1. CAPÍTULO 1

Probabilidades

1.1. **Introdução às Probabilidades.** Um experimento aleatório define um Espaço Amostral Ω que é o conjunto de todos os resultados possíveis de tal fenômeno.

Um espaço amostral Ω é discreto quando é um conjunto enumerável de elementos. Quando não é enumerável, no nosso contexto, é um subconjunto da reta real, $\Re$, denominado espaço amostral contínuo.

Se observamos três lançamentos consecutivos de uma moeda e observamos a sequência de caras (c) e coroas (r) obtemos o espaço amostral discreto

$$\Omega = \{(c,c,c),(c,c,r),(c,r,c),(r,c,c),(c,r,r),(r,c,r),(r,r,c),(r,r,r)\}.$$

A um determinado experimento aleatório podemos associar espaços amostrais diferentes. Quando lançamos uma moeda três vezes e estamos interessados no número de caras e não na sequência de caras e coroas temos

$$\Omega = \{0,1,2,3\}.$$

Ao lançarmos uma dado observamos a face voltada para cima temos

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\},$$

que é discreto e finito.

Podemos contar o número de peças defeituosas que saem de uma linha de produção e o espaço amostral discreto é

$$\Omega = \{n : n \in \mathbf{N}\},$$

onde $\mathbf{N}$ representa o conjunto dos números naturais, infinito enumerável .

Se monitoramos continuamente a duração de uma lâmpada, desde o inicio de sua utilização, temos um espaço amostral contínuo

$$\Omega = \{t \geq 0 : t \in \Re\}.$$

A escolha aleatória de um ponto em um círculo no plano cartesiano de raio igual a um e centro na origem produz o espaço amostral contínuo no plano cartesiano.

$$\Omega = \{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}.$$

Ao analisarmos os rendimentos diários de um grupo de ações de empresas de grande porte, na BOVESPA, temos

$$\Omega = \{x\% : -100 \leq x \leq 100\},$$

que é contínuo, um intervalo dos números reais.

Uma outra definição essencial é a de eventos aleatórios. Um evento aleatório é qualquer subconjunto do espaço amostral Ω e é denotado por letras latinas maiúsculas (A, B, C, ...).

Se lançamos uma moeda três vezes e estamos interessado no evento A, da ocorrência de ao menos duas caras, temos

$$A = \{(c, c, c), (c, c, r), (c, r, c), (r, c, c)\},$$

se nosso interesse é a sequência de caras e coroas e

$$A = \{2, 3\},$$

se estamos interessados no número de caras.

Cumpre observar que, na realização de determinado experimento, um evento ocorre se, e somente se, um de seus elementos ocorre.

Ao aplicarmos em ações de empresas de grande porte, na BOVESPA, desejamos analisar a chance do evento B,

$$B = \{x\% : x \geq 3\},$$

de que uma valorização por mais de 3% ocorra com alta probabilidade.

Ao escolhermos um ponto no círculo no plano cartesiano, de raio igual a um e centro na origem, qual a probabilidade de que esteja no círculo de raio $\frac{1}{3}$ e centro $(\frac{1}{3}, 0)$, isto é, qual é o valor de $P(C)$, onde

$$C = \{(x, y) : \sqrt{(x - \frac{1}{3})^2 + (y)^2} \leq \frac{1}{3}\}?$$

Por vezes estamos interessados nas ocorrências de alguns eventos ou nas ocorrências simultâneas de eventos que serão traduzidas pelas operações entre eles. Como, por sua vez, os eventos são subconjuntos do espaço amostral, estas são operações entre conjuntos que assumimos ser familiar ao leitor.

O evento Ω será denominado evento certo e o evento vazio, $\emptyset$, de evento impossível. Se A e B são dois eventos, dizemos que A esta contido em B e escrevemos $A \subset B$ se todo elemento de A pertencer a B. Se A é um evento, o seu complementar, denotado por A^c, é o conjunto dos elemento de Ω que não estão em A, definida como a diferença $A^c = \Omega - A$. A diferença entre dois eventos B e A, que denotamos $B - A$, é definida como o conjunto de elementos de B que não pertencem a A, isto é, $B - A = B \cap A^c$. Observe que a definição da diferença entre eventos não esta circunscrita à relação de contingência. Dado dois eventos A e B, a sua união $A \cup B$ é o conjunto de elementos de Ω que estão em A, ou em B. A sua intersecção, que denotamos $A \cap B$, é o conjunto de elementos de Ω que estão em A e em B simultaneamente. Dois eventos A e B são disjuntos se a sua intersecção é vazia, isto é $A \cap B = \emptyset$. Segue que $A \cap A^c = \emptyset$ e que $A \cup A^c = \Omega$, isto é, A e A^c são disjuntos e exaustivos, isto é, sua união é o espaço amostral.

É conveniente relembrarmos a propriedade distributiva entre eventos aleatórios. Se A, B e C são eventos aleatórios, a propriedade distributiva da intersecção em relação à união é definida por

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

e da união em relação à intersecção

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

As Leis de Morgam são de importância fundamental: Se A e B são eventos temos:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Tais leis são válidas para um conjunto enumerável de eventos. Se $(A_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de eventos, $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$, $\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k \geq n} A_k$, $\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k \geq n} A_k$, são eventos, em particular os dois últimos denominam-se limite inferior e limite superior da sequência.

As Leis de Morgam se estendem:

$$(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \cap_{n=1}^{\infty} A_n^c, \quad (\cap_{n=1}^{\infty}) A_n)^c = \cup_{n=1}^{\infty} A_n^c.$$

Exemplo 1.1. Joga-se um dado e observa-se a face voltada para cima. Claramente $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Seja A o evento de que a face voltada para cima é par, isto é $A = \{2, 4, 6\}$.

Assim, o complementar $A^c = \{1, 3, 5\}$ é o evento de que a face é impar. Claramente $A \cup A^c = \Omega$ e $A \cap A^c = \emptyset$.

Seja C o evento de que a face voltada para cima é maior do que 3 e D o o evento de que a face voltada para cima é maior ou igual a 3, de forma que $C = \{4, 5, 6\}$ e $D = \{3, 4, 5, 6\}$. Temos então que C esta contido em D , isto é, $C \subset D$. A diferença entre D e C é

$$D - C = D \cap C^c = \{3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3\} = \{3\}.$$

A diferença de A e C é

$$A - C = A \cap C^c = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3\} = \{2\}.$$

1.2. **Espaço de Probabilidade.** Dado um experimento aleatório e o respectivo espaço amostral Ω, construiremos uma medida de probabilidade sobre o conjunto de todos os eventos através de suposições teóricas que satisfaçam certos axiomas.

