CONTROLE NÃO LINEAR APLICADO
CICLOS LIMITE

Aluno: Pedro Inácio Barbalho

SISTEMA EM ANÁLISE

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned} \qquad (1)$$

- Há apenas um ponto de equilíbrio para qualquer μ:

$$\dot{x}_1 = 0 = -x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = 0 = x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2)$$
$$x_{1eq} = 0$$
$$x_{2eq} = 0$$

ANÁLISE DOS AUTOVALORES

- Os autovalores (λ) relacionados a esse ponto de equilíbrio são determinados por:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

- Sendo a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} \mu - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & \mu - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}$$

ANÁLISE DOS AUTOVALORES

- Há 3 tipos possíveis de autovalores:
  - Para $\mu = 0$, o sistema é marginalmente estável e os autovalores são:

$$\lambda = \pm j$$

  - Para $\mu > 0$, o sistema é instável e os autovalores são:

$$\lambda = \mu \pm j$$

  - Para $\mu < 0$, o sistema é estável e os autovalores são:

$$\lambda = \mu \pm j$$

- Pelos autovalores, não é possível analisar completamente como o sistema se comporta para qualquer valor de μ. Por exemplo, para $\mu > 0$, não há como perceber que existe um ciclo limite.

CICLO LIMITE

- Nos sistemas não lineares, oscilações com período e amplitude constantes podem surgir sem a aplicação de perturbações externas chamadas de ciclos limite. [1]
- No plano de fase, o ciclo limite é definido como uma trajetória fechada e isolada. [1]
- O ciclo limite pode ser estável, instável e semi-estável. [1]

CICLO LIMITE

- Transformando o sistema (1) para coordenadas polares, $x_1 = rcos(\theta)$ e $x_2 = rsen(\theta)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned} \qquad (2)$$

CICLO LIMITE

- Com o sistema (2), é possível notar que:
  - Se $\mathrm{r} > \sqrt{\mu}$, $\dot{r} < 0 \text{ e } \dot{\theta} = 1$;
  - Se $\mathrm{r} < \sqrt{\mu}$, $\dot{r} > 0 \text{ e } \dot{\theta} = 1$;
  - Se $r = \sqrt{\mu}$, $\dot{r} = 0 \text{ e } \dot{\theta} = 1$;

- Para qualquer ponto inicial, as trajetórias permanecem numa região finita no plano de fase e é possível concluir que elas tendem para um círculo de raio igual a $\sqrt{\mu}$ com velocidade angular de 1 rad/s.

CICLO LIMITE

- Como a relação abaixo se anula e troca de sinal para um conjunto de soluções,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2\mu - 4x_1^2 - 4x_2^2$$

é possível concluir, utilizando os teoremas 2, 3 e 4 das aulas iniciais, que há um ciclo limite estável com raio $\sqrt{\mu}$ e que contém o ponto de equilíbrio instável (0;0) no seu interior.

PRINCÍPIO DA INVARIÂNCIA

- Tomando a seguinte função de Lyapunov:

