UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

COLETÂNEA DE EXERCÍCIOS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS

APOSTILA 3

ANÁLISE DIMENSIONAL E SEMELHANÇA

CELSO MUNIZ DA SILVA
PROFESSOR DE MECÂNICA
DOS FLUIDOS

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA POLITÉCNICA

COLETÂNIA DE EXERCÍCIOS DE

Mecânica dos Fluidos
Capítulo 7

Análise Dimensional e Semelhança.

Celso Muniz da Silva
Prof. de Mecânica dos
Fluidos.
EPUSP

Apostila - 3

Análise Dimensional e Semelhança

Ex. 3.1 Estabelecer as relações entre as medidas e entre as unidades da massa específica, para o sistema CGS e o sistema inglês.

Solução:

Como ilustração, admitamos que se vai calcular a massa específica de um corpo homogêneo de forma paralelepipédica, por meio da fórmula de definição.

$$\rho = \frac{m}{v}$$

onde m: medida da massa do corpo

v = abc: medida do volume do paralelepípedo, igual ao produto das medidas de sua altura, largura e comprimento.

Como a fórmula deverá ser válida em qualquer sistema de unidades coerentes, identificando-se pelos índices 1 e 2 as medidas e unidades em dois desses sistemas, resulta:

$$\rho_1 = \frac{m_1}{a_1 b_1 c_1} \qquad \rho_2 = \frac{m_2}{a_2 b_2 c_2}$$

e, dividindo-se uma pela outra:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{(m_1/m_2)}{(a_1/a_2)(b_1/b_2)(c_1/c_2)}$$

Mas, sendo;

(m): grandeza massa do corpo

U_m: grandeza unitária(ou unidade)do ente "massa"

(ρ): grandeza massa específica do corpo

U_ρ: grandeza unitária do ente "massa específica"

(a), (b), (c): grandezas altura, largura e comprimento do paralelepípedo.

U_L: grandeza unitária do ente "extensão linear (ou comprimento)".

combinando-se a expressão anterior com as seguintes:

$$(m) = m_1(U_M)_1 = m_2(U_M)_2$$

Solução:
Da lei fundamental

$$\frac{F}{S} = \mu \frac{dV}{dy}$$

deduz-se

$$\frac{|M|\,|L|\,|T|^{-2}}{|L|^{2}} = |\mu| \frac{|L|\,|T|^{-1}}{|L|}$$

$$\therefore \; |\mu| = |M|\,|L|^{-1}\,|T|^{-1}$$

isto é

$$\frac{U'_\mu}{U_\mu} = \left(\frac{U'_M}{U_M}\right)\left(\frac{U'_L}{U_L}\right)^{-1}\left(\frac{U'_T}{U_T}\right)^{-1}$$

No sistema CGS:

$$U_M = 1g \qquad U_L = 1\ cm \qquad U_T = 1s \qquad U_\mu = 1\ pois$$

e no sistema inglês absoluto: 3

$$U'_M = 1\ell b \qquad U'_L = 1ft \qquad U'_T = 1\ sec \qquad U'_\mu = 1\ \ell b/ft.sec$$

Portanto, em vista das equivalências dadas a conhecer,

$$\frac{U'_\mu}{U_\mu} = (453,6)(30,48)^{-1}(1)^{-1} = 14,9$$

e

$$\mu' = \frac{\mu}{14,9}$$

$$= \frac{0,01}{14,9} = 0,000672$$

Assim, para a água:

$$(\mu) = 0,01 \text{ poise} = 0,000672\ \ell b/ft.sec.$$

Ex. 3.3 Determinar o valor da aceleração da gravidade no sistema inglês de unidades, sabendo-se que 1 pé equivale a 0,3048 metros.

Solução:

$$(g) = gU_a = g'\,U'_a$$

(g). grandeza "aceleração da gravidade"

g, g': medidas da aceleração da gravidade nos sistemas métrico e inglês, respectivamente.

