FILOSOFIA ABERTA

W. H. NEWTON-SMITH

LÓGICA
UM CURSO INTRODUTÓRIO

Obra revista e corrigida pelo autor para a edição portuguesa

Tradução e notas
Desidério Murcho

Centro de Linguagem, Lógica e Cognição
Sociedade Portuguesa de Filosofia

gradiva

Título original: *Logic: An Introductory Course*
(Routledge, Londres, 1985, 1994)

Tradução: *Desidério Murcho*
Revisão de texto: *Joaquim Garcia*
Capa: *Armando Lopes*
Fotocomposição: *Gradiva*
Impressão e acabamento: *Publidisa*

Rua Almeida e Sousa, 21 – r/c esq. — 1399-041 Lisboa
Telef. 21 393 37 60 — Fax 21 395 34 71
Dep. comercial: Telefs. 21 397 40 67/8 — Fax 21 397 14 11
geral@gradiva.mail.pt / www.gradiva.pt
1.ª edição: *Maio de 1998*
3.ª edição: *Setembro de 2011*
Depósito legal n.º 332561 / 2011
ISBN: 978-972-662-609-1

Colecção coordenada por
Aires Almeida
(Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa)

gradiva
Editor: *Guilherme Valente*

Para Raine Kelly Newton-Smith

5

Uma linguagem predicativa

1. No interior da proposição: referência e predicação

A lógica proposicional que desenvolvemos coloca-nos em posição de avaliar apenas uma classe muito limitada de argumentos — aqueles argumentos cuja validade depende do papel dos operadores verofuncionais. Isto significa que só demos atenção a argumentos cuja validade depende da relação entre proposições simples e complexas. Não temos por enquanto instrumentos para investigar argumentos cuja validade depende do que acontece no interior das proposições simples; isto é, proposições que não contêm outras proposições. Por exemplo, considere os seguintes argumentos válidos:

> Todas as pessoas são mortais.
> Sócrates é uma pessoa.
> Logo, Sócrates é mortal.

> Todos os estudantes do Balliol são inteligentes.
> Icabod é um estudante do Balliol.
> Logo, Icabod é inteligente.

> Todos os zemíndares são poderosos.
> Icabod é um zemíndar.
> Logo, Icabod é poderoso.

Reconhecemos a validade destes argumentos em função de compreendermos a sua forma, e não em função do seu conteúdo. Não precisamos de saber o significado de, digamos, «zemíndar» para ver a validade do último argumento. Isto dá origem à esperança de que possamos ser capazes de caracterizar sistematicamente o aspecto formal que dá origem à validade. Para fazer isto, teremos de olhar para o interior da proposição. O nosso objectivo é, assim, desenvolver uma notação para representar a forma interna das proposições e deixaremos de representar as proposições apenas com os símbolos simples P, Q, R, ...

Considere frases simples da forma sujeito-predicado como

Icabod é feliz.
Reagan é um falhado.
Thatcher é teimosa.
O Evereste é alto.

Há duas coisas a assinalar. Em primeiro lugar, alguém que afirme uma destas frases escolhe alguém ou alguma coisa como tema de conversa (Icabod, Reagan, Thatcher, o Evereste). Em segundo lugar, está a atribuir uma propriedade qualquer à pessoa ou coisa escolhida. Está a dizer que a coisa em causa é feliz, ou um falhado, ou teimosa ou alto. À primeira actividade chama-se *referência* e à segunda *predicação*.

Referir é algo que é feito pelo locutor. Há vários dispositivos linguísticos que o falante ou a falante pode usar para conseguir escolher algo com o fim de falar acerca disso. Podemos usar *nomes próprios* como nos exemplos anteriores. Em geral, se um nome próprio refere realmente algo (o que pode não acontecer — afinal, não existe nem nunca existiu um cavalo alado chamado *Pégaso*), refere a mesma coisa em cada ocorrência do seu uso (a excepção a isto é o uso de um mesmo nome para coisas diferentes, como acontece com nomes comuns como *João Silva*). Podemos também usar *pronomes pessoais singulares* para referir algo ou alguém: eu, tu, ele, ela. Estes termos não referem a mesma coisa em todas as ocasiões em que são usados. Por exemplo, todos nós referimos uma pessoa diferente no nosso uso da palavra *eu*. Podemos também usar demonstrativos como *isto* e *aquilo* ou *este* e *aquele*. Estas

palavras podem ser usadas isoladamente, como em «Aquele é o vencedor», ou em conjunção com um termo geral que nos ajuda a saber o que estamos a referir, como em «Este carro está à venda». Em ambos os casos, para determinar aquilo que está a ser referido por um locutor temos de ter em atenção a situação na qual o termo está a ser usado.

Outro dispositivo de referência é a *descrição definida*. A descrição definida forma-se tomando a palavra «o» ou «a» juntamente com um termo geral, como em

O vencedor está feliz.
A estrada está escorregadia.
O lago está seco.*

Intimamente relacionado com as descrições definidas está o uso de pronomes possessivos juntamente com um termo geral, como nos exemplos seguintes:

O meu cão está triste.
O teu gato é malandro.
O tigre deles é feroz.