Exemplo 1.2. No experimento em que um dado justo é lançado a face voltada para cima é um elemento do espaço amostral $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Como o dado é equilibrado associamos, por razões lógicas, a cada elemento de Ω a probabilidade $\frac{1}{6}$. Assim

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

A probabilidade de face par é

$$P(A) = P(\{2,4,6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

e podemos calcular a probabilidade de qualquer evento como a soma das probabilidades de seus elementos considerados como conjuntos unitários (pontos amostrais).

Resumindo, a probabilidade é uma função de conjuntos (face par por exemplo) e para defini-la em um espaço amostral , Ω, consideramos a classe de todos os subconjuntos (eventos) de Ω, $\Im$. Esta classe, denominada σ-álgebra, deve ser fechada sob as operações de complementar, união e intersecção de um número finito ou infinito enumerável de eventos.

Definição 1.3. Uma coleção não vazia $\Im$, de subconjuntos de Ω, é uma σ-álgebra se, e somente se

a) Se $A \in \Im$, então $A^c \in \Im$

b) Se $(A_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de subconjuntos de $\Im$, então $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Im$ e $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Im$.

Definimos P em $\Im$ satisfazendo os Axiomas de Kolmogorov:

Definição 1.4.

$$P : \Im \to [0,1]$$
$$A \mapsto P(A)$$

satisfazendo

a) $P(\Omega) = 1$

b) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ quando os A_i são disjuntos dois a dois, isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$.

Observação 1.5. 1) A soma em b) da definição pode ser reduzida a uma soma finita se consideramos $\emptyset$ os eventos não pertencentes à soma.

2) Em um espaço amostral discreto, $\Im$ pode ser considerado como o conjunto das partes de Ω.

3) Se o espaço amostral Ω é o resultado de um experimento quantitativo contínuo, a σ-algebra não é, certamente, enumerável e não podemos defini-la como o conjunto das partes de Ω.

Para termos uma noção de como abordar a questão, observe que qualquer subconjunto dos números reais pode ser obtido através de operações, em um número finito ou infinito enumerável, de intervalos da forma $(-\infty, t]$. Entre outras operações, exemplificamos:
$(t, \infty) = \overline{(-\infty, t]}$;
$(s, t] = (-\infty, t] - (-\infty, s], s < t$;
$\{t\} = \cap_{n=1}^{\infty}(t - \frac{1}{n}, t + \frac{1}{n}]$.

Definição 1.6. Definimos β como sendo a classe de subconjuntos dos reais obtida através das operações de reunião, intersecção, complementar, em número finito ou infinito, de subconjuntos na forma $(-\infty, t], \forall t \in \Re$. β é denominada σ-álgebra de Borel na reta.

Nesta classe definimos uma medida de probabilidade que satisfaça os axiomas de Kolmogorov.

Exemplo 1.7. Ao monitorarmos continuamente a duração de uma lâmpada, desde o inicio de sua utilização, temos um espaço amostral contínuo $\Omega = \{t \geq 0 : t \in \Re\}$. Se a lâmpada tem tempo de vida com distribuição exponencial de parâmetro λ, a probabilidade de sobreviver ao instante t é:

$$P((t, \infty)) = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t}.$$

4) À tripla ordenada $(\Omega, \Im, P)$ denominamos espaço de probabilidade.

Associado a um espaço amostral podemos ter diferentes medidas de probabilidades, que dependem das suposições consideradas.

Exemplo 1.8. Consideramos que no lançamento de um dado a probabilidade da face voltada para cima é diretamente proporcional ao número da face. Assim $P(Face\ \ i) = P(\{i\}) = \alpha i$, $\alpha > 0$.

Sabemos que

$$P(\Omega) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) =$$

$$\alpha.1 + \alpha.2 + \alpha.3 + \alpha.4 + \alpha.5 + \alpha.6 = \alpha.21 = 1.$$

Portanto a constante de proporcionalidade α é igual a $\frac{1}{21}$ e a probabilidade de obtermos face par no lançamento deste dado é

$$P(A) = P(\{2,4,6\}) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21}$$

Assim, apesar de não intuitivo, o último modelo de probabilidade é matematicamente perfeito pois satisfaz os axiomas de Kolmogorov.

Em resumo, em um espaço amostral discreto , podemos definir uma medida de probabilidade associando a cada ponto amostral uma probabilidade p, $0 \leq p \leq 1$ que somem 1, isto é

Se $\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_n, ...\}$ e denotamos $P(\{w_i\}) = p_i, i \geq 1$, com $0 \leq p_i \leq 1$ e $\Sigma_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, temos

$$P(\Omega) = P(\cup_{i=1}^{\infty}\{w_i\}) = \Sigma_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Se $A \subset \Omega$ tem n elementos, digamos, $A = \{w_{k_1}, w_{k_2}, ..., w_{k_n}\}$, temos

$$P(A) = P(\cup_{i=1}^{n}\{w_{i_k}\}) = \Sigma_{i=1}^{n} P(\{w_{i_k}\}).$$

Em particular, definimos um espaço amostral discreto e finito como equiprovavel, ou uniforme, quando a cada um de seus pontos associamos a mesma probabilidade. Claramente, se a cardinalidade do espaço amostral é n, $\sharp(\Omega) = n$, a probabilidade associada a cada um de seus elemento é $p = \frac{1}{n}$.

Exemplo 1.9. A escolha aleatória, ou casual, de um elemento da população finita $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, é através da distribuição uniforme que associa a cada elemento a probabilidade $\frac{1}{n}$.

Exemplo 1.10. A escolha casual de um ponto em um intervalo da reta $(s, t]$ tem distribuição uniforme nesse intervalo. A probabilidade de que um ponto escolhido caia na primeira metade do intervalo é

$$P((s, \frac{t+s}{2}]) = \int_{s}^{\frac{t+s}{2}} \frac{1}{t-s} dx = \frac{1}{t-s}[\frac{t+s}{2} - s] = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 1.11. A escolha aleatória de um ponto em um círculo no plano cartesiano de raio igual a um e centro na origem produz o espaço amostral contínuo no plano cartesiano

$$\Omega = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}.$$

Ao escolhermos um ponto no círculo no plano cartesiano, de raio igual a um e centro na origem com distribuição uniforme, qual a probabilidade de que esteja no círculo de raio $\frac{1}{3}$ e centro $(\frac{1}{3}, 0)$, qual é o valor de $P(C)$, onde

$$C = \{(x, y) : \sqrt{(x - \frac{1}{3})^2 + (y)^2} \leq \frac{1}{3}\}?$$

$$P(C) = \frac{\pi(\frac{1}{9})}{\pi 1^2} = \frac{1}{9}.$$

Exemplo 1.12. O que podemos dizer da ocorrência aleatória de eventos em $\Re^+$?

