# Universidade de São Paulo
# Escola de Engenharia de São Carlos

## SEL 364 – Controle não linear aplicado
## Professora Vilma Alves de Oliveira

Exercício 1 – Plano de Fase

Aluno: Fabrício de Almeida Brito – 8006647

# Enunciado

Dado o sistema não linear:

$$\ddot{x} + 0{,}6.\dot{x} + 3.x + x^2 = 0$$

Pede-se:

a) Encontrar a representação em espaço de estados;

b) Localizar os pontos de equilíbrio;

c) Determinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio;

d) Plotar o retrato de fase próximo aos pontos de equilíbrio identificando-os. (Escolher diferentes condições iniciais e utilizar o comando hold no Matlab);

e) Plotar o retrato de fase completo do sistema;

f) Escolher uma condição inicial próximo aos pontos de equilíbrio e plotar a solução em relação ao tempo.

# Sistema não linear

Modelagem em espaço de estados:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \\ f_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \\ \dots \\ f_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \end{cases}$$

Dada a equação não linear:

$$\ddot{x} + 0{,}6.\dot{x} + 3.x + x^2 = 0$$

Fazendo $x = x_1$ e $\dot{x} = x_2$ temos:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \dot{x} = x_2 \\ \dot{x_2} = \ddot{x} = -0{,}6.x_2 - 3.x_1 - {x_1}^2 \end{cases}$$

Então:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -0,6.\,x_2 - 3.\,x_1 - {x_1}^2 \end{bmatrix}$$

# Pontos de equilíbrio

Determinação dos pontos de equilíbrio:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = 0$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -0{,}6.\,x_2 - 3.\,x_1 - {x_1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \; ou \; x_1 = -3 \end{cases}$$

Logo os pontos de equilíbrio do sistema são: $Q_1 = (0{,}0)$ e $Q_2 = (-3{,}0)$.

A seguir, linearizaremos o sistema na vizinhança dos pontos de equilíbrio para verificar a estabilidade de cada um deles.

# Linearização do sistema

A linearização do sistema pode ser realizada através da utilização do primeiro método de Lyapunov.

Para um sistema da forma:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$$

Sua linearização é dada por:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$

Sendo:

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e, u=u_e} \text{ e } B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x=x_e, u=u_e}$$

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=x_e, u=u_e} \qquad e\ B = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{x=x_e, u=u_e}$$

Assim,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(2.x_{1e} + 3) & -0{,}6 \end{bmatrix} \text{e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Estabilidade dos pontos de equilíbrio

Como a linearização é válida apenas para uma vizinhança do ponto de equilíbrio, obtivemos duas linearizações para o sistema.

Na vizinhança de $Q_1 = (0,0)$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0,6 \end{bmatrix} \text{e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de A são: $\lambda_{1,2} = -0,3 \pm j.1,709$

Autovalores complexos conjugados com parte real negativa → assintoticamente estável (foco, hiperbólico).

Na vizinhança de $Q_2 = (-3{,}0)$:

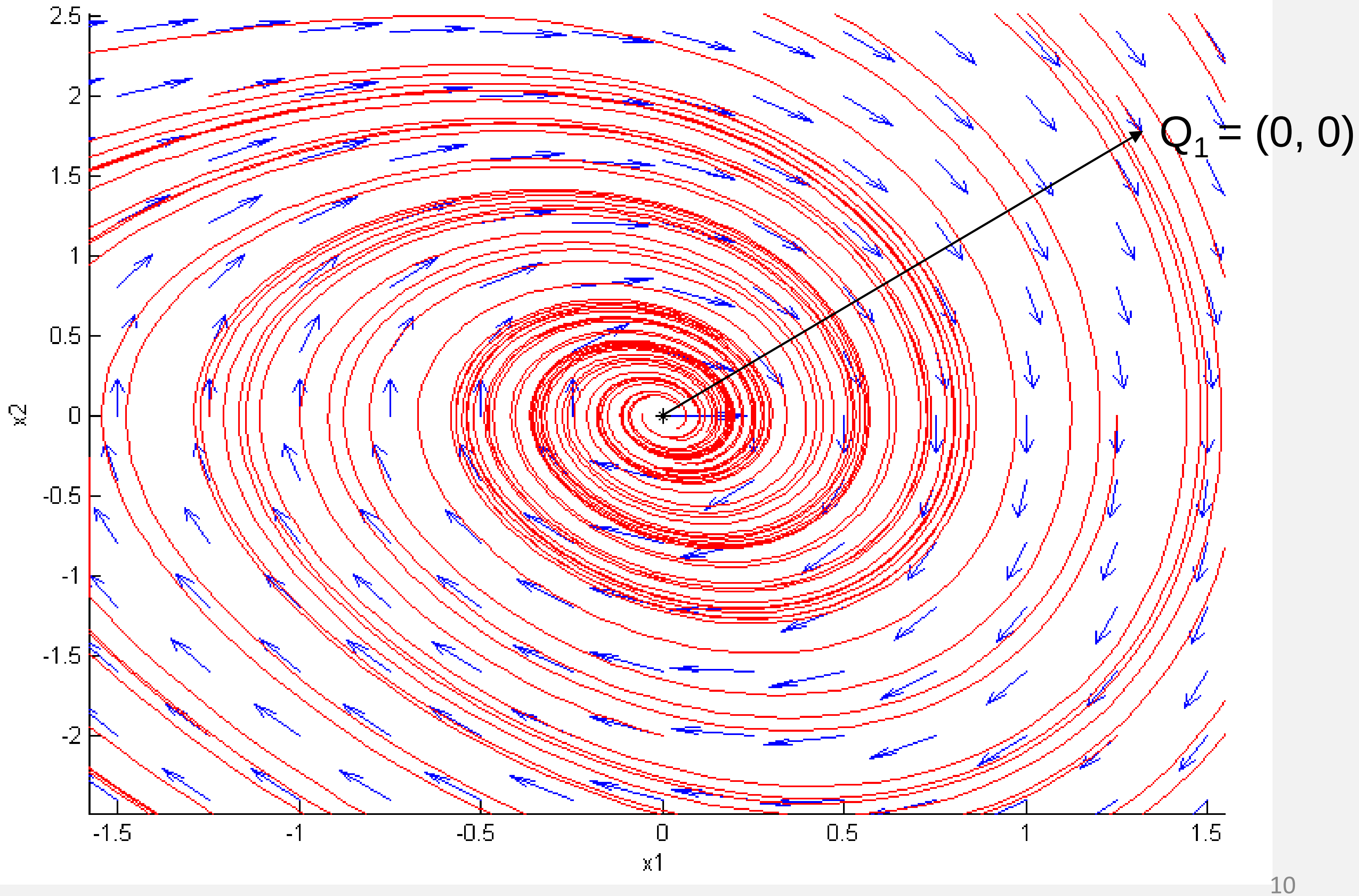
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -0{,}6 \end{bmatrix} \text{e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de A são: $\lambda_1 = -2{,}0578 \ e \ \lambda_2 = 1{,}4578$

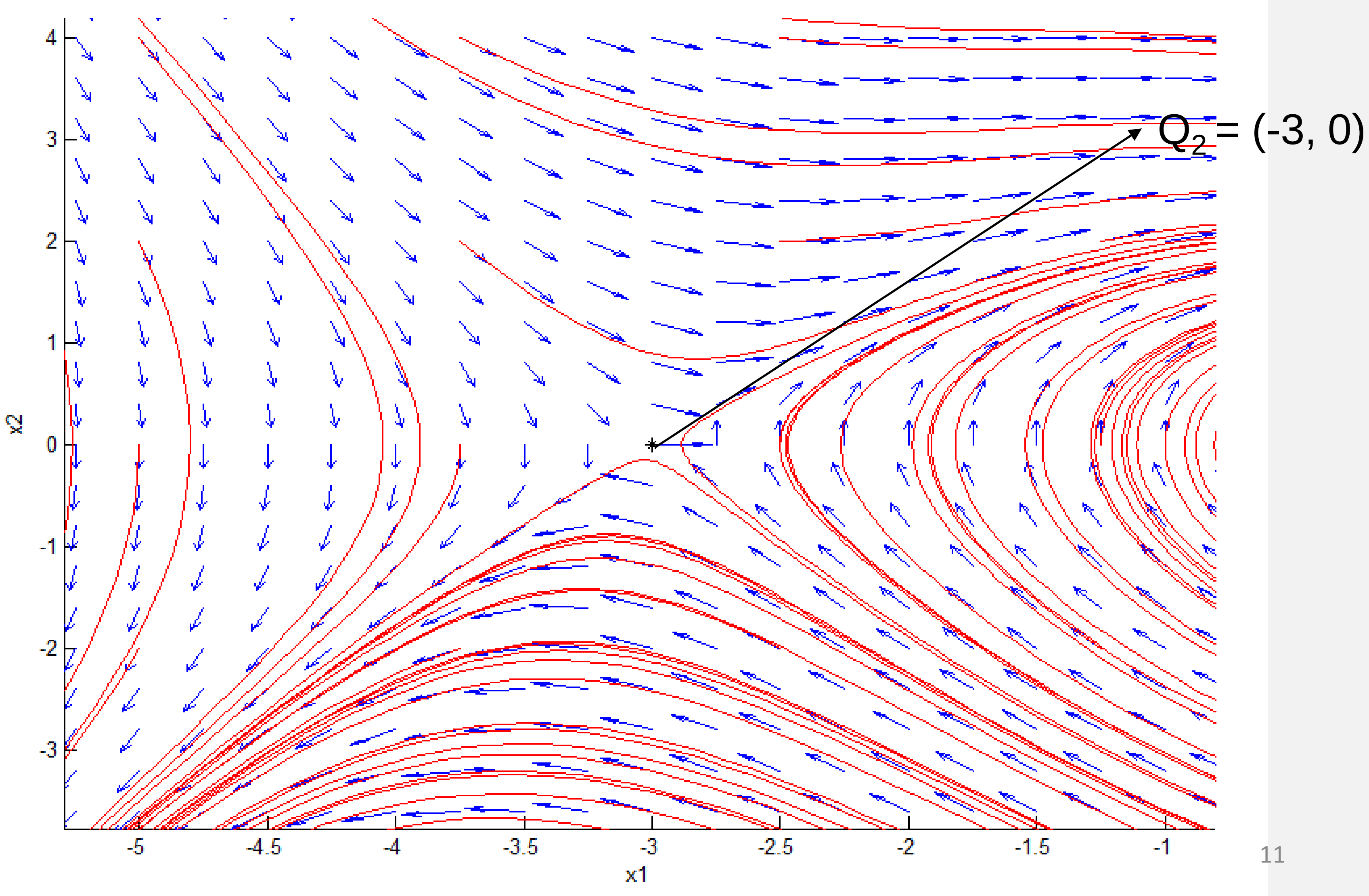
Autovalores reais, porém $\lambda_2$ é maior do que zero → instável (sela, hiperbólico).