Ao longo deste capítulo e dos seguintes teremos em consideração estes e outros dispositivos de referência. Para já, restringiremos a nossa atenção aos nomes próprios usados para referir pessoas ou coisas. Esta restrição significa, por exemplo, que não estaremos interessados em frases como «A manteiga sabe bem» ou «O gelo é frio», pois os nomes *manteiga* e *gelo* não são aqui usados como nomes de coisas ou pessoas. A manteiga e o gelo devem antes ser concebidos como substâncias e não como objectos. Isto está patente no facto de não podermos contar manteiga ou gelo. Não faz sentido perguntar de quantas manteigas precisamos ou

* Uma característica especial da língua portuguesa é o facto de usar o artigo definido, «o» ou «a», em contextos como «O João é alto», os quais não se tratam obviamente de descrições definidas — ao artigo não se segue uma descrição, mas um nome próprio. Em inglês *nunca* se usa o artigo *the* em frases como «John is tall». *(N. do T.)*

quantos gelos há em Oxford. Isto é, o facto de fazer sentido pensar em contar o que um termo refere é sinal de que esse termo se refere a um objecto e não a uma substância.

Usaremos letras minúsculas da parte central do alfabeto (*m*, *n*, *o*, ...) como nomes. Combinando este fragmento de notação com o português, escrevemos: *n* é feliz, *o* é um falhado. Ao introduzir letras para funcionar como nomes teremos de especificar o que elas referem, e.g., *n* refere Icabod, *o* refere Reagan.

Considere as seguintes frases simples:

Icabod é feliz.
Reagan é um falhado.
Thatcher é teimosa.
O Evereste é alto.

Às expressões que obtemos ao apagar os nomes destas frases chamaremos *predicados*. Assim, poderíamos escrever:

__ é feliz.
__ é um falhado.
__ é teimosa.
__ é alto.

O espaço em branco indica que se deve colocar aí algo para formar uma frase. Na verdade, usaremos letras minúsculas da parte final do alfabeto para indicar a presença de espaços em branco, que precisam de ser preenchidos se quisermos obter uma frase. Assim, escrevemos:

x é feliz.
x é um falhado.
x é teimosa.
x é alto.

Devemos encarar um predicado como algo que exprime uma propriedade que é atribuída a uma coisa, quando se forma uma frase ao completar o predicado com um nome dessa coisa.

Chamaremos *variáveis de objecto* a x, y, z. Uma razão para este rótulo é que as variáveis mostram que obteremos uma frase acerca

de um objecto se a variável for substituída pelo nome desse objecto. Nem todos os predicados são tão simples. O nível de complexidade seguinte diz respeito a predicados que resultam da supressão de mais de um nome de uma frase. Considere a frase

Icabod ama Isabel

O predicado atribui a propriedade ou relação de amor entre Icabod e Isabel. Usamos variáveis diferentes em lugar de nomes diferentes, obtendo

x ama y

Isto permite-nos distinguir a relação geral de amor, que pode verificar-se entre a mesma pessoa ou entre pessoas diferentes, do amor-próprio, que é uma propriedade que se aplica a apenas uma pessoa. Assim, da frase

Icabod ama-se a si mesmo

(i.e., Icabod ama Icabod), obtemos o predicado

x ama x

A repetição do x significa que este tem de ser substituído pelo mesmo nome ao gerar uma frase. Do predicado *x ama y* tanto podemos gerar frases como «Icabod ama Isabel» como «Icabod ama Icabod». Não se pressupõe que variáveis diferentes têm de ser substituídas por nomes diferentes. Contudo, a mesma variável tem de ser sempre substituída pelo mesmo nome.

Um predicado pode exigir mais do que dois nomes para gerar uma frase. Por exemplo, o predicado

x está entre y e z

poderia gerar a seguinte frase com os nomes *Oxford*, *Londres* e *Bristol:*

Oxford está entre Londres e Bristol

Predicados que exigem ainda mais nomes são raros, mas ocorrem por vezes, sobretudo em contextos matemáticos. Aos predicados que exigem n nomes para gerar frases chamaremos *predicados n-ários*. Assim

x é vermelho
x ama x

são predicados unários.

x é mais alto do que y
x ama y

são predicados binários; e

x está entre y e z

é um predicado ternário. Na nossa notação simbólica, usaremos letras maiúsculas, $F, G, H, \ldots$, para representar predicados. Ao introduzir predicados na formalização de argumentos, a nossa interpretação tem de especificar que propriedade ou relação exprime a letra que está a ser usada. Em português, ao formar uma frase, os nomes são usualmente colocados antes e depois do predicado, sempre que o predicado não é unário. Contudo, por razões que se tornarão evidentes, iremos colocar as variáveis usadas para exprimir predicados depois das letras maiúsculas $F, G, H, \ldots$ Por exemplo, podemos escrever Fx em vez de «x está feliz» e Gxy em vez de «x ama y». Se usarmos n para Icabod e m para Isabel, podemos formar com estes predicados as expressões Fn e Gnm para exprimir as frases «Icabod é feliz» e «Icabod ama Isabel». Estas são frases que exprimem proposições que serão verdadeiras ou falsas, consoante o caso. As expressões Fx e Gxy, por outro lado, não fazem asserções. Não devemos pensar que são verdadeiras ou falsas. Não afirmam que uma coisa qualquer chamada x é feliz ou que uma pessoa x qualquer ama uma pessoa y qualquer. x e y, nestes contextos, não são nomes. O seu papel é indicar os lugares dos predicados que devem ser preenchidos e indicar se podemos pôr nomes idênticos ou diferentes nesses lugares. Devemos pensar que x e y exprimem o que seria expresso por «é feliz» e «ama» se

estas expressões portuguesas pudessem transmitir a informação complementar que a nossa notação transmite acerca do número de nomes necessários para completar estes predicados de modo a formar frases. As expressões com lugares vazios que precisam de ser preenchidos para formar frases chamam-se *frases abertas*. As frases sem lugares vazios chamam-se *frases fechadas**.

