MAE0221 - Probabilidade
Segunda Lista de Exercícios

1. Sejam A, B, C eventos em $\Im$. Ache expressões para os seguintes eventos:

   A) Somente A ocorre.

   B) Os três eventos ocorrem.

   C) A e B ocorrem, mas C não ocorre.

   D) Pelo menos dois ocorrem

   E) No máximo dois ocorrem.

   F) Pelo menos um ocorre.

   G) Exatamente um ocorre.

   H) Nenhum ocorre.

   I) No máximo um ocorre.

   J) Exatamente dois ocorrem.

2. Entre os dígitos $1, 2, 3, 4, 5$, dois são selecionados casualmente e sem reposição. Qual a probabilidade de que um algarismo impar seja selecionado:

   A) Na primeira vez;

   B) na segunda vez;

   C) nss duas vezes?

3. Três bolas são distribuidas casualmente em três urnas. Sejam os eventos Z_i, U_i, D_i, T_i, $i = 1, 2, 3$ os eventos de que "A urna i contenha 0, 1, 2, 3 bolas", respectivamente.

   Mostre que $Z_1 \cap Z_2 = T_3$; $U_1 \cap U_2 \subseteq U_3$; $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $T_1 \subset Z_2$ e verifique que

$$P(U_1 \cup U_2) = P(U_1) + P(U_2) - P(U_1 \cap U_2).$$

4. Uma moeda é lançada até que pela primeira vez o mesmo resultado aparece por duas vezes consecutivas. A cada possível resultado de n lançamentos atribua probabilidade $\frac{1}{2^n}$. Calcule a probabilidade dos eventos:

   A) O experimento termina antes do sexto lançamento;

   B) Um número par de lançamentos é necessário.

5. Mostre que: A)

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - ... = 0$$

   B) Se $n > 1$,

$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - ... = 0.$$

   C)

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + ... = n2^{n-1}.$$

   D)

$$\binom{-a}{k} = (-1)^k \binom{a+k-1}{k}.$$

E)

$$\sum_{i\in Z}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}t^i = \binom{n}{k}(1+t)^k.$$

F)

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{a}{j}\binom{b}{n-j} = \binom{a+b}{n}.$$

6. Prove ou dê contra exemplos para as relações abaixo onde A e B são eventos e $P(A) > 0), P(B) > 0$

   A) Se $P(A|B) > P(A)$, então $P(B|A) > P(B)$

   B) SE $P(B|A^c) = P(B|A)$, então A e B são independentes.

   C) Se A e B são eventos mutuamente exclusivos então são necessáriamente independentes a menos que um deles seja o evento $\emptyset$.

7. Duas pessoas jogam, cada uma, uma moeda n vezes. Qual a probabilidade de que ambos obtenham o mesmo número de caras?

8. Qual a probabilidade de que em cinco lançamentos de uma moeda tenha uma sequência de pelo menos três caras?

9. Em um torneio mundial, 16 países são divididos em 4 grupos de 4 países cada. Qual a probabilidade de que dois países selecionados estejam no mesmo grupo?

10. Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos em $\Im$. Prove que

    A)

$$P(\cup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

    B)

$$P(\cup_{k=1}^{n} A_k) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j).$$