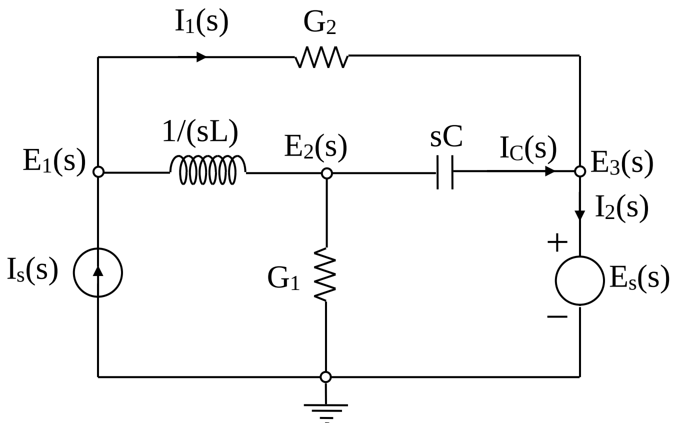
PSI3213 – CIRCUITOS ELÉTRICOS II

Solução dos Exercícios Complementares Correspondentes à Matéria da 1ª Prova

1 – Reescrevendo o circuito no domínio de Laplace, com condições iniciais nulas, temos:



$I_s(s) = 6 / s$

$E_s(s) = 75 / s$

a) <u>Incógnitas:</u> $E_1(s)$ e $E_2(s)$.

<u>1ª LK nó 1:</u>

$$\frac{1}{sL}\left[E_1(s) - E_2(s)\right] + G_2\left[E_1(s) - \frac{75}{s}\right] - \frac{6}{s} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{sL} + G_2\right)E_1(s) - \frac{1}{sL}E_2(s) = \frac{6}{s} + G_2\frac{75}{s}}$$

<u>1ª LK nó 2:</u>

$$\frac{1}{sL}\left[E_2(s) - E_1(s)\right] + sC\left[E_2(s) - \frac{75}{s}\right] + G_1E_2(s) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{sL}E_1(s) + \left(\frac{1}{sL} + sC + G_1\right)E_2(s) = 75\ C}$$

Montando a equação matricial de análise nodal, temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{sL} + G_2 & -\frac{1}{sL} \\ -\frac{1}{sL} & \frac{1}{sL} + sC + G_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{s} + G_2\frac{75}{s} \\ 75\ C \end{bmatrix}$$

Logo, os valores pedidos são:

$$\left|\begin{array}{l} W = -\dfrac{1}{sL} \\ X = \dfrac{1}{sL} + sC + G_1 \\ Y = \dfrac{6}{s} + G_2 \dfrac{75}{s} \\ Z = 75\ C \end{array}\right.$$

b) Sabemos que $R_2 = 1/G_2 = 10\ \Omega$ e

$$E_1(s) = \frac{135\left(s^2 + \dfrac{29}{9}s + 2\right)}{s^3 + 5s^2 + 6s}.$$

Pela lei de Ohm, temos

$$I_1(s) = G_2\left[E_1(s) - \frac{75}{s}\right].$$

Inicialmente, faremos a expansão em frações parciais de $E_1(s)$:

$$E_1(s) = 135\frac{s^2 + \dfrac{29}{9}s + 2}{s^3 + 5s^2 + 6s} = 135\frac{s^2 + \dfrac{29}{9}s + 2}{s(s+2)(s+3)}$$

$$E_1(s) = 135\left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s} + \frac{\left(\frac{2}{9}\right)}{s+2} + \frac{\left(\frac{4}{9}\right)}{s+3}\right]$$

$$E_1(s) = \frac{45}{s} + \frac{30}{s+2} + \frac{60}{s+3}.$$

Substituindo a expansão de $E_1(s)$ na expressão de $I_1(s)$, temos:

$$I_1(s) = G_2\left[E_1(s) - \frac{75}{s}\right] = 0,1\left(\frac{45}{s} + \frac{30}{s+2} + \frac{60}{s+3} - \frac{75}{s}\right) = -\frac{3}{s} + \frac{3}{s+2} + \frac{6}{s+3}.$$