U_a: grandeza unitária (ou unidade) do ente "aceleração", no sistema métrico.

U'_a: idem, no sistema inglês.

Lembrando a equação dimensional da aceleração

$$|a| = |L||T|^{-2}$$

que também pode ser escrita

$$\frac{U_a}{U'_a} = \left(\frac{U_L}{U'_L}\right)\left(\frac{U_T}{U'_T}\right)^{-2}$$

e observando que

$$\frac{U_L}{U'_L} = \frac{1}{0{,}3048}$$ 4

$$\frac{U_T}{U'_T} = 1$$ (pois ambos os sistemas adotam como unidade de tempo 1 segundo)

resulta

$$\frac{g'}{g} = \frac{U_a}{U'_a} = \frac{1}{0{,}3048}$$

portanto

$$g' = \frac{9{,}81}{0{,}3048} \simeq 32{,}2$$

isto é,

$$(g) = 32{,}2 \text{ pé/s}^2$$

Ex. **3.4** Determinar as equações das grandezas físicas abaixo relacionadas relativas ao grupo de grandezas fundamentais F,L,T.

a) massa	Resp.: $FL^{-1}T^2$
b) peso específico	FL^{-3}
c) pressão	FL^{-2}
d) massa específica	$FL^{-4}T^2$
e) vazão em volume	L^3T^{-1}
f) viscosidade dinâmica	$FL^{-2}T$
g) viscosidade cinemática	L^2T^{-1}

Ex. 3.5 A viscosidade da água pura a $20^{o}C$ é 0,01 poise Qual o seu valor numérico no sistema MK*S?
Resp.: $10^{-4}\mu_{MK*S}\mu$

Ex. 3.6 A viscosidade cinemática da água doce a 20º C é 1 centistokes. Qual o seu valor no sistema MK*S?
Resp.: $10^{-6}m^2/s$.

Ex. 3.7 Justificar os seguintes fatores de conversão de unidades:

1 poise (Po) = 1g/cm s = 1 dina s/cm^2=0,002088slug/ft.s
= 0,002088 lbf.s/ft^2.

1 stoke (Sk) = 0,001076 ft^2/s.

1 g/cm^2 = 1 kg/m^3 = x kg* $m^{-4}s^2$ x = ?

1 $dina/cm^3$ = x $Newtons/m^3$ = y kgf/m^3. x = ? y = ?

Ex. 3.8 Verificar qual das fórmulas seguintes é invariante a uma mudança de sistema de unidades coerentes: 5

$$H = \alpha \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z, \quad H = \rho \frac{V^2}{2} + p + \gamma z,$$

$$W = \gamma QH, \quad W = QH, \quad W = \gamma QH/\eta$$

onde V é a velocidade, p é a pressão, z é a cota, α é adimensional, W é a potência, γ é o peso específico, Q é a vazão (L^3T^{-1}), H é a altura manométrica e η é o rendimento.

Ex. 3.9 A resistência total R_T de uma embarcação de superfície deve ser encontrada. Determinar a função adimensional equivalente a função que relaciona as grandezas envolvidas no fenômeno

$$R_T = f(\rho, \mu, L, v, g)$$

Solução:

Observando-se a matriz dimensional

	ρ	v	L	μ	g	R_T
M	1	0	0	1	0	1
L	-3	1	1	-1	1	1
T	0	-1	0	-1	-2	-2

verifica-se que ρ, v e L podem ser usados como nova base, ou - variáveis repetidas na formação dos números adimensionais, tendo em vista o determinante não nulo constituido pelas suas dimensões na base MLT:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Como a característica da matriz acima é 3 e o número de variáveis e 6, os números π serão $6 - 3 = 3$.
Portanto:

$$\pi_1 = \mu \quad \rho^{x_1} \quad v^{y_1} \quad L^{z_1}$$
$$\pi_2 = g \quad \rho^{x_2} \quad v^{y_2} \quad L^{z_2}$$
$$\pi_3 = R_T \quad \rho^{x_3} \quad v^{y_3} \quad L^{z_3}$$