# Retratos de fase

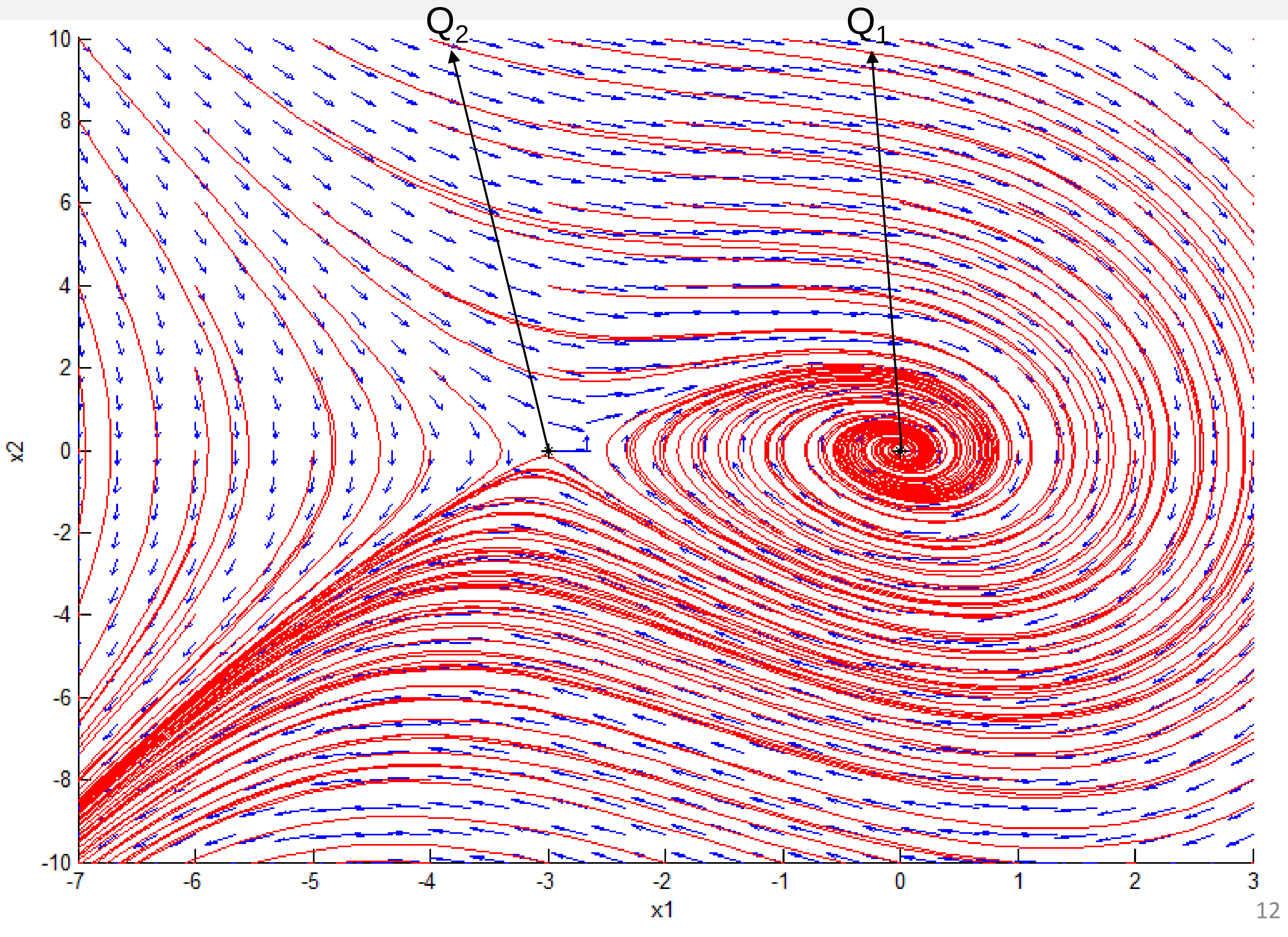
Retrato de fase na vizinhança de $Q_1 = (0, 0)$