Antitransformando $I_1(s)$, resulta: $\quad i_1(t) = \left(-3 + 3e^{-2t} + 6e^{-3t}\right)H(t) \quad (A, s).$

c) Mantendo as condições do item b), agora sabemos que $C = 0,2$ F e

$$E_2(s) = \frac{75\left(s^2 + 4s + \frac{18}{5}\right)}{s(s+2)(s+3)}.$$

Aplicando a 1ª L.K. no nó 3, temos

$$i_2(t) = i_C(t) + i_1(t) \leftrightarrow I_2(s) = I_C(s) + I_1(s).$$

Já temos $I_1(s)$ do item b) e precisamos de $I_C(s)$, que é dada por

$$I_C(s) = sC\left[E_2(s) - \frac{75}{s}\right] = sCE_2(s) - 75\ C.$$

Inicialmente, faremos a expansão em frações parciais de $sE_2(s)$:

$$E_2(s) = 75\ \frac{s^2 + 4s + \frac{18}{5}}{s(s+2)(s+3)}$$

$$sE_2(s) = 75\frac{s^2 + 4s + \frac{18}{5}}{(s+2)(s+3)} = 75\frac{s^2 + 4s + \frac{18}{5}}{s^2 + 5s + 6} = 75\left[1 - \frac{s + \frac{12}{5}}{(s+2)(s+3)}\right]$$

$$sE_2(s) = 75\left[1 - \frac{\left(\frac{2}{5}\right)}{s+2} - \frac{\left(\frac{3}{5}\right)}{s+3}\right]$$

$$sE_2(s) = 75 - \frac{30}{s+2} - \frac{45}{s+3}.$$

Substituindo a expansão de $sE_2(s)$ na expressão de $I_C(s)$, temos:

$$I_C(s) = sCE_2(s) - 75\ C = 0,2\left(75 - \frac{30}{s+2} - \frac{45}{s+3} - 75\right) = -\frac{6}{s+2} - \frac{9}{s+3}.$$

Antitransformando $I_C(s)$, resulta:

$$i_C(t) = \left(-6e^{-2t} - 9e^{-3t}\right)H(t) \quad (A, s).$$

Finalmente,

$$i_2(t) = i_C(t) + i_1(t) = \left(-6e^{-2t} - 9e^{-3t}\right)H(t) + \left(-3 + 3e^{-2t} + 6e^{-3t}\right)H(t)$$
$$\Rightarrow i_2(t) = \left(-3 \ - 3e^{-2t} - 3e^{-3t}\right)H(t) \quad \text{(A, s).}$$

2 – a) Para determinar os valores dos componentes, deve-se calcular a função de rede $G(s) = V(s)/E_g(s)\big|_{\text{c.i.n.}}$ em função de L, R_1, R_2, C e μ e compará-la com a expressão fornecida. Trabalhando no domínio da transformada de Laplace com impedâncias capacitivas e indutivas e utilizando divisão de tensão, obtém-se a seguinte expressão para a transformada de Laplace da tensão do capacitor

$$V_C(s) = \frac{E_g(s)\dfrac{1}{sC}}{R_1 + \dfrac{1}{sC}} = \frac{\dfrac{1}{R_1C}}{s + \dfrac{1}{R_1C}} E_g(s)\,.$$

Aplicando novamente divisão de tensão, obtém-se

$$V(s) = \frac{\mu V_C(s) R_2}{sL + R_2} = \frac{\mu V_C(s)\dfrac{R_2}{L}}{s + \dfrac{R_2}{L}} = \frac{\mu\dfrac{R_2}{LR_1C}}{\left(s + \dfrac{R_2}{L}\right)\left(s + \dfrac{1}{R_1C}\right)} E_g(s)\,.$$

A função de rede $G(s)$ é dada por

$$G(s) = \frac{V(s)}{E_g(s)}\bigg|_{\text{c.i.n.}} = \frac{\mu\dfrac{R_2}{LR_1C}}{\left(s + \dfrac{R_2}{L}\right)\left(s + \dfrac{1}{R_1C}\right)}\,.$$