Da condição de π_1 ser adimensional resulta 6

$$|\pi_1| = |M|^o|L|^o|T|^o = (|M|\,|L|^{-1}|T|^{-1})(|M|\,|L|^{-3}|T|^o)^{x_1}(|M|^o|L|^1\,|T|^{-1})^{y_1}(|M|^o\,|L|^1\,|T|^o)^{z_1}$$

$$= |M|^{1+x_1}\,|L|^{-1\,-3x_1+y_1+z_1}\,|T|^{-1\,-y_1}$$

e por conseguinte o sistema de equações

$$\begin{cases} 1 + x_1 = 0 \\ -1 - 3x_1 + y_1 + z_1 = 0 \\ -1 - y_1 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é

$$x_1 = -1$$
$$y_1 = -1$$
$$z_1 = -1$$

de sorte que

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\rho v L}$$

Observe-se que cada equação do sistema acima pode ser escrita diretamente a partir de uma linha da matriz adimensional, multiplicando-se o elemento da primeira coluna por x_1, o da segunda coluna por y_1, o da terceira coluna por z_1, somando-se ao elemento da coluna correspondente a μ, e igualando-se a expressão obtida a zero.

As equações para π_2, obtidas por desenvolvimento semelhante ao descrito acima (usando-se porém a coluna do g), são as seguintes:

$$\begin{cases} (1)x_2 + (0)y_2 + (0)z_2 + 0 = 0 \\ (-3)x_2 + (1)y_2 + (1)z_2 + 1 = 0 \\ (0)x_2 + (-1)y_2 + (0)z_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

A solução $x_2 = 0$, $y_2 = -2$, $z_2 = 1$ fornece

$$\pi_2 = \frac{gL}{v^2}$$

Com relação a π_3, obtem-se analogamente,

$$\begin{cases} (1)x_3 + (0)y_3 + (0)z_3 + 1 = 0 \\ (-3)x_3 + (1)y_3 + (1)z_3 + 1 = 0 \\ (0)x_3 + (-1)y_3 + (0)z_3 - 2 = 0 \end{cases}$$

e a solução $x_3 = -1$, $y_3 = -2$, $z_2 = -2$ fornece

$$\pi_3 = \frac{R_T}{\rho\, V^2\, L^2}$$

Assim, existirá uma função

$$\phi\left(\frac{\mu}{\rho v L}, \frac{gL}{v^2}, \frac{R_T}{\rho\, v^2\, L^2}\right) = 0$$

equivalente a

$$f(R_T, \mu, g, \rho, v, L) = 0$$

Ex.3.10 No deslocamento translatório com velocidade relativa, constante, de um objeto imerso num meio fluido incompressível, intervêm massa específica e a viscosidade do fluido, aforça R que o fluido opõe ao avanço do objeto, e uma dimenção caracteristica D que define o tamanho do objeto. Obter um conjunto de variáveis adimensionais em termos das quais pode ser desenvolvida uma função geral para o fenômeno.

Solução:

Sendo as variáveis do fenômeno ρ, v, D, μ e R, verifica-se que ele pode ser imaginado com um caso particular do problema anterior, de modo que sendo escolhidas como variáveis repetidas ρ, v e D, os dois números π, adimensionais, resultantes são:

$$\pi_1 = \frac{R}{\rho\ D^2\ v^2}$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho v D}$$

Portanto, a função geral buscada pode ser representada como

$$\phi\left(\frac{R}{\rho D^2\ v^2}\ ,\ \frac{\mu}{\rho v D}\right) = 0$$

ou sob a forma equivalente

$$\frac{R}{\rho\ D^2\ v^2} = \varphi\left(\frac{VD}{\mu/\rho}\right)$$

A combinação VD/ν é chamada "número de Reynolds (N_R)", e usualmente intervem em escoamentos completamente circundados por paredes sólidas (tal como em condutos, em alguns medidores de vazão, ventiladores, bombas e turbinas), ou em casos que se enquadram no enunciado do problema (como veículos, submarinos, aeronaves, estruturas, etc.).