2. *Os quantificadores universais e existenciais*

Uma forma mais interessante, do ponto de vista do lógico, de formar frases a partir de predicados ocorre quando não as completamos com nomes, mas com *quantificadores*, tais como *toda a gente*. Por exemplo, acrescentar este quantificador aos predicados «x está feliz» e «x ama y» tem como resultado

Toda a gente está feliz
Toda a gente ama toda a gente

Claro que se eu disser que toda a gente está feliz é muito improvável que queira dizer que literalmente todas as pessoas estão neste ditoso estado. Usar esta frase numa festa quererá provavelmente transmitir a ideia de que todas as pessoas que estão na festa estão felizes. Isto é, ao usar esta expressão, estou a referir todos os membros de um certo conjunto. Que conjunto exactamente tenho em mente será provavelmente claro no contexto. Ao conjunto visado chamar-se-á *domínio de quantificação*.

Acrescentar o quantificador *toda a gente* a um predicado resulta numa frase que afirma que o predicado se aplica a todos os objectos do domínio (a expressão *toda a gente* implica tratar-se de um domínio de pessoas). Assim, a expressão *toda a gente* funciona de maneira muito diferente de um nome. Um nome

* Esta terminologia tradicional pode ser enganadora para o estudante desprevenido, pois, ao contrário do que pode parecer pela designação, uma frase aberta *não é* uma frase! O adjectivo *aberta* da expressão *frase aberta* é um adjectivo pseudoqualificativo, como *aparente* na expressão *vitória aparente*: uma vitória aparente não é uma vitória. Quando se usa a expressão *frase*, sem qualificações, queremos dizer *frase fechada*. (N. do T.)

escolhe tipicamente uma pessoa particular e um predicado completado com esse nome afirma que essa pessoa tem a propriedade expressa pelo predicado. Completar um predicado com *toda a gente* conduz a uma frase que faz uma asserção geral; nomeadamente, a de que todas as pessoas do domínio têm a propriedade expressa pelo predicado.

Usamos um *A* ao contrário, ∀, para exprimir aquilo a que chamamos o *quantificador universal*. Quando o usamos para completar um predicado, este quantificador expressa a ideia de que tudo o que pertence ao domínio tem a propriedade expressa pelo predicado. Em português usamos a expressão *toda a gente* quando as pessoas são o domínio visado e *tudo* quando o domínio é o dos objectos. ∀ não se restringe, na sua aplicação, a um tipo específico de domínio. Pode obter-se uma restrição qualquer a um tipo particular de domínio através da especificação do domínio. Poderíamos pensar escrever $F\forall x$ para *toda a gente está feliz*, que espelha a notação Fn para *Icabod está feliz*. Em vez disso, por razões que a seguir se tornarão evidentes, escrevemos $\forall x\, Fx$, que se lê da seguinte maneira: escolha o que quiser (i.e., qualquer coisa do domínio) — *isso* está feliz.

Igualmente importante para a análise de argumentos é o *quantificador existencial*, que em português se representa por expressões como *alguns, algo, alguém*. Acrescentar estas expressões a um predicado resulta numa frase que pode ser usada para asserir a existência de pelo menos uma pessoa ou objecto no domínio que tem a propriedade expressa pelo predicado. O quantificador existencial é expresso na nossa notação por um *E* ao contrário, ∃, escrevendo-se assim $\exists x\, Fx$ em lugar de «Alguém está feliz». Isto pode ser lido da seguinte maneira: no domínio pode encontrar-se algo que está feliz; presume-se que isto quer dizer *pelo menos um* e não necessariamente mais de um.

Demos exemplos, mas nenhuma definição de quantificador. Trata-se de uma expressão demasiado fundamental para admitir qualquer definição simples. Gramaticalmente, um quantificador é uma expressão que se junta a um predicado para gerar ou uma frase ou um novo predicado com uma aridade menor. Por exemplo, o quantificador *toda a gente*, acoplado ao predicado «*x* está feliz» gera a frase «toda a gente está feliz». Se acoplarmos

este quantificador ao segundo lugar vazio do predicado binário *x ama y* daremos origem ao novo predicado unário *x ama toda a gente*. Este predicado expressa uma propriedade que Deus supostamente possui. Acrescentar um segundo quantificador a este predicado, digamos, *alguém*, dá origem à frase «Alguém ama toda a gente».

A função de um quantificador é dar uma indicação quanto ao número de coisas do domínio às quais o predicado se aplica. Esta indicação pode ser muito precisa como em «Toda a gente está feliz», por exemplo. Esta frase afirma que o predicado *x está feliz* se aplica a todos os objectos do domínio. Mas esta indicação também pode *não* ser específica, como em «Algumas pessoas estão felizes», que transmite a ideia de que pelo menos um objecto no domínio tem a propriedade de estar feliz, sem indicar de que objecto ou objectos se trata. A quantificação pode ser vaga, como em *a maior parte, alguns, vários, muitos*, etc. Não há uma percentagem definida de coisas de um domínio que tenha de ter a propriedade da felicidade, por exemplo, para que seja verdade que a maior parte das pessoas do domínio estejam felizes. Nesta obra, centraremos a nossa atenção no quantificador universal, *tudo*, e no quantificador existencial, *algo*, e noutros quantificadores que podemos definir em termos destes.