Comparando com a função de rede fornecida, assumindo $R_1 = R_2 = 50\ \Omega$ e $\mu = 1$ chega-se a:

$$\frac{R_2}{L} = 10^3 \Rightarrow L = 50\times10^{-3}\,\text{H} = 50\ \text{mH}$$
$$\frac{1}{R_1C} = 10^3 \Rightarrow C = \frac{1}{50\times10^3}\,\text{F} = 20\ \mu\text{F}$$

b) A transformada de Laplace da excitação é dada por

$$E_g(s) = \frac{1}{s}\,.$$

Assim, para obter a resposta forçada, basta calcular a antitransformada de

$$V(s)=E_g(s)G(s)=\frac{10^6}{s\left(s+10^3\right)^2}.$$

Fazendo decomposição em frações parciais, obtém-se

$$V(s)=\frac{A}{s}+\frac{B_1}{s+1000}+\frac{B_2}{\left(s+1000\right)^2}.$$

Calculando os resíduos, obtemos

$$A=V(s)s\Big|_{s=0}=1$$

$$B_2=V(s)(s+1000)^2\Big|_{s=-1000}=-1000$$

$$\frac{10^6}{s\left(s+10^3\right)^2}=\frac{\left(s+1000\right)^2+B_1(s+1000)s-1000s}{s\left(s+10^3\right)^2}.$$

Utilizando a última equação, chega-se a
$B_1=-1$.

Dessa forma, temos

$$V(s)=\frac{1}{s}+\frac{-1}{s+1000}+\frac{-1000}{\left(s+1000\right)^2},$$

cuja antitransformada é igual a

$$v(t)=1-e^{-1000t}-1000\,t\,e^{-1000t},\ t\geq 0$$

ou

$$v(t)=1-(1+1000\,t)e^{-1000t},\ t\geq 0.$$

c) Em RPS temos a resposta em frequência

$$G(j\omega)=\frac{10^6}{\left(j\omega+10^3\right)^2}.$$

Note que o módulo do ganho da resposta em frequência desse filtro é igual a 1 em $\omega=0$.
O fasor da resposta permanente pode ser calculado como

$$\hat{V} = \hat{E}_g G(j644) = 5e^{j45^o} \frac{10^6}{\left(j644 + 10^3\right)^2} = 3{,}53e^{-j20{,}56^o}.$$

Portanto, a resposta permanente vale

$$v(t) = 3{,}5342\cos(644t - 20{,}56^o) \quad (V,s).$$

Como $5/\sqrt{2} \approx 3{,}5342$, a resposta permanente tem um ganho aproximadamente igual a $1/\sqrt{2}$. Dessa forma, a frequência angular $\omega = 644$ rad/s é a frequência de corte do filtro em questão.

3 – a) A partir da função de rede, obtém-se:

$$s^2V(s) + 5sV(s) + 4V(s) = 4E_g(s),$$

o que corresponde à seguinte equação diferencial

$$\ddot{v}(t) + 5\dot{v}(t) + 4v(t) = 4e_g(t).$$

b) Aplicando a transformada de Laplace com condições iniciais não-nulas na equação diferencial e assumindo que $e_g(t) = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} & s^2V(s) - s\,v(0_-) - \dot{v}(0_-) + 5\left[sV(s) - v(0_-)\right] + 4V(s) = 0 \\ & V_{iz}(s)\left(s^2 + 5s + 4\right) = \left(s + 5\right)v(0_-) + \dot{v}(0_-) \\ & V_{iz}(s) = \frac{2s+13}{s^2 + 5s + 4}. \end{aligned}$$

c) A transformada de Laplace da excitação é dada por

$$E_g(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Assim, para obter a resposta forçada, basta calcular a antitransformada de

$$V(s) = E_g(s)G(s) = \frac{4}{(s+1)\left(s^2 + 5s + 4\right)} = \frac{4}{(s+4)(s+1)^2}.$$

Fazendo decomposição em frações parciais, obtém-se

$$V(s) = \frac{A}{s+4} + \frac{B_1}{s+1} + \frac{B_2}{(s+1)^2}.$$

Calculando os resíduos, obtemos

$$A = V(s)\left(s+4\right)\Big|_{s=-4} = \frac{4}{9} = 0,4444$$

$$B_2 = V(s)(s+1)^2\Big|_{s=-1} = \frac{4}{3} = 1,333$$

$$\frac{4}{\left(s+1\right)^2\left(s+4\right)} = \frac{\frac{4}{9}\left(s+1\right)^2 + B_1\left(s+1\right)\left(s+4\right) + \frac{4}{3}\left(s+4\right)}{\left(s+1\right)^2\left(s+4\right)} = \frac{\left(\frac{4}{9}+B_1\right)s^2 + \left(\frac{20}{9}+5B_1\right)s + \left(\frac{52}{9}+4B_1\right)}{\left(s+1\right)^2\left(s+4\right)}.$$

