Lista 4. O caráter ondulatório das partículas e o princípio da incerteza.

Estas questões e estes problemas foram retirados do Capítulo 3 do Eisberg. Alguns deles foram reescritos.

Questões

1. Q3.2 O comprimento de onda de de Broglie se aplica apenas a "partículas elementares", como um elétron, ou se aplica também a sistemas materiais com estrutura interna? Dê exemplos.

2. Q3.4 O comprimento de onda de de Broglie pode ser menor do que uma dimensão linear da partícula? Pode ser maior? Há necessariamente alguma relação entre essas grandezas?

3. Q3.9 A fórmula de Bragg deve ser alterada para elétrons a fim de explicar a refração de ondas de elétrons na superfície cristalina?

4. Q3.11 Pode-se fazer estudos cristalográficos com prótons? E com nêutrons? *Não deixe de calcular que energia precisa ter um próton ou nêutron que possa ser usado nesse tipo de estudo, por que isso é essencial para fundamentar e entender sua resposta.*

5. Q3.14 O comprimento de onda de de Broglie associado a uma partícula depende do movimento do sistema de referência do observador? Qual é o efeito disso sobre a dualidade onda partícula?

6. Q3.18 Use o princípio da incerteza de Heisenberg para justificar que "a menor energia de um oscilador não pode se nula".

7. Q3.22 Jogos de azar contêm eventos que são regidos pela estatística. Esses jogos violam a determinação estrita dos eventos individuais? Violam a relação causa-efeito?

8. Q3.26 Os nossos conceitos são limitados em princípio pelas nossas experiências diárias ou isto é apenas o nosso ponto de partida conceitual? Como se relaciona essa questão com uma resolução da dualidade onda–partícula?

Problemas:

São muitos, mas a conta é basicamente a mesma em todos os casos. O objetivo é fixar as ordens de grandeza características dos atores e cenários dos fenômenos envolvidos, que compõem o mundo ao qual se aplica a Mecânica Quântica. Calcule os resultados numéricos com dois algarismos significativos apenas.

1. P3.2 O comprimento de onda da emissão espectral amarela do sódio é 5890 Å. Determine:

   a) a energia cinética de um elétron com o mesmo comprimento de onda (de de Broglie).

2. P3.3 Considere um elétron e um fóton com o mesmo comprimento de onda de 2,0 Å. Determine:

a) seus momentos.
b) suas energias totais (relativísticas).
c) suas energias cinéticas.

3. P3.4 Um nêutron térmico tem uma energia cinética (3/2)kT, em que T é a temperatura ambiente na escala termodinâmica, 300 K. Estes nêutrons estão em equilíbrio térmico com o ambiente. Determine, para esse nêutron:

a) a energia cinética em unidades de eV.
b) o comprimento de onda de de Broglie.

4. P3.5 Considere uma partícula de massa de repouso m_0 e carga e que é acelerada à velocidade v por um potencial acelerador V, medido em relação ao ponto onde a partícula estava em repouso.

Mostre que o comprimento de onda de de Broglie

a) vale $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0\, e\, V}}\left(1 + \frac{e\, V}{2m_0\, c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ mesmo que $v \sim c$.
b) tende a $\frac{h}{m_0 v}$ no limite não relativístico.

A fórmula do item a não é a mais compacta para λ;
ela foi preparada para ajudar na solução do item b.

5. P3.6 Determine o valor da energia cinética de uma partícula em que a expressão não relativística do comprimento de onda de de Broglie $\frac{h}{m_0 v}$ estará errada por 1% para

a) um elétron.
b) um nêutron.

Na expressão do item a) do problema anterior, interprete $e\, V$ como a energia cinética da partícula e aplique esse resultado.