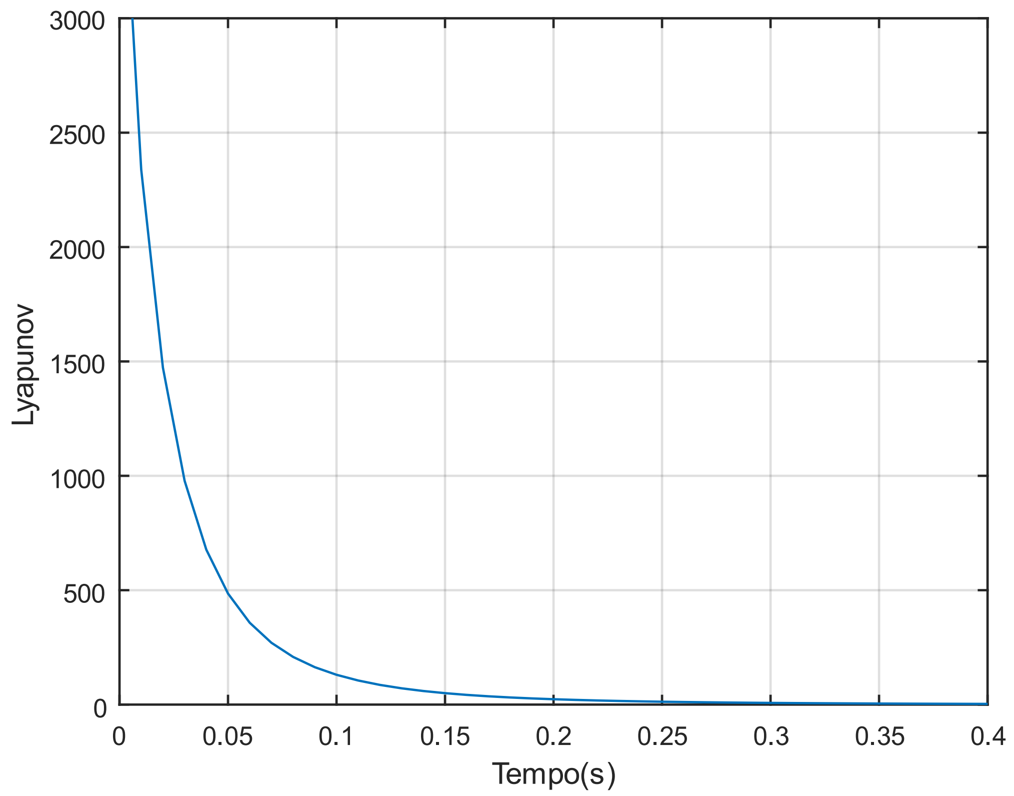
$$V(r) = (r^2 - \mu)^2$$

sendo, $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

- Seja um conjunto $\omega_L = \{r \in \mathbb{R} : V(r) < l\}$, e $l = \mu^2$;
- Seja $\dot{V}(r) = -4r^2(r^2 - \mu)^2 \leq 0 \; \forall r \in \omega_L$;
- Nota-se que a origem $r = 0 \notin \omega_L$, portanto, o conjunto $E = \{r \in \omega_L : \dot{V}(r) = 0\}$ é composto apenas por $r = \sqrt{\mu}$;

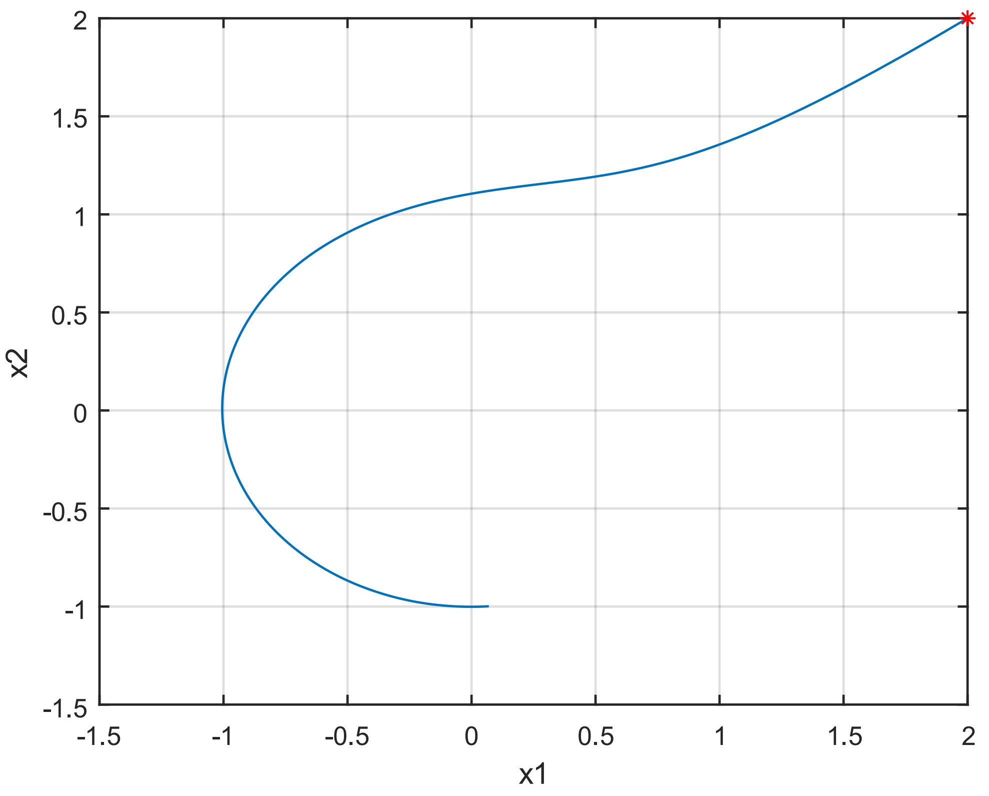
PRINCÍPIO DA INVARIÂNCIA

- Portanto, qualquer trajetória dentro do ciclo limite tenderá a ele para $t \to \infty$;
- A partir disso, pode-se concluir também que a origem é instável;
- Por exemplo, considerando o ponto inicial (2;2) e $\mu = 1$, na Figura ao lado, é possível notar o decaimento da função de energia para zero com o tempo;



PRINCÍPIO DA INVARIÂNCIA

- Além disso, para o mesmo ponto inicial, observa-se na Figura ao lado que a trajetória tende para o ciclo limite de raio igual a 1;



REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

[1] - Slotine, J.J.E. Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall, 1991.