Utilizando a última equação, chega-se a

$$B_1 = -\frac{4}{9} = -0,4444.$$

Dessa forma, temos

$$V(s) = \frac{4/9}{s+4} + \frac{-4/9}{s+1} + \frac{4/3}{\left(s+1\right)^2} = \frac{0,4444}{s+4} + \frac{-0,4444}{s+1} + \frac{1,3333}{\left(s+1\right)^2},$$

cuja antitransformada é igual a

$$v(t) = \frac{4}{9}e^{-4t} - \frac{4}{9}e^{-t} + \frac{4}{3}\ t\ e^{-t},\ t \geq 0$$

ou

$$v(t) = 0,4444e^{-4t} - 0,4444e^{-t} + 1,3333\ t\ e^{-t},\ t \geq 0$$

d) O ganho na frequência $\omega = 2$ vale

$$G(j2) = \frac{4}{(j2)^2 + 5(j2) + 4} = -j\ 0,4.$$

O fasor da resposta permanente pode ser calculado como

$$\hat{V} = \hat{E}_g G(j2) = 4e^{j30^o}(-j\ 0,4) = 1,6e^{-j60^o}.$$

Portanto, a resposta permanente vale

$$v(t) = 1,6\cos(2t - 60^o) \quad (V,s).$$

4 – a) A transformada de Laplace da excitação é dada por

$$E_g(s) = \frac{1}{(s+1)^2}\ .$$

A transformada de Laplace da resposta forçada é igual a

$$I(s) = E_g(s)\ G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}\frac{s+1}{s^2+2s+3} = \frac{1}{(s+1)\left(s+1-j\sqrt{2}\right)\left(s+1+j\sqrt{2}\right)}.$$

Para obter a expressão de $i(t)$ para $t \geq 0$, basta calcular a antitransformada de $I(s)$.

Fazendo expansão em frações parciais, obtemos

$$I(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+1-j\sqrt{2}} + \frac{A_2^*}{s+1+j\sqrt{2}}.$$

Calculando os resíduos, obtemos

$$A_1 = I(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = 0,5$$

$$A_2 = I(s)\left(s+1-j\sqrt{2}\right)\Big|_{s=-1+j\sqrt{2}} = -0,25$$

$$A_2^* = -0,25$$

Assim

$$I(s) = \frac{0,5}{s+1} + \frac{-0,25}{s+1-j\sqrt{2}} + \frac{-0,25}{s+1+j\sqrt{2}}.$$

Antitransformando, chega-se a

$$i(t) = 0,5e^{-t}\left[1+\cos\left(\sqrt{2}\ t\ +\ 180^{o}\right)\right]H(t), \qquad \text{(A,s).}$$

b) Em RPS temos a resposta em frequência

$$G(j\omega) = \frac{j\omega+1}{(j\omega)^2+2j\omega+3}.$$

O fasor da resposta permanente pode ser calculado como

$$\hat{I} = \hat{E}_g G(j100) = 100e^{j30^o}\ \frac{j100+1}{(j100)^2+j200+3} = e^{-59,4^o}.$$

Portanto, a resposta permanente vale

$$i(t)=\cos(100t-59,4^o)\quad (A,s).$$

c) Da função de rede, obtém-se a equação diferencial que descreve o circuito, ou seja,

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+2\frac{di(t)}{dt}+3i(t)=\frac{de_g(t)}{dt}+e_g(t).$$

Aplicando a transformada de Laplace com $e_g(t)=0$, obtemos

$$s^2I(s)-si(0_-)-\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0_-}+2sI(s)-2i(0_-)+3I(s)=0$$

$$I(s)=\frac{i(0_-)\ s+\left[2i(0_-)+\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0_-}\right]}{s^2+2s+3}$$

Para continuar, é necessário calcular o valor de $\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0_-}$

Aplicando a 2ª LK em $t=0_-$, obtemos

$$R_2i(0_-)+L\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0_-}+v(0_-)=0$$

$$\Rightarrow \left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0_-}=-v(0_-)-i(0_-)=-(-4)-1=3\ A/s$$

Portanto,

$$I(s)=\frac{s+5}{s^2+2s+3}=\frac{A_1}{s+1-j\sqrt{2}}+\frac{A_2}{s+1+j\sqrt{2}}$$

$$A_1=1,5e^{-j70,53^o}\quad e\quad A_2=1,5e^{j70,53^o}.$$

Assim, $i(t)=3e^{-t}\cos(\sqrt{2}t-70,53^o)$, (A,s).