Para avançar para o próximo aspecto da nossa discussão dos quantificadores precisamos de regressar aos predicados para considerar outra maneira de gerar predicados complexos. Em primeiro lugar, será conveniente introduzir preliminarmente uma ideia que precisará também ela de ser posteriormente refinada. Dizemos que um objecto de um dado domínio que possui a propriedade expressa pelo predicado *Fx satisfaz* o predicado. No caso de um predicado relacional, como *x gosta de y*, dizemos que um par de objectos, *a, b, tomados por esta ordem*, só satisfazem o predicado *x gosta de y* se *a* gosta de *b*. Repare que a ordem é importante. O par de objectos — César, Bruto — satisfaz o predicado *x gosta de y* se César gosta de Bruto; mas se, como costuma dizer-se, Bruto não gostava de César, o par *Bruto, César* não satisfaz o predicado.

Até agora só lidámos com predicados simples e não estruturados. Os operadores da nossa linguagem proposicional podem ser usados para construir predicados mais complexos. Considere-se a frase

Icabod é feliz e Icabod é rico

Ao apagar as duas ocorrências do nome *Icabod* ficamos com o predicado complexo

x é feliz e x é rico

Este predicado pode ser quantificado e se escrevermos Fx para «x é feliz» e Rx para «x é rico» o predicado complexo é então $Fx \wedge Rx$ e o resultado de prefixar o quantificador existencial é

$$\exists x\ (Fx \wedge Rx)$$

Esta frase afirma que podemos encontrar qualquer coisa (no domínio visado de pessoas) feliz e rica. Ou, numa tradução mais idiomática, temos o seguinte: «Alguém é feliz e rico», «Há uma pessoa feliz que é rica», «Algumas pessoas felizes são ricas» ou «Algumas pessoas ricas são felizes». Alcançámos uma tradução simbólica de um tipo muito importante de frase. Todas as frases da forma

Alguns F são G

devem ser traduzidas como

$$\exists x\ (Fx \wedge Gx)$$

Frases como

Alguns F não são G

serão traduzidas como

$$\exists x\ (Fx \wedge \neg Gx)$$

Esta tradução é confirmada pela nossa leitura pedante do quantificador que mostra que tem o mesmo sentido que o português, i.e., podemos encontrar alguém que é rico mas não é feliz. Isto transmite o mesmo que «Alguns ricos são infelizes».

Considere a frase «Se Icabod é um estudante, Icabod é rico». Eliminar o nome «Icabod» resulta no predicado *se x é um estudante, x é rico*. Aplicar o quantificador universal a este predicado complexo tem o seguinte resultado: tome-se qualquer coisa; se for um estudante, será rico. Isto capta o que é expresso por «Todos os estudantes são ricos». Logo, qualquer frase da forma

Todos os F são G

simboliza-se como

$$\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$$

Sabemos, pelo nosso estudo da linguagem proposicional, que $P \rightarrow Q$ é verofuncionalmente equivalente a $\neg P \vee Q$. Consequentemente, usando Ex para «x é estudante», Rx para «x é rico» e n para Icabod, «Se Icabod é um estudante, Icabod é rico» formula-se como $En \rightarrow Rn$, o que é equivalente a $\neg En \vee Rn$. Assim, uma coisa satisfaz o predicado $Ex \rightarrow Rx$ se, e só se, satisfaz o predicado $\neg Ex \vee Rx$. Isto significa que a frase universalmente quantificada

$$\forall x\ (Ex \rightarrow Rx)$$

será verdadeira quer existam objectos E e todos eles sejam R, quer não existam objectos E. Assim, ao representar «Todos os E são R» como o fizemos, não estamos a presumir que esta frase quer dizer que existem objectos E. Isto é, estamos a construir as frases portuguesas com o quantificador universal como implicitamente condicionais. Se queremos afirmar não apenas que se algo é um E, é um R, mas também que existem objectos E, podemos escrever $\forall x\ (Ex \rightarrow Rx) \wedge \exists x\ Ex$.

Há muitas variantes linguísticas de «Todos os F são G», simbolizando-se todas como $\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$:

Qualquer F é G.
Cada F é G.
Os F são G.
Cada um dos F é G.

Alguns estudantes sentem-se por vezes inclinados a formular as frases anteriores como $\forall x\ (Fx \wedge Gx)$. Mas isto não serve, como é revelado ao ler a formalização de forma pedante em português: tome-se qualquer coisa do domínio; essa coisa é simultaneamente F e G. Logo, simbolizar desta maneira «todos os estudantes são ricos» conduziria à asserção de que tudo são estudantes ricos! Este erro tentador resulta do facto de usarmos a conjunção ao formular «Alguns F são G», escrevendo-se $\exists x\ (Fx \wedge Gx)$. Repare que esta formalização nos compromete com a existência de objectos F, o que não acontece quando se formula «Todos os F são G» como $\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$.

Existe uma tentação análoga ao formular «Alguns F são G» como $\exists x\ (Fx \rightarrow Gx)$. Deve ser evidente que isto não serve, pois, dada a equivalência referida anteriormente, esta fórmula é a mesma que $\exists x\ (\neg Fx \vee Gx)$, o que seria verdade no caso de não existirem objectos F no domínio; mas nós não contaríamos a frase «Alguns F são G» como verdadeira no caso de não existirem objectos F.