Seja $(N(t))_{t\geq 0}$ o processo estocástico que, para cada t, conta o número de eventos que ocorrem em $(0,t]$. O número de eventos no intervalo $(s,t]$ é denotado por $N(t)-N(s)$. A ocorrência aleatória de eventos no tempo se caracteriza pelas seguintes suposições:

I - $(N(t))_{t\geq 0}$ tem incrementos independentes, isto é, a distribuição das ocorrências em intervalos de tempos disjuntos são independentes: se $(s_1,t_1] \cap (s_2,t_2] = \emptyset$, então

$$P(N(t_1) - N(s_1) = i, N(t_2) - N(s_2) = j) =$$

$$P(N(t_1) - N(s_1) = i).P(N(t_2) - N(s_2) = j).$$

II - $(N(t))_{t\geq 0}$ tem incrementos estacionários, isto é, as ocorrências em intervalos de mesmo comprimento tem mesma distribuição:

$$P(N(t) - N(s) = k) = P(N(t-s) = k).$$

III - A probabilidade de uma ocorrência em um intervalo infinitesimal de tempo, $(t, t+\triangle t]$ é

$$P(N(\triangle t) = 1) = \lambda \triangle t + o(\triangle t),$$

onde $o(\triangle t)$ é tal que $\lim_{\triangle t \downarrow 0} \frac{o(\triangle t)}{t} = 0$.

IV - A probabilidade de mais de uma ocorrência em um intervalo infinitesimal de tempo, $(t, t+\triangle t]$ é

$$P(N(\triangle t) > 1) = o(\triangle t).$$

Observação 1.13. $o(t)$ representa uma função real que, quando $t \to 0$, $o(t) \to 0$ mais rapidamente, isto é $\frac{o(t)}{t} \to 0$. Por exemplo $f(t) = t^2$ é $o(t)$ pois $\lim_{t\downarrow 0} \frac{t^2}{t} = 0$, contudo, $f(t) = \sqrt{t}$ não é $o(t)$ pois $\lim_{t\downarrow 0} \frac{\sqrt{t}}{t} = \infty$.

Se o processo $(N(t))_{t\geq 0}$ satisfaz as suposições acima, então é um processo de Poisson. Pode-se provar que

$$P(N(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

Assim, os eventos são aleatórios no tempo se ocorrem de acordo com um processo de Poisson.

1.3. **Propriedades.** P1. Se A é um evento, $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Basta observarmos que $\Omega = A \cup A^c$ e, portanto, $1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$.

P2. Se A e B são eventos e se $A \subseteq B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Pela propriedade distributiva da intersecção em relação à união,

$$B = B \cap (A \cup A^c) = (B \cap A) \cup (B \cap A^c).$$

Como $(B \cap A)$ e $(B \cap A^c)$ são disjuntos, então

$$P(B \cap A^c) = P(B) - P(B \cap A).$$

Por hipótese $A \subseteq B$, $B \cap A = A$ e

$$P(B \cap A^c) = P(B) - P(A) \geq 0.$$

Concluimos que $P(B) \geq P(A)$.

P3.

Regra da Adição

Se A e B são eventos,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Podemos provar que o evento $A \cup B$ pode ser escrito como a união

$$A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$

cujos termos são disjuntos. Portanto

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B).$$

Contudo $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$ e $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$. Substituindo na expressão acima concluimos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Concluímos também que

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B),$$

uma desigualdade que pode ser indutivamente estendida para

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Podemos generlizar o reultado

Teorema 1.14. *Se $A_1, A_2, ..., A_N$ são eventos em $(\Omega, \Im, P)$, então*

$$P(\cup_{k=1}^{N} A_k) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \sum_{i_1<i_2<...<i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}).$$

Prova: *Para calcular $P(\cup_{k=1}^{N} A_k)$ devemos somar as probabilidades de todos os pontos amostrais, que estão contidos em pelo menos um dos eventos A_k, mas cada ponto deve ser considerado uma única vez. Seja w um ponto amostral qualquer que pertença a exatamente a n dentre os N eventos A_k. Sem perda de generalidade é possível enumerar os eventos, de tal forma que w pertença a $A_1, A_2, ..., A_n$, mas não pertença a $A_{n+1}, A_{n+2}, ..., A_N$. Então $P(\{w\})$ aparecerá como uma contribuição para as parcelas $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k})$ cujos índices estiverem compreendidos entre 1 e n. Portanto $P(\{w\})$ aparece n vezes como uma contribuição para $\sum_{i=1}^{N} P(A_i)$, $\binom{n}{2}$ vezes como uma contribuição para $\sum_{i<j}^{N} P(A_i \cap A_j)$, etc. Dessa forma, o fator associado a $P(\{w\})$ na soma é:*

$$n - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - ... \mp \binom{n}{n}.$$

Contudo este número é igual a 1 (compare-o com a expansão do binômio $(1-1)^n$).

1.4. **Espaço de Probabilidade Condicional.** Lançamos dois dados equilibrados observando a face voltada para cima. Este experimento tem como espaço amostral o conjunto

$$\Omega = \{(1,1); (1,2); ..., (1,6); (2,1); ....; (6,1); ..., (6,6)\}$$

com 36 elementos.

Suponha que cada ponto escolhido aleatoriamente em Ω tem probabilidade $P(\{w\}) = \frac{1}{36}$. Sejam os eventos

$$A = \{A \ \ soma \ \ das \ \ faces \ \ e \ \ igual \ \ a \ \ seis\}$$

e

$$B = \{O \ \ primeiro \ \ lancamento \ \ resultou \ \ face \ \ 4\}.$$

Após o primeiro lançamento verificamos que o evento B ocorreu. Se queremos calcular a probabilidade condicional da ocorrência do evento A, temos

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6}.$$

O primeiro lançamento induz um novo espaço amostral, Ω_B, denominado de traço de B em Ω:

$$\Omega_B = \{(4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (4,6)\}.$$

Podemos, então, considerar o conjunto das partes $\Im_B$ e definir, assumindo o Princípio da Preservação das Chances Relativas, uma medida de probabilidade $P(.|B)$

Definição 1.15.

$$P(|B) : \Im_B \to [0,1]$$
$$A \mapsto P(A|B)$$

satisfazendo

a) $P(\Omega_B|B) = 1$

b) $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$, quando os A_i são eventos disjuntos dois a dois, isto é $A_i \cap A_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j$.

O Princípio da Preservação das Chances Relativas assegura que, dada a ocorrência do evento B na primeira etapa, os resultados possíveis na segunda etapa, mantem as mesmas chances que tinha antes da realização da primeira etapa, isto é, $P(A|B) = \alpha P(A \cap B)$ onde $\alpha \in \Re^+$.