Testes

1 – A transformada de Laplace $F(s)$ de $f(t) = t\,e^{-a\,t}\,\text{sen}\,(\,\omega\,t\,)$ é igual a:

a) $\dfrac{2\,\omega\,(\,s+a\,)}{\left[\,(\,s+a\,)^2 + \omega^2\,\right]^2}$

b) $\dfrac{s+a}{s\left[\,(\,s+a\,)^2 + \omega^2\,\right]} + \dfrac{1}{s}$

c) $\dfrac{2\,\omega\,(\,s+a\,)^2}{\left[\,(\,s+a\,)^2 + \omega^2\,\right]^2}$

d) $\dfrac{e^{-\,as}\,\omega}{\left[\,s^2 + \omega^2\,\right]^2}$

e) n.d.a.

Resolução:

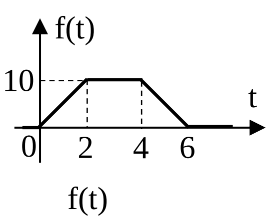
Devemos calcular a transformada de Laplace de $f(t) = te^{-a\,t}\,\text{sen}(\omega t)$. Definindo $g(t) = e^{-a\,t}\,\text{sen}(\omega t)$ e usando a propriedade da translação no campo complexo, obtém-se

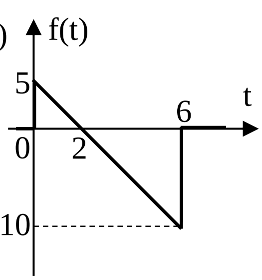
$$G(s) = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}\,.$$

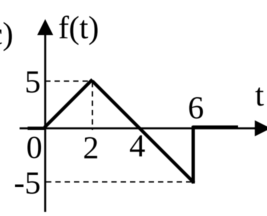
Como $f(t) = tg(t)$, usando a propriedade da derivada da transformada em relação à variável complexa, chega-se a

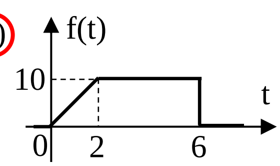
$$F(s) = -\frac{dG(s)}{ds} = \frac{2\omega(s+a)}{\left[(s+a)^2 + \omega^2\right]^2}\,.$$

2 – A função $f(t)$ tem transformada de Laplace dada por $F(s) = \dfrac{5}{s^2} - \dfrac{5e^{-2s}}{s^2} - \dfrac{10e^{-6s}}{s}$. Assinale a alternativa em que a função f(t) está esquematizada.

a)


b)


c)


d)


e) n.d.a.

Resolução:

A transformada de Laplace é dada por

$$F(s) = \frac{5}{s^2} - 5\frac{1}{s^2}e^{-2s} - 10e^{-6s}\frac{1}{s}.$$

Utilizando a propriedade de deslocamento no tempo (translação no campo real) e a propriedade da derivada da transformada em relação à variável complexa, obtêm-se os seguintes pares de transformadas.

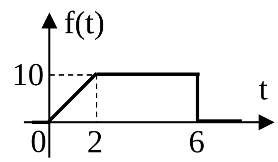
$$5tH(t) \leftrightarrow \frac{5}{s^2}$$

$$-5(t-2)H(t-2) \leftrightarrow -5\frac{1}{s^2}e^{-2s}$$

$$-10H(t-6) \leftrightarrow -10\frac{1}{s}e^{-6s}.$$

Assim, a função f(t) e seu gráfico são

$$f(t) = 5t\big[H(t) - H(t-2)\big] + 10\big[H(t-2) - H(t-6)\big].$$



3 – Qual é a expressão de $\mathcal{L}\,[\,f(t)\,]$ com $f(t) = \begin{cases} \cos(t-\theta) & t > \theta \\ 0 & t < \theta \end{cases}$?

a) $e^{-\theta s}/(s^2+1)$

b) $se^{-\theta s}/(s^2+1)$

c) $(s\cos\theta - s\,\mathrm{sen}\,\theta)/(s^2+1)$

d) $(s^2-1)/(s^2+1)$

e) n.d.a.