6. P3.7 O acelerador de elétrons de 50 GeV da Universidade de Stanford fornece um feixe de elétrons com comprimento de onda muito pequeno.

a) Mostre que, quando a energia total E é tal que $E \gg mc^2$, em que m é a massa de repouso da partícula, a relação entre E e a quantidade de movimento linear p é muito bem aproximada por $E = pc$, como para os fótons.
b) Determine o comprimento de onda dos elétrons acelerados a 50 GeV.
c) Compare esse comprimento de onda com o tamanho de um *núcleo* de massa intermediária e discuta sua adequação para investigação dos detalhes da estrutura nuclear por meio de experiências de espalhamento.

7. P3.8 Considere elétrons com energia cinética menor que 5% da energia de repouso de e aproxime a energia total do elétron por $E = \frac{p^2}{2m_e} + m_e c^2$. Para essa faixa de energia, faça um gráfico do comprimento de onda de de Broglie, em função da energia cinética, para

a) elétrons.
b) fótons.

8. P3.11 O espaçamento planar principal em um cristal de cloreto de potássio é 3,14 Å. Determine o ângulo de reflexão de Bragg de primeira ordem por esses planos de

a) elétrons com 40 keV de energia cinética
b) fótons com 40 keV.

9. P3.13 Determine a voltagem aceleradora dos elétrons necessária para que um microscópio eletrônico obtenha a mesma resolução de um microscópio que usasse raios γ de 0,2 MeV.

10 P3.14 A resolução máxima atingida por um microscópio é limitada apenas pelo comprimento de onda usado; em outras palavras, o menor detalhe que pode ser distinguido é aproximadamente igual ao comprimento de onda. A fim de observar o interior de um átomo cujo diâmetro é 1,0 Å com uma resolução de aproximadamente 0,1 Å, determine:

a) a energia mínima dos elétrons de um microscópio eletrônico.
b) a energia mínima dos fótons de um microscópio ótico (identifique qualitativamente esses fótons, dentro do espectro eletromagnético).
c) se é mais prático usar um microscópio eletrônico ou ótico.

11 P3.22 Considere um átomo e um núcleo, com diâmetros 1 Å e 10 fm, respectivamente. Determine a incerteza na quantidade de movimento e verifique a consistência com os dados conhecidos das *energias* de ligação de um:

a) elétron ligado ao átomo.
b) elétron ligado ao **núcleo.**
c) próton ligado ao átomo.

Ignore efeitos relativísticos.

12 P3.23 Considere o decaimento radioativo de um isótopo estável para um estado excitado do núcleo filho. Esse estado excitado, cuja meia vida é de 10^{-12} s, decai pela emissão de um fóton de 1 MeV, que são valores típicos. Determine:

a) a incerteza na energia do fóton do raio emitido, em eV.

b) a razão entre a incerteza e a energia do fóton; comente se isso justifica dizer que os raios gama provenientes do decaimento nuclear são monocromáticos.

13 P3.25 A interação de um objeto de massa m em equilíbrio com seu entorno pode ser descrito por um oscilador harmônico linear unidimensional, de modo que a energia é $E = \frac{p^2}{2m} + C\,\frac{x^2}{2}$, em que p e x representam a quantidade de movimento linear e a posição, respectivamente. Mostre que:

a) $\langle E \rangle = \frac{h^2}{32\,\pi^2 m\,\langle x^2 \rangle} + C\,\frac{\langle x^2 \rangle}{2}$.

b) a energia mínima do oscilador é $h\nu/2$, em que $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{m}}$ é a frequência de oscilação.

Sugestão: Primeiro, note que um sistema que permanece na mesma posição o tempo todo tem $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle$ e que, **no sistema deste problema**, $\langle x \rangle = 0$ (certifique-se de que entende as razões para esses dois resultados prévios). Depois, adote para o produto das incertezas de posição e momento o valor mínimo, $\hbar/2$, e use o resultado para eliminar $\langle p^2 \rangle$ da expressão da energia – você deve encontrar o resultado do item a. Busque o valor de $\langle x^2 \rangle$ (assim mesmo, sem tirar a raiz quadrada) que minimiza $\langle E \rangle$ para encontrar o resultado do item b.