Aceitando este princípio temos:

$$P(\Omega_B|B) = \alpha P(\Omega_B \cap B) = \alpha P(B) = 1$$

e $\alpha = \frac{1}{P(B)}$ com $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Em adição

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n|B) = \frac{P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\cup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B))}{P(B)} =$$

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B)$$

onde $(A_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de eventos em $\Im_B$ disjuntos dois a dois.

Portanto o Espaço de Probabilidade Condicional $(\Omega_B, \Im_B, P(.|B))$ satisfaz os axiomas de Kolmogorov e esta bem definido, preservando todas as características e propriedades de um espaço de probabilidade. Se $P(B) = 0$ definimos $P(A|B) = 0$, para todo evento A.

Observação 1.16. Desta maneira as propriedades do espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$ continuam valendo em $(\Omega_B, \Im_B, P(.|B)$, por exemplo

$$P(C \cup D|B) = P(C|B) + P(D|B) - P(C \cap D|B).$$

P4. **Regra do Produto**

Para quaisquer eventos A e B, a probabilidade do evento $A \cap B$ é

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = P(B).P(A|B).$$

No exemplo que segue as propriedades das medidas de probabilidades são apresentadas em um espaço amostral equiprovável.

Exemplo 1.17. Um operador da Bolsa de Valores classifica seus 1000 clientes, os quais são conservadores ou arrojados entre os diversos setores da Economia. Em um pequeno resumo obteve a seguinte tabela onde os setores A, B, E e P são abreviações para os setores Agricula, Bancário, Eletrônico e Petróleo, respectivamente.

Cliente / Setor	A	B	E	P	totais
Conservador	200	120	60	20	400
Arrojado	200	180	140	80	600
Totais	400	300	200	100	1000

Ao fazer uma análise probabilística da população dos clientes considerou os eventos:
A: O cliente aplica no setor Agrícola;
B: O cliente aplica no setor Bancário;
C: O cliente é consevador;
D = $\overline{C}$: O cliente é arrojado;
E: O cliente aplica no setor Eletrônico;
F: O cliente aplica no setor Eletrônico ou no de Petróleo;
P: O cliente aplica no setor de Petróleo.
Em um primeiro momento o operador perguntou-se: qual a probabilidade "marginal" de que um "cliente" sorteado ao acaso ser conservador, obtendo como resposta

$$P(C) = \frac{400}{1000} = 0,4.$$

Supondo um "espaço amostral reduzido": sabendo que as aplicações do cliente estão no setor de eletrônicos ou no de petróleo qual a probabilidade de ser conservador

$$P(C|F) = \frac{80}{300} = 0,27.$$

Note que $P(F) = \frac{300}{1000} = 0,3$, $P(E) = \frac{200}{1000} = 0,2$, $P(P) = \frac{100}{1000} = 0,1$ e que

$$P(F) = P(E \cup P) = 0,3 = 0,2 + 0,1 = P(E) + P(P),$$

pois os eventos E e P são exclusivos, mas pela regra da adição:

$$P(C \cup F) = P(C) + P(F) - P(C \cap F) = 0,4 + 0,3 - 0,08 = 0,62.$$

A probabilidade da intercec cão

$$P(C \cap F) = \frac{80}{1000} = 0,08 = P(C).P(F|C) = 0,4.0,2.$$

Observe que

$$P(F|C) = 0,2 = \frac{0,08}{0,4} = \frac{P(C \cap F)}{P(C)} \neq 0,3 = P(F),$$

isto é, em geral a probabilidade condicional não é igual à probabilidade original (incondicional) do evento.

Contudo, podemos ter que

$$P(D|B) = \frac{P(D \cap B)}{P(B)} = \frac{0,18}{0,3} = 0,6 = P(D)$$

e a probabilidade condicional é igual à probabilidade do evento original, isto é, os eventos D e B são independentes.

Definição 1.18. Dois eventos A e B são independentes se, e somente se $P(A|B) = P(A)$, que é equivalente a

$$P(A \cap B) = P(A).P(B).$$

A Regra do Produto pode ser extendida a uma sequência finita de eventos e, se o limite existir, para uma sequência infinita. Se A, B e C são eventos

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B|A).P(C|A \cap B).$$

O conceito de independência pode ser aplicado a uma sequência enumerável de eventos mas com certo cuidado. A independência entre três eventos, por exemplo é definida da seguinte maneira:

Definição 1.19. Três eventos, A, B e C são mutuamente independentes se são independentes dois a dois, isto é

$$P(A \cap B) = P(A).P(B),$$

$$P(A \cap C) = P(A).P(C),$$

$$P(B \cap C) = P(B).P(C)$$

e

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C).$$

Podemos exemplificar que eventos dois a dois independentes nem sempre são independentes:

Exemplo 1.20. Considere o espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, equiprovavel, e os eventos $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ e $C = \{1, 4\}$. Claramente, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4}$. Temos tambem que $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{1\}$, com $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{2}$.

Portanto

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(A).P(B);$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(A).P(C);$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(B).P(C);$$

e os eventos são dois a dois independentes.

Contudo $P(A \cap B \cap C) = P(\{1\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(A).P(B).P(C)$ e concluimos que os eventos não são independentes.

De um modo geral, os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ são mutuamente independentes se

$$P(A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n)$$

e se qualquer subcoleção dos n eventos são mutuamente independentes.

Observação 1.21. Usa-se frequentemente a noção de independência para construir espaços de probabilidades correspondentes a repetições de um mesmo experimento. Por exemplo, em um experimento com n lançamentos de uma moeda, com probabilidade de CARA igual a p, $0 < p < 1$, acreditamos que os lançamentos sucessivos sejam independentes.

Como cada uma das n repetições pode resultar em CARA ou COROA, existem 2^n possíveis resultados para o experimento composto. Podemos representar tais resultados através de n-uplas $(w_1, w_2, ..., w_n)$, onde $w_i = 1$ se a i-ésima repetição resultar em CARA e $w_i = 0$ caso contrário.

Tomamos o espaço amostral Ω como a coleção de todas as possíveis n-uplas.

Consideramos o conjunto das partes de Ω como a σ- álgebra $\Im$.

A função de probabilidade P é obtidada supondo a hipótese de independência mútua entre os lançamentos.

Para um determinado ponto amostral $(w_1, w_2, ..., w_n)$, com k CARAS atribuimos a probabilidade

$$P(\{(w_1, w_2, ..., w_n)\}) = P(\{w_1\})P(\{w_2\})....P(\{w_n\}) = p^k(1-p)^{n-k}$$

desde que a ordem dos fatores não altera o produto.

Assim a probabilidade de obter k CARAS, $0 \leq k \leq n$, em n lançamentos da moeda é

$$P(k\ CARAS) = \sum_{(w_1,w_2,...,w_n)|\sum_{i=1}^{n} w_i = k} P(\{(w_1, w_2, ..., w_n)\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

e temos o espaço probabilístico $(\Omega, \Im, P)$.