Resolução:

Diretamente do teorema do deslocamento no tempo:

$$\cos t \;\leftrightarrow\; \frac{s}{s^2+1} \;\Rightarrow\; f(t) = \begin{cases} \cos(t-\theta) & t > \theta \\ 0 \quad t < \theta \end{cases} \;\leftrightarrow\; \frac{e^{-\theta s}.\,s}{s^2+1}$$

4 – A transformada de Laplace Y(s) da solução y(t) da equação diferencial

$$\ddot{y}(t) + y(t) = t\,,$$

com $y(0_-) = 1$ e $\dot{y}(0_-) = -2$ vale:

a) $\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$

b) $\dfrac{1}{s^2(s^2+1)} + \dfrac{s-2}{s^2+1}$

c) $\dfrac{s-2}{s+1}$

d) $\dfrac{1}{s^2} + s - 2$

e) n.d.a.

Resolução:

$$y'' + y = t \;\Rightarrow\; s^2\,Y(s) - s\,\underset{1}{y(\cancel{0_-})} - \underset{-2}{\dot{y}(\cancel{0_-})} + Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow (s^2+1)\,Y(s) = \frac{1}{s^2} + s - 2 \;\Rightarrow\; Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1}$$

5 – A transformada de Laplace de $t\cos t$ vale :

a) $(s+1)/(s^2+1)$

b) $(s-1)/(s+1)^2$

c) $(s^2-1)/(s^2+1)^2$

d) $(s^2-1)/(s^2+1)$

e) n.d.a.

Resolução:

$$\cos t \;\leftrightarrow\; \frac{s}{s^2+1}$$

$$t\cos t \;\leftrightarrow\; -\frac{d}{ds}\,\frac{s}{s^2+1} = -\frac{(s^2+1).1 - s(2s)}{(s^2+1)^2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

6 – A antitransformada de Laplace de $\dfrac{5s^2+8s-1}{(s+3)(s^2+1)}$ é:

a) $2\,e^{-3t} + 3\cos t - \operatorname{sen} t$

b) $3\,e^{-2t} + 3\operatorname{sen} t - \cos t$

c) $2\,e^{-3t}\cos(t - 45^o)$

d) $3\,e^{-2t}\operatorname{sen}(t + 45^o)$

e) n.d.a.

Resolução: Expansão em frações parciais:

$$\frac{5s^2+8s-1}{(s+3)(s^2+1)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{2}{s+3} + \frac{3s-1}{s^2+1}.$$

Antitransformando, temos:

$$2e^{-3t} + 3\cos(t) - \text{sen}(t), \quad t \geq 0.$$

7 – Dada a função $f(t) = \cos(5t)\,H(t)$ e sendo $g(t) = \dfrac{d\,f(t)}{dt}$, a transformada de Laplace de $g(t)$ é:

a) $s/(s^2 + 25)$
b) $-5/(s^2 + 25)$
c) $s^2/(s^2 + 25)$
d) $-25/(s^2 + 25)$
e) n.d.a.

Resolução: Pela propriedade da derivada:

$$G(s) = sF(s) - f(0\_) = s\,\frac{s}{s^2+25} - 0 = \frac{s^2}{s^2+25}.$$

8 – Determine a transformada de Laplace de f(t), dada na Figura 3.

Dica: $\displaystyle\int e^{\alpha t}.\text{sen}\,\beta t\,dt = \frac{e^{\alpha t}(\alpha\,\text{sen}\,\beta t - \beta\cos\beta t)}{\alpha^2+\beta^2}$

a) $\dfrac{1}{s^2+1}$

b) $\dfrac{e^{-s}}{s^2+1}$

c) $\dfrac{1}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}$

d) $\dfrac{1+e^{+\pi s}}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}$

e) n.d.a.