Em português há muitos outros quantificadores. Alguns, como veremos, resistem a um tratamento lógico. Outros podem ser explicitados em termos dos quantificadores universal e existencial. Considere a frase «Icabod mede mais de 3 metros». Isto gera o predicado «x mede mais de 3 metros». Considere a frase «Ninguém mede mais de 3 metros». Se encarássemos essa frase segundo o modelo da primeira, tratando «ninguém» como um nome, seríamos conduzidos à «conclusão Lewis Carroll» de que a nossa equipa de basquetebol devia contratar o ninguém. Na verdade, «ninguém» é um quantificador. A frase anterior afirma que não se pode encontrar nada no domínio que tenha mais de 3 metros de altura. Se usarmos Ox para o predicado em questão, podemos exprimir a frase como $\neg\exists x\ Ox$; ou podemos escrever antes $\forall x\ \neg Ox$, o que é equivalente. Na nossa leitura pedante, isto fica assim: tome-se qualquer pessoa do domínio; ele ou ela não terá mais de 3 metros.

Os quantificadores *nenhum* e *nada* ocorrem em contextos como os seguintes:

Nenhum médico é um peixeiro.
Nenhum vencedor tem sorte.

Ao formalizar estas frases, começamos por reformulá-las da seguinte maneira:

Tome o que quiser; se for um médico, não é um peixeiro.
Tome o que quiser; se for um vencedor, não tem sorte.

Vê-se agora que a formalização correcta é a seguinte:

$$\forall x\ (Mx \rightarrow \neg Px)$$
$$\forall x\ (Vx \rightarrow \neg Sx)$$

Até agora tratámos da quantificação individual de predicados progressivamente mais complexos, como $Fx \rightarrow Gx$ e $Fx \wedge Gx$. Um grau mais avançado de complexidade emerge dos predicados binários ou de aridade superior. Seja Gxy o predicado «x ama y». Suponha que lhe acrescentamos o quantificador $\exists y$ para obter $\exists y\ Gxy$. Repare que esta expressão não é uma frase. Tem um lugar vazio marcado por x que ainda tem de ser preenchido. Tal como está, exprime uma propriedade — nomeadamente, a propriedade de amar alguém. Se preenchermos o lugar vazio com o nome *Icabod*, obtemos a frase «Icabod ama alguém». Suponha que completamos este predicado com o quantificador $\exists x$, obtendo $\exists x\ \exists y\ Gxy$. Esta fórmula diz o seguinte: podemos encontrar uma pessoa x e uma pessoa y tais que x ama y. Lembre-se que x e y não são nomes; funcionam como pronomes. Poderíamos ter reformulado a frase da seguinte maneira: podemos encontrar alguém tal que ele/ela ama alguém.

A aplicação do quantificador universal, $\forall y$, a Gxy resulta no predicado $\forall y\ Gxy$, que exprime a propriedade de amar toda a gente. Podemos colocar o nome *Icabod* no espaço vazio indicado pelo x para assim obtermos a frase «Icabod ama toda a gente». Podemos acrescentar outro quantificador universal, $\forall x$, de maneira a obtermos a frase $\forall x\ \forall y\ Gxy$, que afirma que qualquer pessoa que possamos encontrar ama qualquer pessoa que possamos encontrar; por outras palavras, toda a gente ama toda a gente.

Ao juntar as leituras pedantes de $\exists x\ \exists y\ Gxy$ com $\exists y\ \exists x\ Gxy$ e as de $\forall x\ \forall y\ Gxy$ com $\forall y\ \forall x\ Gxy$ o leitor deve conseguir confirmar que nestes casos a ordem pela qual os quantificadores são prefixados não altera o sentido do que é expresso na formalização. Repare que tivemos de acrescentar um quantificador com a mesma letra minúscula que ocorre no predicado. Se escrevêssemos, por exemplo, $\forall x\ \forall w\ Gxy$, geraríamos uma coisa que não é uma frase e cujo sentido é dúbio.

Repare também na diferença entre o predicado Gxx e Gxy. O primeiro exprime uma relação que um objecto pode ter consigo mesmo; a segunda exprime uma relação que pode verificar-se entre o mesmo objecto ou entre objectos diferentes. Ao quantificar Gxx universalmente obtemos $\forall x\ Gxx$, que afirma o seguinte: tome qualquer objecto que queira; esse objecto ama-se a si mesmo. $\exists x\ Gxx$ afirma que podemos encontrar pelo menos uma coisa que se ama a si mesma. Não quantificamos Gxx usando, digamos, $\exists x$ e $\exists y$ pois uma vez aplicado o primeiro quantificador, $\exists x$, não restam quaisquer espaços vazios para serem preenchidos.

Suponha que queremos formular a frase

Toda a gente ama alguém

Esta frase afirma que se tomarmos uma pessoa, ela terá a propriedade de amar alguém. A propriedade é expressa na nossa notação pela fórmula $\exists y\ Gxy$. A formalização da frase em questão é

$$\forall x\ \exists y\ Gxy$$

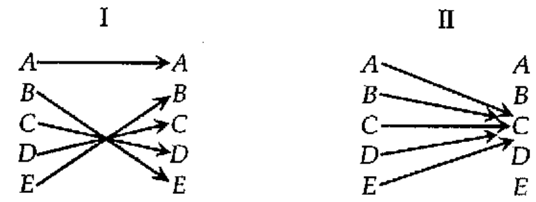
Considere a seguinte frase:

Alguém é amado por toda a gente

Esta frase afirma que podemos encontrar pelo menos uma pessoa que tem a propriedade de ser amada por toda a gente. Esta propriedade é expressa pelo predicado $\forall x\ Gxy$; assim, a formalização da frase é

$$\exists y\ \forall x\ Gxy$$

As frases «Toda a gente ama alguém» e «Alguém é amado por toda a gente» diferem em significado. Esta diferença pode ser ilustrada da seguinte maneira: sejam A, B, C, D, E os membros do domínio. Sejam as setas representações da relação de amar, nas quais a pessoa representada à cabeça da seta é a que é amada e a da cauda é a que ama.



