1. TÓPICO 1

AULA 1 - Convergência e Continuidade da Probabilidade.

1.1. **AULA 1 - Introdução. Convergência de Sequências de Eventos.**

Definição 1.1. Em relação a uma sequência de números reais, $(a_n)_{n\geq 1}$, definimos o limite superior de $(a_n)_{n\geq 1}$ ao número real $\overline{a} = \limsup a_n$, com

$$\overline{a} = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} a_k$$

e definimos o limite inferior de $(a_n)_{n\geq 1}$ ao número real $\underline{a} = \liminf a_n$, com

$$\underline{a} = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Se $\overline{a} = \underline{a} = a$ definimos o valor comum, a, como sendo o limite da sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ e denotamos $a = \lim a_n = \lim_{n\uparrow\infty} a_n$.

Exemplo 1.2. Assim, se consideramos $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$, temos

$$\overline{a} = \inf_{n\geq 1} \sup\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ...\} = \inf\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\} = 0$$

e

$$\underline{a} = \sup_{n\geq 1} \inf\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ...\} = \sup\{0\} = 0.$$

Portanto $\lim_{n\uparrow\infty} \frac{1}{n} = 0$

Exemplo 1.3. Se consideramos a sequência $a_n = (-1)^n(\frac{n+1}{n})$ temos

$$\overline{a} = \inf_{n\geq 1} \sup\{(-1)^n(1+\frac{1}{n}), (-1)^{n+1}(1+\frac{1}{n+1}), (-1)^{n+2}(1+\frac{1}{n+2}), ...\} =$$

$$\inf_{n\geq 1} \sup\{(1+\frac{1}{2n}), (1+\frac{1}{2n+2}), ...\} = \inf\{(1+\frac{1}{2}), (1+\frac{1}{4}), ..., (1+\frac{1}{2n}), ...\} = 1$$

e

$$\underline{a} = \sup_{n\geq 1} \inf\{(-1)^n(1+\frac{1}{n}), (-1)^{n+1}(1+\frac{1}{n+1}), (-1)^{n+2}(1+\frac{1}{n+2}), ...\} =$$

$$\sup_{n\geq 1} \inf\{-(1+\frac{1}{2n+1}), -(1+\frac{1}{2n+3}), ...\} =$$

$$\sup\{-(1+\frac{1}{3}), -(1+\frac{1}{5}), ..., -(1+\frac{1}{2n+1}), ...\} = -1.$$

Portanto $\overline{a} = 1 \neq -1 = \underline{a}$ e dizemos que o limite não existe.

Observação 1.4. Analiticamente, podemos colocar uma condição necessária e suficiente para que $a = \lim a_n = \lim_{n\uparrow\infty} a_n$ exista:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \quad | \quad se \quad n \geq n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon.$$

Estamos interessados em estudar o limite de sequências de eventos aleatórios e devemos fixar um espaço de probabilidade, $(\Omega, \Im, P)$, onde serão definidas as operações de interesse.

Definição 1.5. Em relação a uma sequência de conjuntos $(A_n)_{n\geq 1}$, definimos o limite superior de $(A_n)_{n\geq 1}$ ao conjunto $\overline{A} = \limsup A_n$ com

$$\overline{A} = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

e definimos o limite inferior de $(A_n)_{n\geq 1}$ o conjunto $\underline{A} = \liminf A_n$, com

$$\underline{A} = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

Se $\overline{A} = \underline{A} = A$ definimos o conjunto A como sendo o limite da sequência $(A_n)_{n\geq 1}$ e denotamos $A = \lim A_n = \lim_{n\uparrow\infty} A_n$.

Se consideramos a sequência de conjuntos $A_n = (\frac{-1}{n}, \frac{n}{n+1}]$ temos

$$\underline{A} = \cup_{n\geq 1}\{(\frac{-1}{n}, \frac{n}{n+1}] \cap (\frac{-1}{n+1}, \frac{n+1}{n+2}] \bigcap ....\} = \bigcup_{n\geq 1} [0, \frac{n}{n+1}] = [0,1).$$

e

$$\overline{A} = \bigcap_{n\geq 1} \{(\frac{-1}{n}, \frac{n}{n+1}] \bigcup (\frac{-1}{n+1}, \frac{n+1}{n+2}] \bigcup ....\} = \bigcap_{n\geq 1} (\frac{-1}{n}, 1) = [0,1).$$

Portanto $\underline{A} = \overline{A} = \lim A_n = [0,1)$.

Observação 1.6. Podemos interpretar o limite inferior de uma sequência de conjuntos $(A_n)_{n\geq 1}$, como sendo o conjunto dos elementos que pertencem a todos os A_n, a menos de um numero finito de índices. O limite superior é o conjunto de elementos que pertencem a um número infinito dos A_n.

Obviamente temos

$$\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$$

de forma que

$$P(\liminf A_n) \leq P(\limsup A_n).$$

É conveniente observar as Leis de Morgan:

$$(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k)^c = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k^c,$$

$$(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k)^c = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k^c$$

e portanto, se o limite existe, $(\lim A_n)^c = \lim A_n^c$.

Definição 1.7. Uma sequência de conjuntos $(A_n)_{n\geq 1}$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $A_n \subseteq A_{n+1}, \forall n \geq 1$ $(A_n \supseteq A_{n+1}, \forall n \geq 1)$.