Um exemplo interessante para fixarmos o aprendizado de probabilidade condicional e de independencia é o da retirada casual de bolas idênticas de uma urna:

Exemplo 1.22. Considere uma urna contendo três bolas pretas e cinco bolas vermelhas. Retire, casualmente, duas bolas sem reposição e obtenha os possíveis resultados e as respectivas probabilidades.

Ao retirarmos sem reposição teremos

$$P(\{(P,P)\}) = P(\{P\}).P(\{P\}|\{P\}) = \frac{3}{8}.\frac{2}{7};$$
$$P(\{(P,V)\}) = P(\{P\}).P(\{V\}|\{P\}) = \frac{3}{8}.\frac{5}{7};$$
$$P(\{(V,P)\}) = P(\{V\}).P(\{P\}|\{V\}) = \frac{5}{8}.\frac{3}{7};$$
$$P(\{(V,V)\}) = P(\{V\}).P(\{V\}|\{V\}) = \frac{5}{8}.\frac{4}{7};$$

Como retiramos e não repomos a bola, a configuração da urna muda e a segunda retirada depende da primeira, isto é $P(\{V\})|\{P\}) \neq P(\{V\})$. Contudo, a probabilidade da retirada de uma bola de determinada cor não muda nas retiradas sucessivas.

$$P(\{V_2\}) = P(\{V_1\}).P(\{V_2\}|\{V_1\}) + P(\{P_1\}).P(\{V_2\}|\{P_1\}) =$$
$$\frac{5}{8}.\frac{4}{7} + \frac{3}{8}.\frac{5}{7} = \frac{5}{8} = P(\{V_1\}).$$

O último argumento do exemplo anterior enseja o desenvolvimento de uma regra, denominada regra da probabilidade total. Para enuncia-la devemos definir uma partição do espaço amostral.

Definição 1.23. Sejam Ω um espaço amostral e $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos dois a dois disjuntos e exaustivos de Ω, isto é

a) $\Omega = \cup_{i=1}^{n} A_i$, e

b) $A_i \cap A_j = \emptyset \ \ \forall 1 \leq i, j \leq n$.

Então dizemos que $\{A_1, ..., A_n\}$ é uma partição de Ω.

Teorema 1.24. Regra da Probabilidade Total
Sejam Ω *um espaço amostral,* $\{A_1, ..., A_n\}$ *é uma partição de* Ω *,* B *um evento e* P *uma probabilidade em* Ω*. Então*

$$P(B) = \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i).P(B|A_i).$$

Prova:
Utilizando a definição de partição, a propriedade distributiva e a regra do produto escrevemos:

$$P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap (\cup_{i=1}^{n} A_i)) = P(\cup_{i=1}^{n}(B \cap A_i)) =$$

$$\Sigma_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i).P(B|A_i).$$

Uma consequencia imediata da regra da probabilidade total é o Teorema de Bayes:

Teorema 1.25. Teorema de Bayes
Sejam Ω *um espaço amostral,* $\{A_1, ..., A_n\}$ *é uma partição de* Ω *,* B *um evento e* P *uma probabilidade em* Ω*. Então*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i).P(A_i)}{\Sigma_{i=1}^{n} P(A_i).P(B|A_i)}.$$

Exemplo 1.26. O portifólio de uma seguradora de veículos, é formado por apólices para automóveis e para caminhões na proporção de 70% e 30%, respectivamente. No setor de caminhões 40% dos sinistros resultam em perda total, 50% em perda parcial e 10% são dedutíveis. No setor de automóveis 30% dos sinistros resultam em perda total, 60% em perda parcial e 10% são dedutíveis.

Se em determinado acidente houve perda parcial, qual a probabilidade de que o veículo acidentado foi um automóvel?

Se denotamos os eventos de interesse por:
A = { veículo é um automóvel};
C = { veículo é um caminhão};
D = { a perda é dedutível };
P = { a perda é parcial };
T = { a perda é total },
as expressões analíticas que traduzem o enunciado do exemplo são:
$P(C) = 0,3$, $P(A) = 0,7$, $P(T|A) = 0,3$, $P(P|A) = 0,6$, $P(D|A) = 0,1$, $P(T|C) = 0,4$, $P(P|C) = 0,5$ e $P(D|C) = 0,1$.

Aplicamos o teorema de Bayes:

$$P(A|P) = \frac{P(A \cap P)}{P(P)}.$$

Pela regra do produto, o numerador é $P(A \cap P) = P(A).P(P|A) = 0,7.0,6 = 0,42$. Obtemos o denominador através da regra da probabilidade total

$$P(P) = P(A).P(P|A) + P(C).P(P|C) = 0,7.0,6 + 0,3.0,5 = 0,57.$$

Assim $P(A|P) = 0,74$.

Observação 1.27. Embora simples, um espaço amostral equiprovável é muito importante. Em deferência a tal importância observamos que, um espaço amostral discreto, finito e equiprovavel, $\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ é tal que $P(\{w_i\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sharp(\Omega)}, 1 \leq i \leq n$.

Como os eventos $\{w_i\}$, $\{w_j\}$, $i \neq j$, são disjuntos, a probabilidade de um evento A de Ω é o número de elementos de A, denotado por $\sharp(A)$, sobre o número de elementos de Ω,

$$P(A) = P(\cup_{w_i \in A}\{w_i\}) = \Sigma_{w_i \in A} P(\{w_i\}) =$$
$$\Sigma_{w_i \in A} \frac{1}{\sharp(\Omega)} = \frac{\sharp(A)}{\sharp(\Omega)}.$$

Amostras Ordenadas

As notas que seguem foram extraidas de Feller, vol. 1,(1968).

Para procedermos com o cálculo da cardinalidade de conjuntos devemos introduzir algumas regras de contagem, dentre as quais o **Princípio Fundamental da Contagem** *é de grande importância:*

Se um procedimento pode ser realizado em duas etapas, a primeira de n maneiras e a segunda de m maneiras, então podemos realizar o procedimento de mn maneiras.

Considere o conjunto da população de n elementos $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Qualquer arranjo ordenado $a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_r}$ de r símbolos, se denomina uma amostra ordenada de tamanho r retirada da população. Dois procedimentos são possíveis:

Amostragem com reposição: cada seleção é feita na população toda e portanto, o mesmo elemento pode ser selecionado mais de uma vez. Neste caso, cada um dos r elementos pode ser escolhido de n maneiras e número de amostras possíveis é n^r.

Amostragem sem reposição: Um elemento, uma vez escolhido,, é removido da população e assim uma amostra se torna um arranjo sem repetições. Neste caso temos n possíveis escolhas para o primeiro elemento, mas somente $n-1$ para o segundo, $n-2$ para o terceiro, etc, e portanto teremos um total de

$$(n)_r = n(n-1)(n-2)....(n-r+1).$$

Observa-se que se $r > n$, $(n)_r = 0$.