O nosso diagrama I representa a situação na qual é verdade que $\forall x\ \exists y\ Gxy$, pois pode tomar uma pessoa qualquer que queira e encontrará alguém que essa pessoa ama. Repare que A ama-se a si mesma. Se quiséssemos excluir esta hipótese teríamos dito «Toda a gente ama outra pessoa qualquer». A formalização desta última frase será dada na secção 2 do capítulo 6. $\exists y\ \forall x\ Gxy$ é falsa na situação representada no diagrama I, pois não podemos encontrar uma pessoa que seja amada por toda a gente. O diagrama II representa uma situação na qual $\exists y\ \forall x\ Gxy$ é verdadeira; pois podemos encontrar alguém, a sortuda C, que toda a gente ama. O facto de ambas as frases serem verdadeiras na situação representada pelo diagrama II e de uma delas ser verdadeira e a outra falsa na situação representada pelo diagrama I mostra que o significado destas frases não é equivalente*. A ordem dos quantificadores faz toda a diferença, caso os quantificadores estejam misturados; isto é, se o quantificador universal e o existencial ocorrerem simultaneamente.

* $\exists y\ \forall x\ Axy$ implica $\forall x\ \exists y\ Axy$, mas não vice-versa. Se é verdade que alguém é amado por toda a gente, é verdade que toda a gente ama alguém. Mas do facto de toda a gente amar alguém não se segue que há alguém que é amado toda a gente; esta inferência é um erro comum de raciocínio a que se chama *falácia da inversão dos quantificadores*. Esta falácia é cometida no seguinte argumento filosófico clássico: todas as coisas têm uma causa; logo, tem de existir uma causa para todas as coisas. *(N. do T.)*

No caso de quantificadores puros (todos universais ou todos existenciais) a ordem não faz qualquer diferença.

Neste momento já deverá ser evidente que uma linguagem formal que revele a estrutura interna das proposições — a que chamaremos *linguagem quantificada* — é de uma complexidade consideravelmente superior à da linguagem proposicional. Consequentemente, há mais considerações preliminares a fazer antes de podermos desenvolver uma técnica para testar a validade de argumentos expressos nesta linguagem. A tradução para a linguagem quantificada (daqui em diante referida como *LQ*) exige muitas vezes uma compreensão subtil do sentido de frases portuguesas e pode exigir fórmulas de *LQ* bastantes complexas.

Uma das complicações é o facto de as frases portuguesas poderem envolver ambiguidades de *âmbito*. Já vimos que a ordem dos quantificadores pode fazer diferir o sentido de uma fórmula. A diferença entre

$$\forall x\ \exists y\ Gxy$$

e

$$\exists y\ \forall x\ Gxy$$

exprime-se melhor dizendo que $\forall x$ tem o maior âmbito na primeira fórmula e o mais pequeno na segunda. Isto é, na primeira fórmula domina $\exists y\ Gxy$ e na segunda só domina Gxy. Como fizemos no caso da *LP* (a linguagem proposicional), daremos posteriormente uma definição precisa de uma fórmula bem formada e da noção de âmbito. Para já, usaremos as noções informalmente. Como um exemplo complementar de como o âmbito dos quantificadores afecta o sentido, considere as fórmulas

$$\forall x\ \neg Gxn$$

e

$$\neg \forall x\ Gxn$$

sendo *n* Icabod e exprimindo Gxy a relação *gostar de*. Na primeira fórmula, o quantificador universal domina $\neg Gxn$, tendo portanto um âmbito maior do que $\neg$, que domina apenas Gxn; na

segunda fórmula, a situação é a inversa desta. A primeira fórmula afirma o seguinte: tome o que quiser do domínio; isso não gosta de Icabod. Por outro lado, se a segunda for verdadeira, as coisas podem não ser assim tão más para Icabod, pois esta afirma que é falso que toda a gente gosta de Icabod — logo, pode ser que algumas pessoas gostem afinal de Icabod.

Seguem-se alguns exemplos de ambiguidades de âmbito que ocorrem em português e que podem ser desambiguadas na tradução para *LQ*. Na frase

Toda gente da sala do lado está a fumar ou a beber

há uma ambiguidade de âmbito. Pode ser interpretada de maneira a que o quantificador universal tenha âmbito longo: tome-se qualquer pessoa que esteja na sala do lado; essa pessoa está a fumar ou a beber. A formalização seria

$$\forall x\ (Sx \rightarrow (Fx \vee Bx))$$

num domínio de pessoas, sendo

Sx: x está na sala do lado
Fx: x está a fumar
Bx: x está a beber

Por outro lado, pode ser interpretada de maneira a que o operador de disjunção tenha o âmbito mais longo: ou toda a gente da sala ao lado está a fumar ou toda a gente da sala ao lado está a beber. Neste caso, a formalização seria a seguinte:

$$\forall x\ (Sx \rightarrow Fx) \vee \forall x\ (Sx \rightarrow Bx)$$

A frase «Algumas pessoas são assaltadas todos os dias» poderá querer dizer o seguinte: tome-se um dia qualquer que se queira; nesse dia podemos encontrar algumas pessoas que foram assaltadas. Ou pode querer dizer o seguinte: podemos encontrar algumas pessoas que, se tomarmos um dia qualquer, terão sido assaltadas nesse dia. Na última leitura, com as suas vítimas perpétuas, o quantificador existencial *algumas pessoas* tem o maior âmbito. Na primeira leitura, o quantificador universal *todos os dias* tem o maior âmbito. Ao formalizarmos esta frase precisamos de um domínio que contenha pessoas e dias, pois estamos a falar de ambos. Seja