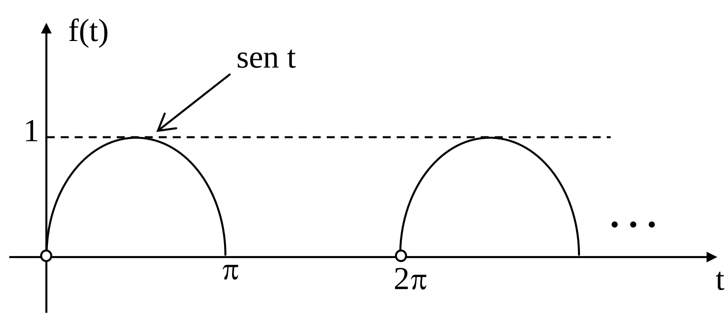


Figura 11

Resolução:

$$F(t) \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_{0_-}^{T} e^{-st} f(t)dt \quad \text{ou} \quad F(t) \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_{0_-}^{\pi} e^{-st} \operatorname{sen} t \, dt =$$

$$\frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \left[\frac{e^{-st}(-s \operatorname{sen} t - \cos t)}{s^2+1} \right]\Bigg|_{0_-}^{\pi} = \frac{1+e^{-s\pi}}{(1-e^{-2\pi s})(s^2+1)} =$$

$$\frac{\cancel{1+e^{-\pi s}}}{\cancel{(1+e^{-\pi s})}(1-e^{-\pi s})(s^2+1)} = \frac{1}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}$$

9 – A função de rede entre a corrente em um gerador $i_g(t)$ e uma tensão $v(t)$ é:

$$G(s) = \frac{s}{(s+1/2)(s+3)}.$$

Sabendo-se que em um teste com condições iniciais nulas mediu-se

$$v(t) = 4\,e^{-½ t} - 4\,e^{-3t}, \quad t \geq 0,$$

pode-se dizer que $i_g(t)$ vale :

a) $4\,(e^{-½ t} - e^{-3t})\,H(t)$
b) $10\,\delta(t)$
c) $10\,H(t)$

d) $(2{,}24\,e^{-½ t} - 0{,}8\,t\,e^{-½ t} - 2{,}24\,e^{-3t} - 4{,}8\,t\,e^{-3t})\,H(t)$
e) n.d.a.

<u>Resolução</u>:

$$V(s) = \frac{4}{s+\frac{1}{2}} - \frac{4}{s+3} = \frac{10}{(s+1/2)(s+3)} \quad \rightarrow \quad \left.\frac{V(s)}{I_g(s)}\right|_{cin} = \frac{s}{(s+1/2)(s+3)}$$

$$\Rightarrow \quad I_g(s) = \frac{V(s)}{G(s)} = \frac{10}{s}$$

10 – Supondo $i_g(t) = 2 \operatorname{sen}(3t)\,H(t)$ no teste 10, pode-se dizer que $\lim_{t \to 0_+} v(t)$ vale:

a) 0
b) Impossível de calcular, pois o Teorema do Valor Inicial não pode ser aplicado.
c) 4/9
d) ∞
e) n.d.a.

Resolução: $I_g(s) = \dfrac{2.3}{s^2+9} \rightarrow V(s) = \dfrac{s}{(s+1/2)(s+3)} \cdot \underbrace{\dfrac{6}{s^2+9}}_{\text{par de polos complexos conjugados}}$

grau (num) < grau (den)

$\rightarrow$ vale o teorema

$$\lim_{t\to 0_+} v(t) = \lim_{s\to\infty} s.V(s) = 0$$

11 – O fasor da tensão $\hat{V}$ na saída de um circuito vale $\hat{V} = 5\sqrt{2}\ \underline{/-45^o}$, quando o fasor de entrada é $\hat{E}_g = 2\ \underline{/0^o}$. Sabe-se também que $\left.\dfrac{V(s)}{E_g(s)}\right|_{cin} = \dfrac{A}{s+1}$, $A \in \mathbb{R}$.

Pode-se dizer que a frequência do gerador ω e A valem respectivamente:

a) 1 Hz e $5\sqrt{2}$
b) 1 rad/s e 5
c) 0 e $5\sqrt{2}$
d) 1 Hz e $2{,}5\sqrt{2}\ \underline{/-45^o}$
e) n.d.a.

Resolução: Pelo teorema, vale

$$\frac{\hat{V}}{\hat{E}_g} = \frac{5\sqrt{2}\ \underline{/-45^o}}{2} = \frac{A}{j\omega+1}$$

Para a fase ser -45^o, é necessário que **ω = 1 rad/s**

$$\frac{A}{1+j} = \frac{A}{\sqrt{2}\ \underline{/45^o}} = \frac{A}{\sqrt{2}}\ \underline{/-45^o}$$

$$\frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \mathbf{A = 5}$$

12 – Seja $F(s) = \dfrac{4s}{(s+2)^2}$. O limite de $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, quando $t \rightarrow 0_+$ vale :

a) 4
b) 0
c) -1
d) Não existe.
e) n.d.a.