Teorema 1.28. *Para uma população de* n *elementos, e um tamanho prefixado da amostra,* r*, existem* n^r *amostras distintas com reposição e* $(n)_r$ *amostras distintas sem reposição.*

Na amostragem sem reposição vamos considerar o caso $r = n$*. Neste caso a amostra inclui a população toda e representa uma ordenação (ou permutação)de seus elementos. Portanto* n *elementos* $a_1, a_2, ..., a_n$ *podem ser ordenados de* $(n)_n = n(n-1)(n-2)...2.1$*. Denotaremos* $(n)_n = n!$

Corolário 1.29. *O número de permutações distintas de* n *elementos é* $n! = n(n-1)(n-2)...2.1$*.*

Ao retirarmos r *elementos de uma população de tamanho* n *estamos realizando um experimento cujos resultados possíveis são amostras de tamanho* r*. O número dessas amostras é* n^r *ou* $(n)_r$ *dependendo de estarmos, ou não, repondo os elementos retirados. Em qualquer caso, o nosso experimento teórico fica descrito por por um espaço amostral no qual cada ponto amostral representa uma amostra de tamanho* r*. Quando atribuimos probabilidades iguais a todas elas dizemos que estamos considerando amostras casuais. A palavra "casual" quando aplicada a amostras ou seleções tem significado único, o termo escolha casual é usado para implicar que todos os resultados são igualmente prováveis. Analogamente, sempre que falarmos de amostras casuais de tamanho fixo* r*, o adjetivo casual implica que todas as possíveis amostras tem a mesma probabilidade, a saber,* $\frac{1}{n^r}$ *em amostragem com reposição e* $\frac{1}{(n)_r}$ *em amostragem sem reposição.*

Exemplo 1.30. Uma amostra casual de tamanho r, com reposição, é retirada de uma população com n elementos. Desejamos obter a probabilidade de que nenhum elemento apareça duas vezes na amostra. O último teorema prova que existem, ao todo, n^r amostras distintas, das quais $(n)_r$ satisfazem a condição estipulada.Como a amostra é casual, a probabilidade de não existirem repetições na amostra é

$$p = \frac{(n)_r}{n^r} = \frac{n(n-1)....(n-r+1)}{n^r}.$$

Exemplo 1.31. Os aniversários de r pessoas formam uma amostra de tamanho r da população de todos os dias do ano. Vamos admitir que o ano tenha 365 dias e considerar uma seleção casual de r pessoas como equivqlente a uma seleção casual de dias de aniversários.

A probabilidade de que exista ao menos dois aniversário em um mesmo diado ano é $1 - P_r$, onde P_r denota a probabilidade de que todos os aniversários caiam em dias diferentes. Assim

$$P_r = \frac{(365)_r}{(365)^r} = \frac{365}{365}\frac{365-1}{365}...\frac{365-r+1}{365} =$$
$$1(1-\frac{1}{365}(1-\frac{2}{365})...(1-\frac{(r-1)}{365}) \leq$$
$$e-\frac{1}{365}e-\frac{2}{365}.....e-\frac{(r-1)}{365} =$$
$$e^{-\frac{1}{365}\sum_{i=1}^{r-1} i = e^{\frac{-r^2+r}{730}}}.$$

Note que $\sum_{i=1}^{t} i = \frac{n(n+1)}{2}$ e $x = \int_0^x 1dy \geq \int_0^x e^{-y}dy = 1 - e^{-y}$.

Se na classe temos 70 alunos, qual a probabilidade de que haja dois aniversários em um mesmo dia?

Como ficou estabelecido, o termo população de tamanho n, será usado para denotar um agregado de n elementos sem que leve em conta a sua ordem. Duas populações serão consideradas distintas, somente se uma delas contiver um elemento que não pertença à outra.

Vamos considerar uma subpopulação de tamanho r de uma população dada, com n elementos. Uma numeração arbitrária dos elementos da subpopulação faz com que ela se transforme em uma amostra ordenada de tamanho r, e reciprocamente, toda amostra desse tipo pode ser obtida dessa maneira. Lembrando que r elementos podem ser enumerados de $r!$ maneiras diferentes, segue-se que o número de amostras ordenadas é igual a $r!$ vezes o número de subpopulações de tamanho r. O número de subpopulações de tamanho r é, portanto, $\frac{(n)_r}{r!}$. Expressões desse tipo são conhecidas pelo nome de coeficientes binomiais e a notação usual para elas é

$$\binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r(r-1)...2.1}.$$

Provamos que:

Teorema 1.32. *Uma população de n elementos possui $\binom{n}{r}$ populações distintas de tamanho $r \leq n$.*

Em outras palavras, um subconjunto de r elementos pode ser escolhido de $\binom{n}{r}$ maneiras diferentes. Um subconjunto como esse fica determinado pelos $n-r$ elementos que n ao pertencem a ele, portanto

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Com o objetivo de tornar a expressão para todo r, $0 \leq r \leq n$, definimos $\binom{n}{0} = 1$, $0! = 1$ e $(n)_0 = 1$.

Exemplo 1.33. Consideremos a distribuição de r bolas em n compartimentos onde cada um dos n^r arranjos possíveis tem probabilidade n^{-r}.

Para determinar a probabilidade P_k, de que um compartimento especificado, tenha exatamente k bolas, $0 \leq k \leq r$, observe que as k bolas podem ser escolhidas de $\binom{r}{k}$ maneiras e que as restantes $r-k$ bolas devem ser colocadas nos $n-1$ compartimentos restantes de $(n-1)^{r-k}$ maneiras. Pelo princípio fundamental de contagem temos

$$P_k = \binom{r}{k}(n-1)^{r-k}n^{-r} = \binom{r}{k}\frac{(1}{n)}^k(1-\frac{1}{n})^{r-k}$$

com distribuição binomial.

Exemplo 1.34. Consideremos que r bandeiras de cores diferentes devem ser arranjadas em n mastros colocados em fila. De quantas maneiras isso pode ser feito? Admitiremos que as bandeiras em cada mastro, estejam em uma ordem definida, de cima para baixo.

Para a primeira bandeira escolhemos um dos n mastros. Esse mastro ficará dividido em duas partes e portanto, existem agora $n+1$ posições possíveis para a segunda bandeira. Da mema forma observamos que são possíveis $n+2$ escolhas para a terceira bandeira e assim por diante. Concluimos que existem $N = n(n+1)(n+2)...(n+r-1)$ diferentes possibilidades.

