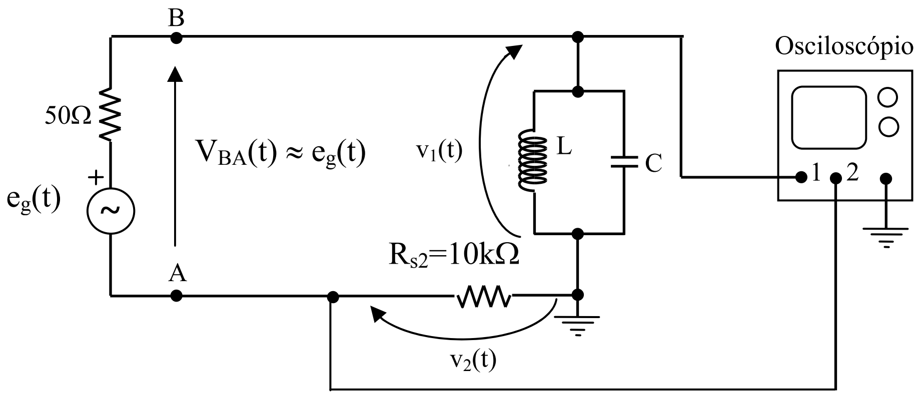

Figura 6 – Circuito para carga ressonante

2.3 - Resposta em frequência

No circuito da Figura 6, considere agora que a tensão fornecida pelo gerador de sinais é a entrada e a tensão $v_1(t)$ é a saída. Como R_{s2} é muito maior que a resistência interna de 50Ω do gerador, a tensão entre os pontos B e A, $V_{BA}(t)$ é aproximadamente igual a $e_g(t)$. Dessa forma, a resposta em frequência do circuito pode ser estimada como

$$G(j\omega) = \frac{\hat{V}_1}{\hat{E}_g} \approx \frac{\hat{V}_1}{\hat{V}_{BA}}, \tag{12}$$

sendo o seu módulo dado por

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{\left|\hat{V}_1\right|}{\left|\hat{E}_g\right|} \approx \frac{\left|\hat{V}_1\right|}{\left|\hat{V}_{BA}\right|}. \tag{13}$$

3 –Lista de Material

- Resistores:
  - R_{s1} = 47 Ω
  - R_{s2} = 10 kΩ
  - R = 47 Ω
- Capacitor: C = 100 nF / 250V, 5%
- Indutor: L = 600 μH
- Osciloscópio: Tektronix TDS220, two channel, digital real-time Oscilloscope, 100 MHz, 1GS/s
- Multímetro: Tektronix TX3 true RMS multimeter
- Gerador de sinais: Tektronix CFG253, 3 MHz
- Placa didática
- Cabo BNC/BNC
- Cabo Banana/ Bergstick
- Cabos de ligação
- Transformador de isolação 1:1
- Medidor RLC

4 – Referências

[1] – L.Q. Orsini e D. Consonni, Curso de Circuitos Elétricos. Editora Edgard Blücher Ltda, Volume 1, 2002.

[2] – L.Q. Orsini e D. Consonni, Curso de Circuitos Elétricos. Editora Edgard Blücher Ltda, Volume 2, 2004.

[3] – Hai Hung Chiang, Electrical and Electronic Instrumentation. John Wiley & Sons, 1984

[4] – Solon de Medeiros Filho, Fundamentos de Medidas Elétricas. Editora Universitária, Universidade Federal de Pernambuco, 1979

[5] – Bernard M. Oliver e John M. Cage, editores, Electronic Measurements and Instrumentation, McGraw-Hill, 1971