Resolução: F(s) é estritamente própria. Logo, aplicando o Teorema do Valor Inicial, temos

$$f(0_+) = \lim_{s\to+\infty}[\ s\,F(s)\ ] = \lim_{s\to+\infty}\left[\frac{4s^2}{(s+2)^2}\right] = 4.$$

13 – Considere a função de transferência $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{s-1}$. A resposta y(t) à entrada u(t) = cos t (em condições iniciais nulas) vale aproximadamente :

a) 0,7 cos (t – 135º)
b) 0,7 cos (t + 45º)
c) 0,7 cos (t – 135º) + $\dfrac{1}{2}$ e^t
d) Não é possível determinar.
e) n.d.a.

Resolução: u(t) = cos t $\leftrightarrow$ U(s) = $\dfrac{s}{s^2+1}$.

Logo, $Y(s) = \dfrac{U(s)}{s-1} = \dfrac{s}{(s-1)(s^2+1)} = \dfrac{s}{(s-1)(s+j)(s-j)}$.

Expandindo em frações parciais, temos

$$Y(s) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{s-1} + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\measuredangle -135^o\right)}{s-j} + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\measuredangle 135^o\right)}{s+j}.$$

Antitransformando, $y(t) = \dfrac{1}{2}e^t + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(t - 135^o)$.

Para os **testes 14 e 15**, a função de rede que relaciona a tensão de saída $v(t)$ e a corrente de entrada $i_g(t)$ de um circuito de segunda ordem é dada por

$$F(s) = \left.\frac{V(s)}{I_g(s)}\right|_{c.i.n.} = \frac{2s+5}{s^2+4s+5}.$$

14 – Assumindo que a corrente de entrada seja $i_g(t) = 10\cos(2t+30^o)$, (A,s), a expressão da resposta permanente $v(t)$ é dada aproximadamente por:

a) $2\cos(2t+32^o)$
b) $\sqrt{2}\cos(2t+45^o)$
c) $8\cos(2t-14^o)$
d) $5\cos(2t+52^o)$
e) O circuito não atinge o regime permanente senoidal pois não é assintoticamente estável.

Resolução:

Para obter a resposta permanente $v(t)$ basta calcular

$$\hat{V} = F(j2)\hat{I}_g \Rightarrow \hat{V} = \frac{2(j2)+5}{(j2)^2+4(j2)+5}10e^{j30^o} = 7,9421e^{-j14,22^o}$$

$$v(t) = 7,9421\cos(2t - 14,22^o), \quad (V, s)$$

Note que o circuito é assintoticamente estável já que suas duas FCPs têm parte real negativa.

15 – Sabendo-se que a transformada de Laplace da **resposta livre** da tensão de saída v(t), no sistema internacional de unidades é dada por

$$V_{iz}(s) = \frac{5s-22}{s^2+4s+5},$$

as condições iniciais $v(0\_)$ e $\dot{v}(0\_) = \left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=0\_}$ (em V e V/s) valem respectivamente:

a) 5 e -22
b) $-0,4$ e 54
c) -2 e -109
d) 5 e -42
e) n.d.a.

<u>Resolução</u>:

Da função de rede, obtém-se

$$s^2V(s) + 4sV(s) + 5V(s) = 2sI_g(s) + 5I_g(s).$$

Assim a equação diferencial do circuito, considerando excitação nula é dada por

$$\ddot{v}(t) + 4\dot{v}(t) + 5v(t) = 0.$$

Calculando a transforma de Laplace com condições iniciais não nulas, chega-se a:

$$s^2V(s) - sv(0\_) - \dot{v}(0\_) + 4sV(s) - 4v(0\_) + 5V(s) = 0$$

$$V_{iz}(s) = \frac{(s+4)v(0\_) + \dot{v}(0\_)}{s^2+4s+5} = \frac{v(0\_)s + \left(4v(0\_) + \dot{v}(0\_)\right)}{s^2+4s+5}.$$

Comparando com a expressão fornecida, chega-se a

$$v(0\_) = 5V$$

$$4v(0\_) + \dot{v}(0\_) = -22$$

$$\dot{v}(0\_) = -22 - 20 = -42 \text{ V/s}$$