Consideremos agora bandeiras de uma mesma cor, impossíveis de serem diferenciadas. Se enumerarmos as bandeiras, cada configuração irá produzir $r!$ configuraçes de r bandeiras distinguíveis e, portanto, r bandeiras de uma mesma cor podem ser expostas de $\frac{N}{r!}$ maneiras.

Suponha a seguir que p bandeiras sejam vermelhas e q sejam azuis, com $p+q=r$, todas indistinguíveis. Toda exposição de r bandeiras numeradas pode ser obtida enumerando-se as bandeiras vermelhas de 1 até p e as azuis de $p+1$ a $p+q$. Segue-se que o número de exposições diferentes é dado por $\frac{N}{p!q!}$.

O teorema anterior divide a população em duas partes ordenadas. A generalização de tal resultado segue

Teorema 1.35. *Sejam $r_1, r_2, ..., r_k$ inteiros tais que*

$$r_1 + r_2 + ... + r_k = n, \quad r_i \geq 0.$$

O número de maneiras segundo as quais uma população de n elementos pode ser dividida em k partes ordenadas (particionada em k subpopulações) das quais, a primeira contém r_1 elementos, a segunda r_2

elementos, etc, é

$$\frac{n!}{r_1!r_2!...r_k!}$$

(os números acima são chamados de coeficientes multinomias).
Prova: *Para efetuarmos a partição desejada, temos, em primeiro lugar, que escolher r_1 elementos do total n; a seguir, dentre os $n - r_1$ elementos restantes, selecionamos um grupo de tamanho r_2, etc. Após a formação do $(k-1)$- ésimo grupo, restarão $n - r_1 - r_2 - ... - r_{k-1}$ que irão constituir o último grupo. Estas operações são em número de*

$$\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}....\binom{n-r_1-...-r_{k-2}}{r_{k-1}} = \frac{n!}{r_1!r_2!...r_k!}.$$

Observe que a ordem das subpopulações é essencial, no sentido de que $(r_1 = 2, r_2 = 3)$ e $(r-1 = 3, R-2 = 2)$ representam partições diferentes; entretanto não levamos em consideração a ordem dentro dos grupos.

Exemplo 1.36. Experimentamos casual e sucessivamente 10 chaves idênticas para abrir uma porta. Somente uma chave pode abrir a porta e o procedimento pode exigir, 1, 2, ...,9 ou 10 tentativas. Mostraremos que todas as tentativas tem mesma probabilidade $0,1$.

Observe que, em qualquer etapa do procedimento o espaço amostral é equiprovável pois a escolha é casual. Denotemos por A_i o evento de que acertamos na i-es tentativa.

Na primeira tentativa, o número de maneiras de escolhermos uma chave dentre as 10, é 10. Só existe uma maneira de escolhermos a chave correta e, portanto $P(A_1) = \frac{1}{10} = 0,1$.

Na segunda tentativa, o número de maneiras de retirarmos duas chaves, em duas etapas é, pelo princípio fundamental da contagem, $10.(10-1)$ e o número de maneiras de retirarmos duas chaves, em duas etapas, de forma que a segunda etapa resulte na chave correta é,pelo princípio fundamental da contagem, $(10-1).1$ e, portanto, $P(A_2) = \frac{(10-1).1}{10.(10-1)} = 0,1$.

Procedendo da mesma maneira, na k-es tentativa, quando o número de maneiras de retirarmos k chaves, em k etapas é, pelo princípio fundamental da contagem $10.(10-1)...(10-k+1)$ e o número de maneiras de retirarmos k chaves, em k etapas, de forma que a k-es. etapa resulte na chave correta é, pelo princípio fundamental da contagem, $(10-1)....(10-k+1).1$ e, portanto. $P(A_k) = \frac{((10-1).....10-k+1)1}{10.(10-1)....(10-k+1)} = 0,1$.

Exemplo 1.37. Em um estacionamento observamos que existem 8 carros estacionados e que as quatro vagas restantes, sem carros, são consecutivas. Esta configuração é surpreendente?

Consideramos o espaço equiprovavel, isto é qualquer carro tem a mesma chance de ocupar qualquer vaga e, para nossos propósitos a ordem em que isso ocorre é irrelevante.

O número de maneiras de alocarmos os 8 carros nas 12 vagas é $\binom{12}{8} = 495$. O número de alocações que satisfazem o evento de interesse é 9 e portanto a probabilidade de ocorrer tal evento é $\frac{9}{495} = 0,018$ e concluimos que a ocorrência do evento é surpreendente.

Exemplo 1.38. Considere um ano de 365 dias e os eventos

A = { O aniversário de 10 pessoas ocorrem em dias diferentes.}

B = { O aniversário de 10 pessoas ocorrem, exatamente, em dois meses do ano.}

O leitor é convidado a explicar as soluções:

$$P(A) = \frac{(365)_{10}}{(365)^{10}};$$

$$P(B) = \frac{\binom{12}{2}.(2^{10}-2)}{12^{10}}.$$

Em muitas situações, ao analisarmos a distribuição de r bolas em n compartimentos, é necessário considerarmos as bolas como não-distinguíveis. Por exemplo, em estudos estatísticos da distribuição de acidentes pelos dias da semana ou, dos aniversários pelos dias do ano, etc, estamos interessados no números de ocorrências e não nas ocorrências individuais. Em tais situações podemos supor as bolas numeradas , mas a nossa atenção se concentra em eventos que são independentes da enumeração. Eventos como esse ficam completamente descritos pelos seus números de ocupação $r_1, r_2, ..., r_n$ onde r_k designa o número de bolas no k-ésimo compartimento. Toda n-upla de inteiros que satisfaz

$$r_1 + r_2 + ... + r_n = r, \quad r_k \geq 0$$

descreve uma configuração possível de números de ocupação. Com bolas não-distinguíveis, duas distribuições são distintas somente se as n-uplas correspondentes $(r_1, ..., r_n)$ não forem identicas.

Teorema 1.39. *I) O número de soluções distintas de*

$$r_1 + r_2 + ... + r_n = r, \quad r_k \geq 0$$

é

$$A_{r,n} = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}.$$

II) O número de soluções distintas nas quais nenhum compartimento fica vazio

$$r_1 + r_2 + ... + r_n = r, \quad r_k \geq 0$$

é

$$\binom{r-1}{n-1}.$$

Prova: *Representamos as bolas por asteriscos e os n compartimentos pelos n espaços determinados por $n+1$ traços verticais. Assim*

$$| * * * | * |||| * * * * |,$$

é usado como símbolo para a distribuição de $r = 8$ bolas em $n = 6$ compartimentos, com números de ocupação $3, 1, 0, 0, 0, 4$. Os símbolos, necessáriamente, começam e terminam com um traço mas, os $n - 1$ traços e r asteriscos restantes podem aparecer numa ordem arbitrária. Dessa forma, fica claro que o número de distribuições distinguíveis é igual ao número de maneiras segundo as quais podemos escolher r lugares, num total de $n + r - 1$, isto é, $A_{r,n}$.