Lema 1.8. *Se a sequência de conjuntos* $(A_n)_{n\geq 1}$ *é crescente (decrescente), então* $\lim A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ $(\lim A_n = \bigcap_{n\geq 1} A_n)$.
Prova

Se $(A_n)_{n\geq 1}$ *é crescente,* $A_n \subseteq A_{n+1}, \forall n \geq 1$ *temos*

$$\liminf A_n = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcup_{n\geq 1} A_n$$

e

$$\limsup A_n = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k = \bigcup_{n\geq 1} A_n$$

Consequentemente $\lim_{n\uparrow\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n$

Se $(A_n)_{n\geq 1}$ *é decrescente, então* $(A_n^c)_{n\geq 1}$ *é crescente, e*

$$(\lim A_n)^c = \lim A_n^c = \bigcup_{n\geq 1} A_n^c = (\bigcap_{n\geq 1} A_n)^c$$

e portanto $\lim_{n\uparrow\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} A_n$.

Observação 1.9. Uma função $f(x)$ definida no conjunto dos números reais a valores reais, é contínua em um número real a se, e somente se, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, isto é

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \delta > 0 \ \ | \ \ se \ \ |x-a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Uma condição equivalente em termos de sequência de números reais é:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a), \forall (a_n)_{n\geq 1}, \lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

isto é

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists n_0 \ \ | \ \ se \ \ n \geq n_0 \to |f(a_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

Exemplo 1.10. Seja P uma probabilidade definida por

$$P((,t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}, \ \ \forall t \geq 0, \ \ \lambda > 0.$$

Considere aa ocorrência dos eventos $A_n = \{[0, \frac{n}{n+1}]\}$. Observe que $(A_n)_{n\geq 1}$ é crescente e que $\lim A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n = \{[0,1)\}$. Portanto

$$P(\lim A_n) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda}.$$

Por outro lado,

$$P(A_n) = \int_0^{\frac{n}{n+1}} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\frac{n\lambda}{n+1}}$$

e

$$\lim P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} 1 - e^{-\frac{n\lambda}{n+1}} = 1 - e^{-\lambda} = P(\lim A_n).$$

e podemos pensar que a medida de probabilidade é uma função conjuntos, que é contínua. Este fato é verdadeiro.

Teorema 1.11. *Seja $(\Omega, \Im, P)$ um espaço de probabilidade e $(A_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de eventos em $\Im$, Se o limite da sequência $(A_n)_{n\geq 1}$ existe, então*

$$P(\lim A_n) = \lim P(A_n).$$

Prova

Se $(A_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência crescente de eventos, $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. *Definimos $B_1 = A_1$ e $B_n = A_n - A_{n-1}$ de forma que*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Portanto

$$P(\lim A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = P(B_1) + \sum_{n=2}^{\infty} P(B_n) =$$

$$P(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} P(A_n - A_{n-1}) = P(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} [P(A_n) - P(A_{n-1})] =$$

$$P(A_1) + \lim_{m\to\infty} \sum_{n=2}^{m} [P(A_n) - P(A_{n-1})] = \lim_{m\to\infty} P(A_m)$$

No caso em que a sequência $(A_n)_{n\geq 1}$ é decrescente, $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *e $(A_n^c)_{n\geq 1}$ é uma sequência crescente de eventos e* $\lim A_n^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c$.

Portanto

$$P(\lim A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 - P((\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c) = 1 - P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c) =$$

$$1 - P(\lim A_n^c) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = \lim_{n\to\infty}(1 - P(A_n^c)) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

No caso geral temos

$$P(\limsup A_n) = P(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k) = P(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k\geq n} A_k) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k\geq n} A_k) = \limsup P(\bigcup_{k\geq n} A_k) \geq$$

$$\limsup P(A_n) \geq \liminf P(A_n) \geq \liminf P(\bigcap_{k\geq n} A_k) = \lim P(\bigcap_{k\geq n} A_k) =$$

$$P(\lim \bigcap_{k\geq n} A_k) = P(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k) = P(\liminf A_n).$$

Contudo, como por hipótese $\lim A_n$ *existe,* $P(\limsup A_n) = P(\lim A_n) = P(\liminf A_n)$. *Considerando tais igualdades e as desigualdades acima concluimos*

$$P(\lim A_n) = \limsup P(A_n) = \liminf P(A_n) = \lim P(A_n).$$

Exemplo 1.12. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição contínua F. Então $P(X = x) = 0, \forall x$.

Considere a sequência decrescente de intervalos, de

$$A_n = (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$$

de forma que

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$$

e

$$P(X \in \{x\}) = P(X \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]) = \lim_{n\to\infty} P(X \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(x - \frac{1}{n} < X \leq x + \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}[F(x + \frac{1}{n}) - F(x - \frac{1}{n})] = F(x^+) - F(x^-) = 0.$$

Exemplo 1.13. Seja X uma variável aleatória. Então ,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k \in N \quad | \quad P(|X| > k) < \varepsilon.$$

Prova

Como X assume valores nos reais, $P(|X| = \infty) = 0$. Considere a sequência decrescente $\{|X| > n\}$, de forma que

$$\{|X| = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{|X| > n\}$$