## Retrato de fase na vizinhança de $Q_2 = (-3, 0)$



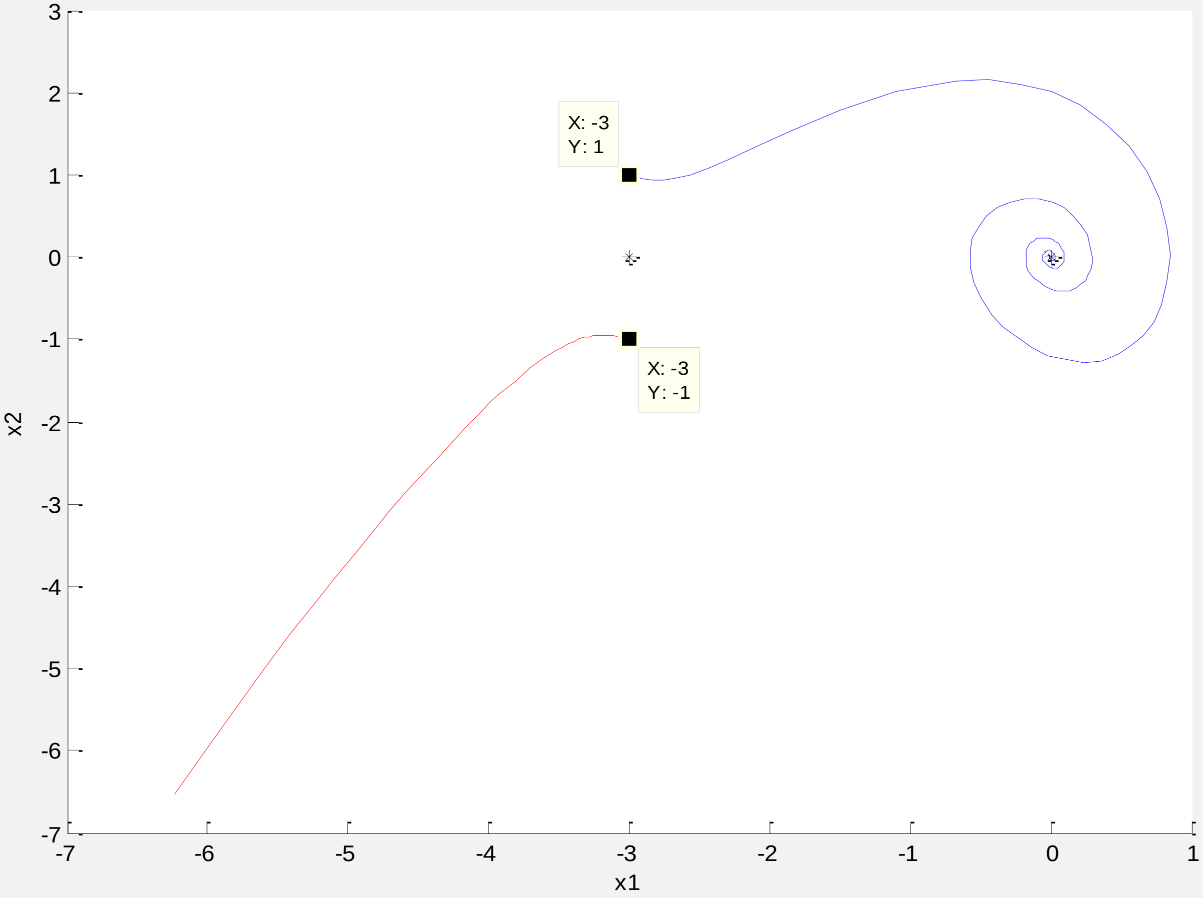
# Retrato de fase completo do sistema



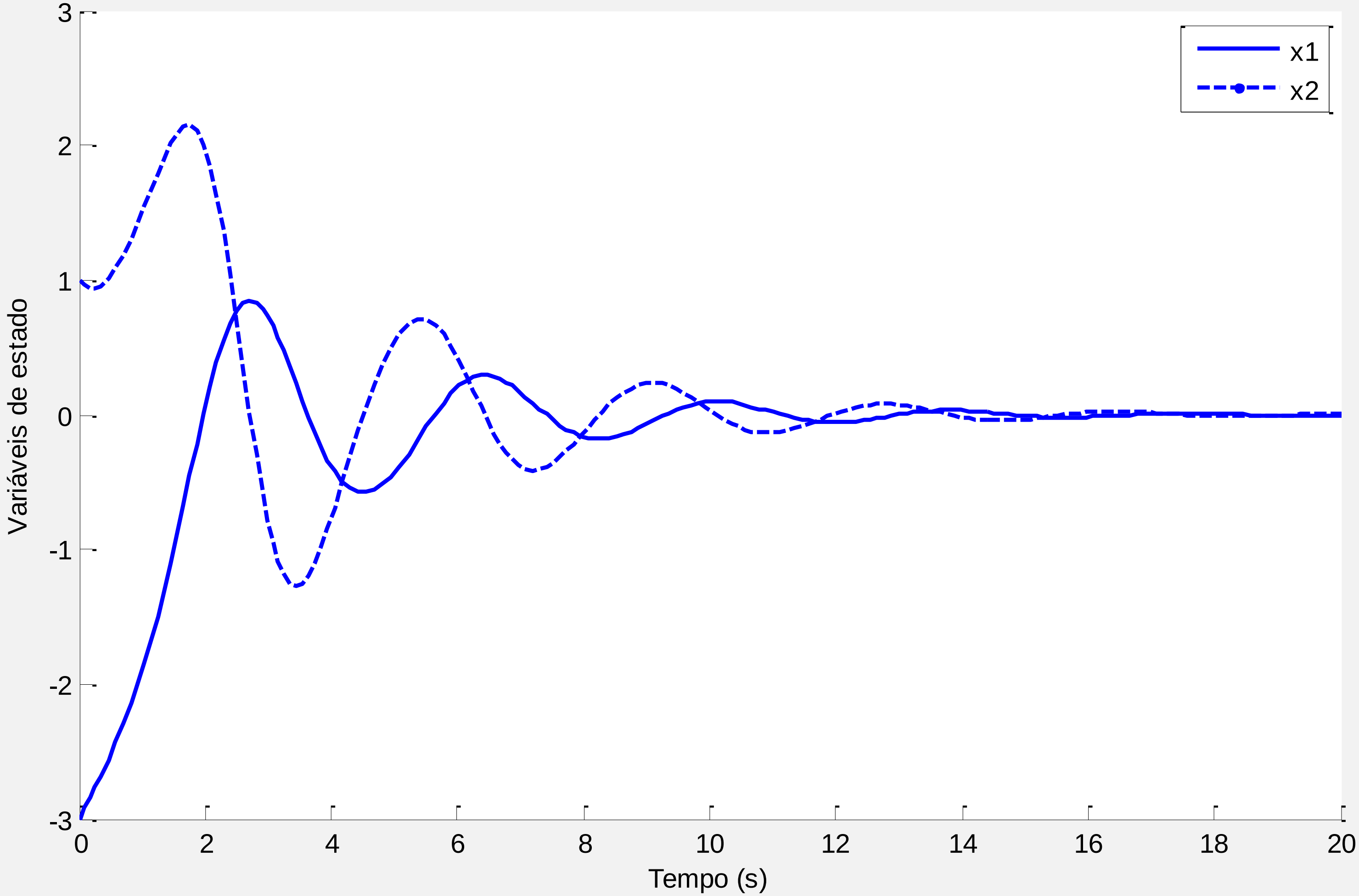
# Solução em relação ao tempo

Solução do sistema para duas condições iniciais:

$Xi_1 = (-3,1)$ e $Xi_2 = (-3,-1)$



# Solução para $Xi_1 = (-3,1)$



# Solução para $Xi_2 = (-3,-1)$