Px: x é uma pessoa
Dx: x é um dia
Gxy: x é assaltada em y

A formalização da primeira leitura é

$$\forall x\ (Dx \rightarrow \exists y\ (Py \wedge Gyx))$$

e a formalização da segunda é

$$\exists y\ (Py \wedge \forall x\ (Dx \rightarrow Gyx))$$

Um bom exemplo de ambiguidade de âmbito é um comentário de Keynes. Os economistas defendem muitas vezes as suas teorias perante os dados em contrário, afirmando que *a longo prazo* as suas previsões irão revelar-se correctas. Keynes retorquiu: a longo prazo estaremos todos mortos. Esta frase tem uma ambiguidade de âmbito. A pessoa que assere a frase pode ter em mente a possibilidade de ocorrer um holocausto que oblitere para sempre a espécie humana. Neste caso, o quantificador existencial tem âmbito longo: há um momento histórico no qual toda a gente está morta. Mas podemos querer apenas dizer que os seres humanos são mortais, sem afirmar que existirá alguma vez um momento sem seres humanos. Neste caso, o quantificador universal tem um âmbito maior e a leitura correspondente é a seguinte: tome uma pessoa qualquer; há um momento histórico no qual essa pessoa está morta*.

* Outro tipo de ambiguidade de âmbito ocorre por vezes ao caracterizar-se a relação existente entre as premissas e a conclusão de um argumento dedutivo. Esta ambiguidade envolve um operador modal (veja-se a secção 4 do capítulo 9 a respeito da modalidade), mas vale a pena referi-la desde já por dar origem a confusões. É comum afirmar, ao oferecer uma caracterização de argumento dedutivo válido, que se todas as premissas forem verdadeiras, a conclusão *terá* de ser verdadeira. O âmbito do operador modal «terá de» (ou «necessariamente») deve ser entendido como longo, pois se for entendido como curto dará origem à ideia completamente errada e filosoficamente nociva de que as conclusões dos raciocínios dedutivos válidos têm de ser necessárias. *(N. do T.)*

A seguir dão-se exemplos para ilustrar algumas das complexidades envolvidas ao formalizar frases portuguesas em *LQ*. Questões complementares surgirão com os exercícios do final deste capítulo.

Exemplo 5.2.1

Icabod gosta de uma rapariga bonita.

A palavra *uma* é ambígua. Pode querer dizer uma rapariga específica, ou pode estar a funcionar como um quantificador universal disfarçado, i.e., Icabod pode gostar, como é costume, de qualquer rapariga bonita. Seja

n: Icabod
Bx: x é uma rapariga bonita
Gxy: x gosta de y

A formalização da primeira leitura é

$$\exists x\ (Bx \wedge Gnx)$$

A da segunda é

$$\forall x\ (Bx \rightarrow Gnx)$$

Exemplo 5.2.2

Só os homens são cabeças ocas

Esta frase afirma que se alguma coisa é uma cabeça oca, será um homem. A formalização, usando Hx para «x é um homem» e Cx para «x é um cabeça oca», é

$$\forall x\ (Cx \rightarrow Hx)$$

Repare na diferença entre isto e a frase «Todos os homens são cabeças ocas», que se formaliza assim:

$$\forall x\ (Hx \rightarrow Cx)$$

Exemplo 5.2.3

a) Se alguém estiver atrasado, Icabod ficará aborrecido.
b) Se toda a gente estiver atrasada, Icabod ficará aborrecido.

Seja

Domínio: o conjunto das pessoas
n: Icabod
Gx: x está atrasado
Cx: x ficará aborrecido

(a) afirma que Icabod ficará aborrecido mesmo que uma só pessoa esteja atrasada. (b) apresenta-o talvez como mais tolerante, afirmando que ficará aborrecido se toda a gente estiver atrasada. As formalizações respectivas são as seguintes:

a) $\forall x\ (Gx \rightarrow Cn)$
b) $\forall x\ Gx \rightarrow Cn$

Alguém tem geralmente âmbito longo e *toda a gente* tem tendência para ter âmbito mais curto, como é ilustrado por esta formalização.

Exemplo 5.2.4

Quanto mais ricas elas são, mais eu as desprezo

Precisamos de uma relação ternária, $Dxyz$, para representar «x despreza mais y do que z». Não há nenhum dispositivo na nossa linguagem formal para desempenhar o papel que os pronomes como *eu* têm neste contexto. Para fazer frente a este problema, fazemos n ser o nome da pessoa que seria referida pela palavra *eu* na ocasião específica do uso da frase que temos em mente e que será, obviamente, o próprio locutor da frase. Tomando como domínio o conjunto de todas as pessoas e usando Rxy para «x é mais rica do que y», a formalização é a seguinte:

$$\forall x\ \forall y\ (Rxy \rightarrow Dnxy)$$

EXERCÍCIOS

1. Formalize as frases seguintes em *LQ*, especificando o domínio e a interpretação das letras predicativas:

a) Icabod é infeliz.
b) Alguém é infeliz.
c) Toda a gente é infeliz.
d) Icabod odeia Isabel.
e) Icabod odeia alguém.
f) Alguém odeia Icabod.
g) Alguém odeia alguém.
h) Alguém se odeia a si mesmo.
i) Toda a gente se odeia a si mesma.
j) Icabod odeia toda a gente.
k) Toda a gente odeia Icabod.
l) Toda a gente odeia toda a gente.
m) Alguém odeia toda a gente.
n) Toda a gente odeia alguém.
o) Todos os zemíndares são poderosos.
p) Nenhum zemíndar é poderoso.
q) Alguns zemíndares são poderosos.
r) Alguns zemíndares não são poderosos.
s) Todos os zemíndares poderosos têm sorte.
t) Alguns zemíndares odeiam Icabod.
u) Todos os zemíndares odeiam Icabod.
v) Icabod odeia zemíndares com sorte.
w) Icabod só odeia zemíndares.
x) Oxford fica entre Reading e Bristol.
y) Há uma cidade que fica entre Reading e Bristol.
z) Há uma cidade que fica entre duas cidades quaisquer.

2. Formalize as seguintes frases em *LQ* (especifique um domínio e a interpretação das letras predicativas). Ofereça formalizações alternativas para todas as frases ambíguas.

a) Icabod gosta de um zemíndar.
b) Alguns zemíndares são insultados todos os dias.
c) Todos os zemíndares montam dragões.
d) Nenhum zemíndar gosta de dragões.
e) Se toda a gente está atrasada, Icabod fica furioso.
f) Se alguém está atrasado, Icabod fica furioso.

g) Se uma pessoa qualquer estiver atrasada, Icabod fica furioso.
h) Se Icabod ficar furioso, ninguém está atrasado.
i) Se Icabod está furioso, alguém está atrasado.
j) Se alguém é mais alto do que ele, então ele é mais baixo do que alguém.
k) As coisas mais caras nem sempre são as melhores.
l) Só os fascistas têm menos escrúpulos do que os mafiosos.
m) Ninguém tem menos escrúpulos do que um fascista.
n) Uma pessoa é fascista se, e só se, não tiver escrúpulos.
o) Só se se for fascista é que se será desprezado.
p) Quanto mais se sobe, maior é a queda.
q) Pedra que rola não cria musgo.
r) Nem tudo o que brilha é ouro.
s) Não há mal que não venha por bem.
t) As crianças são para ser vistas e não ouvidas.
u) Todos os cretenses são mentirosos.
v) Os pulhas conhecidos são melhores do que os desconhecidos.
w) Só estás bem onde não estás.
x) Alguém ganha a lotaria todas as semanas.
y) Todas as mães são mães de alguém.
z) Algumas pessoas amam os que não amam ninguém.

3. *Regras de dedução natural para o quantificador universal*

Os nomes próprios de *LQ*, n, m, ..., denotam um indivíduo invariável no domínio de uma interpretação. Se todos os objectos de um domínio tiverem uma certa propriedade, qualquer objecto específico do domínio com um certo nome terá essa propriedade. Visto isto, queremos uma regra que nos autorize a passar de uma fórmula da forma $\forall x\, Ax$ para uma fórmula An na qual n substitui todas as ocorrências de x em Ax. A conclusão, An, dependerá das mesmas premissas de que $\forall x\, Ax$ depender, ou da própria $\forall x\, Ax$, se ela for uma premissa. Para ilustrar esta regra da *eliminação do quantificador universal*, que referiremos como E$\forall$, considere o seguinte argumento:

> Icabod é uma pessoa. Todas as pessoas são mortais.
> Logo, Icabod é mortal.

Usando n para «Icabod», Px para «x é uma pessoa» e Mx para «x é mortal» a formalização é a seguinte:

$$Pn,\ \forall x\,(Px \rightarrow Mx) \vdash Mn$$

Repare que usámos o sinal sintáctico de argumento. Não há um análogo das tabelas de verdade que possa ser usado para estabelecer estes argumentos como válidos (a razão de ser disto será dada no capítulo 7). Desenvolveremos um sistema de regras de dedução natural que usaremos para mostrar que os argumentos são válidos. Assim, nesta fase usamos $\vdash$ e não $\models$ ao formular os argumentos. No capítulo 7 mostraremos como definir $\models$ e referiremos o facto de se poder mostrar que $\vdash$ e $\models$ coincidem, como na lógica proposicional. Contudo, para estabelecer que um sequente semântico é correcto temos em geral de mostrar que o sequente sintáctico correspondente é correcto.

A derivação do sequente anterior é a seguinte:

Prem	(1)	Pn	
Prem	(2)	$\forall x\,(Px \rightarrow Mx)$	
2	(3)	$Pn \rightarrow Mn$	2 E$\forall$
1,2	(4)	Mn	1,3 E$\rightarrow$

De facto, precisamos de uma regra da eliminação do quantificador universal mais forte do que a que até agora foi dada, pois temos frequentemente de falar de um objecto ao levar a cabo os nossos argumentos — mesmo onde não seria apropriado usar um nome próprio. Por exemplo, na geometria elementar começa-se com algumas regras gerais acerca de, digamos, todos os triângulos. Com o objectivo de estabelecer o teorema de Pitágoras, que afirma que o quadrado da hipotenusa de um triângulo rectângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, afirmamos o seguinte: seja R um triângulo rectângulo. Seguidamente, concluímos que R tem as propriedades, sejam elas quais forem, que as verdades gerais atribuem a qualquer triângulo rectângulo. O raciocínio acerca do triângulo R conduz à conclusão de que o quadrado da hipotenusa de R é igual à soma do quadrado dos outros dois lados. Concluímos então que o teorema de Pitágoras se aplica a qualquer triângulo rectângulo.