A condição de que nenhum compartimento permaneça vazio impõe a restrição de que não existam dois traços adjacentes. Os r asteriscos determinam $r - 1$ espaços, dos quais $n - 1$ devem ser ocupados por traços; temos assim $\binom{r-1}{n-1}$ escolhas e ao teorema esta demonstrado.

.

Em várias situações, é necessário irmos um pouco mais além e considerarmos os próprios compartimentos como indistinguíveis; isto implica em que não levemos em conta a ordem entre os números de ocupação. O exemplo seguinte serve para explicar um método rotineiro de solução para problemas que surgem dessa maneira.

Exemplo 1.40. Configurações de $r = 7$ bolas em $n = 7$ compartimentos. (Os compartimentos podem ser interpretados como dias da semana, as bolas como telefonemas, cartas, acidentes, etc.) Para sermos mais explícitos vamos considerar as distribuições com número de ocupação, $2, 2, 1, 1, 1, 0, 0$, aparecendo em uma ordem arbitrária. Esses sete números de ocupação induzem uma partição dos sete compartimentos em três subpopulações (categorias) que consistem, respectivamente, em dois compartimentos duplamente ocupados, três com uma única bola e dois vazios. Uma partição desse tipo em três grupos de tamanho 2, 3 e 2 pode ser efetuada de $\frac{7!}{(2!3!2!)}$ maneiras. A cada associação particular entre os nossos números de ocupação e os sete compartimentos, correspondem $\frac{7!}{(2!2!1!1!1!0!0!)} = \frac{7!}{(2!2!)}$ distribuições diferentes de $r = 7$ bolas pelos sete compartimentos. Segue-se que o total das distribuições cujos números de ocupação são $2, 2, 1, 1, 1, 0, 0$, em alguma ordem é

$$\frac{7!}{(2!3!2!)}\frac{7!}{(2!2!)}.$$

É fácil ver que este resultado foi deduzido através de uma dupla aplicação do teorama 1.26, especificamente a bolas e compartimentos.

1.5. **Combinação de eventos.**

Exemplo 1.41. Pareamentos

Dois baralhos iguais, cada um deles com N cartas distintas, são embaralhados separadamente de tal forma que suas cartas fiquem numa ordem aleatória e a seguir as cartas são colocadas uma frente à outra. Diremos que ocorreu um pareamento (coincidência ou encontro) se uma carta ocupar o mesmo lugar em ambos os baralhos. Pareamentos podem ocorrer em qualquer um dos N lugares e em vários lugares simultaneamente. Esse problema pode ser descrito de várias formas, dando origem a problemas curiosos e divertidos. Por exemplo, podemos considerar que chapéus são misturados e em seguida devolvidos a seus donos. Um pareamento ocorre quando uma pessoa recebe o seu próprio chapéu.

No que segue calculamos a probabilidade de que ocorra pelo menos um pareamento. Por simplicidade de expressão vamos reenumerar as cartas $1, 2, ..., N$, de tal forma que em um dos baralhos as cartas apareçam em ordem natural e vamos admitir que a cada permutação do outro baralho esteja associada a probabilidade $\frac{1}{N!}$. Vamos denotar por A_k o evento de que ocorra um pareamento no k-ésimo lugar. Isso significa que a carta número k ocupa o k-ésimo lugar e as $N-1$ cartas restantes estão em uma ordem qualquer. Obviamente $P(A_k) = \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}$. De maneira análoga, para cada par i, j, temos $P(A_i \cap A_j) = \frac{(N-2)!}{N!} = \frac{1}{N(N-1)}$, etc. A soma com a intersecção de k eventos conterá $\binom{N}{k}$ termos, cada um deles com probabilidade $\frac{(N-k)!}{N!}$, que resultará em $\frac{1}{k!}$. Portanto a probabilidade desejada é

$$P(\cup_{k=1}^{N} A_k) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ... \mp \frac{1}{N!}.$$

Observe que a probabilidade de não obter pareamentos é

$$1 - P(\cup_{k=1}^{N} A_k) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - ... \pm \frac{1}{N!}$$

que nos dá os $N+1$ primeiros termos da expansão de taylor para e^{-1}.

Exemplo 1.42. Problema de Ocupação

Retornamos ao problema de uma distribuição de r bolas em n compartimentos, admitindo que a cada arranjo esteja associada a probabilidade $\frac{1}{n^r}$. Desejamos obter a probabilidade $P_m(r,n)$, de encontrarmos exatamente m compartimentos vazios.

Seja A_k o evento de que o k-ésimo compartimento esteja vazio $1 \leq k \leq n$. Neste evento todas as r bolas são colocadas nos $n-1$ compartimentos restantes e isso pode ser feito de $(n-1)^r$ maneiras diferentes. Analogamente existem $(n-2)^r$ arranjos que deixam vazios dois compartimentos prefixados, etc. Portanto

$$P(A_i) = (1 - \frac{1}{n})^r, \quad P(A_i \cap A_j) = (1 - \frac{2}{n})^r, ...$$

Para cada $k \leq n$, a soma com a intersecção de k eventos (exatamente k compartimentos vazios) é igual a $\binom{n}{k}(1 - \frac{k}{n})^r$. Portanto, a probabilidade de encontrarmos todos os compartimentos ocupados é

$$P_0(n,r) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (1 - \frac{k}{n})^r.$$

Consideramos uma distribuição contendo exatamente m compartimentos vazios. Os m compartimentos podem ser escolhidos de $\binom{n}{m}$ maneiras.. As r bolas devem ser distribuidas entre os $n-m$ compartimentos restantes, de tal maneira que todos esses compartimentos sejam ocupados. O número de distribuições desse tipo é $(n-m)^r P_0(r, n-m)$. Dividindo por n^r obtemoos a probabilidade de que exatamente m compartimentos permaneçam vazios:

$$P_m(r,n) = \binom{n}{m} (1 - \frac{m}{n})^r P_0(r, n-m) =$$

$$\binom{n}{m} \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{n-m}{k} (1 - \frac{m+k}{n})^r.$$

A genaralização do primeiro teorema desta Seção :

Teorema 1.43. *Para todo inteiro m, $1 \leq m \leq N$, a probabilidade P_m, de que ocorram exata e simultaneamente m dos eventos $A_1, A_2, ..., A_N$ é dada por*

$$P_m = S_m - \binom{m+1}{m} S_{m+1} + \binom{m+2}{m} S_{m+2} - ... \pm \binom{N}{m} S_N$$

onde $S_k = \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k})$.

Prova: *Feller, pg 92.*

E-mail address: `bueno@ime.usp.br`

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil