MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
BERLIN

---

8. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1920

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig

Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentenproblem.

Von

Georg Pólya in Zürich.

Das Auftreten der Gaußschen Wahrscheinlichkeitsdichte e^{-x^2} bei wiederholten Versuchen, bei Messungsfehlern, die aus der Zusammensetzung von sehr vielen und sehr kleinen Elementarfehlern resultieren, bei Diffusionsvorgängen usw. ist bekanntlich aus einem und demselben Grenzwertsatz zu erklären, der in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine zentrale Rolle spielt. Der eigentliche Entdecker dieses Grenzwertsatzes ist Laplace zu nennen, seine strenge Begründung hat zuerst wohl Tschebyscheff unternommen und seine schärfste Formulierung findet sich, soweit mir bekannt, in einer Arbeit von Liapounoff[1]). Für den genauen Wortlaut soll etwa auf die letztgenannte Stelle oder auf andere Arbeiten über den Gegenstand[2]) oder auf die Lehrbücher der Wahrscheinlichkeitsrechnung[3]) verwiesen werden.

Ich befasse mich hier bloß mit einer mathematischen Methode, die zum Beweise dieses Grenzwertsatzes herangezogen werden kann, oder genauer gesagt, mit einigen rein analytischen Sätzen über Folgen monotoner Funktionen, auf die der Beweis aufgebaut werden kann. Dem Kenner des Gegenstandes wird es nicht entgehen, an welchem Punkte des üblichen Beweisganges meine Sätze zu benutzen sind. Man hat z. B. damit an die Formel (13) auf S. 27 der v. Misesschen Abhandlung[2]) anzuknüpfen.

[1]) Liapounoff, Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité. Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg, VIIIe série, vol. XII, No. 5.

[2]) Vgl. z. B. R. v. Mises Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschr., 4 (1919), S. 1–97, Sätze III, III_2. Die Sätze I, II, IV und V dieser Abhandlung berühren sich mit dem hier gemeinten Grenzwertsatze, aber sind darin nicht enthalten.

[3]) Vgl. z. B. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, übersetzt von H. Liebmann (Leipzig 1912), S. 67–81, 259–271.

Der Beweis wird nachher durch eine ähnliche Formel [vgl. Formel (17) dieser Abhandlung] erbracht, wie die Formel (25) auf S. 34 der v. Misesschen Abhandlung.

Ich erwähne nur, daß auch die schärfste mir bekannte Fassung des wahrscheinlichkeitstheoretischen Grenzwertsatzes, nämlich die von Liapounoff, meinen Hilfsmitteln erreichbar ist. Die ausführliche Darstellung spare ich mir für ein Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf, das ich seit langem vorbereite[4]).

Die Benutzung diskontinuierlicher Faktoren in diesen Fragen geht bis auf Laplace zurück. Liapounoff erreichte sein Ziel durch eine geistreiche Modifikation der herkömmlichen Gestalt des diskontinuierlichen Faktors von Dirichlet. Meine Untersuchung im § 1 stützt sich ebenfalls auf eine Art von diskontinuierlichem Faktor, nämlich auf ein über das komplexe Gebiet erstrecktes Integral, das in der analytischen Zahlentheorie ständig verwendet wird [vgl. (18)]. Mein Weg zum Beweise des Laplace-Tschebyscheffschen Grenzwertsatzes ist ähnlich beschaffen, nur viel weniger verschlungen als der Weg, auf dem man zum Beweise des Primzahlsatzes gelangt.

Der springende Punkt in dem Tschebyscheff-Markoffschen Beweisgange bildet der Nachweis einer Eigenschaft der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2} \, dx.$$

Die Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... seien monoton; wenn die Momente von $f_n(x)$ gegen die von $f(x)$ streben, so strebt $f_n(x)$ gegen $f(x)$. Ich zeige im § 2, daß diese Eigenschaft jeder monotonen und stetigen Funktion $f(x)$ zukommt, die von 0 bis 1 wächst, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, wenn nur die Momente von $f(x)$ gewissen einfachen Ungleichungen genügen. Diesen Satz möchte ich als den „Stetigkeitssatz des Momentenproblems" bezeichnen. Der Stetigkeitssatz des Momentenproblems wird sich in § 2 als eine leicht übersichtliche Folgerung des Schlußsatzes des § 1 ergeben.

§ 1.

Sätze über Folgen monotoner Funktionen.

Die Sätze, die ich im folgenden ableite, lassen sich auch für ein endliches Intervall aussprechen und auch auf solche Funktionen mehrerer

[4]) Eine Probe meiner Untersuchungen habe ich in der Arbeit „Über das Gaußsche Fehlergesetz", Astronomische Nachrichten, 208 (1919), Nr. 4981 veröffentlicht.