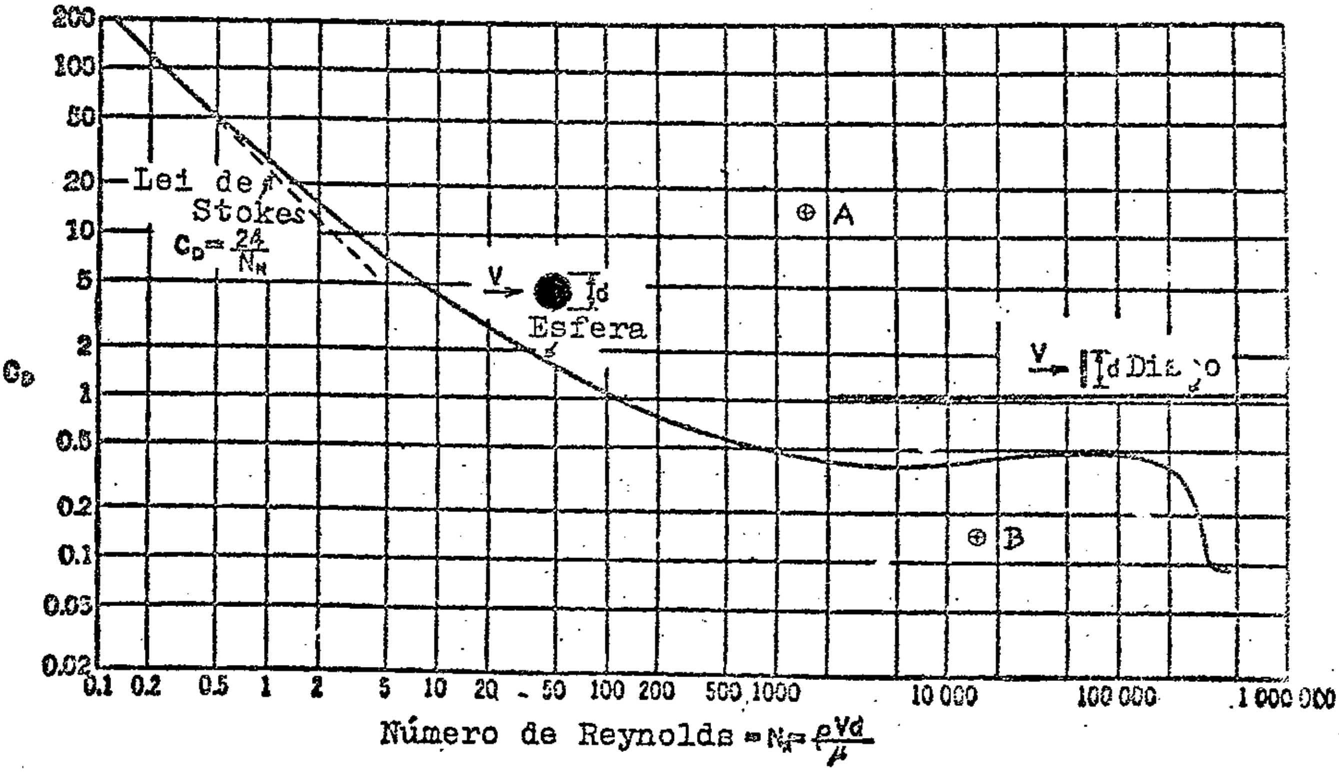
Para determinar-se a natureza exata da relação funcional torna-se necessária a experimentação adequada, com o fim de colher dados numéricos. Muitas vezes não é possível exprimir-se tal relação por meio de expressões consistindo numa combinação entre funções matemáticas conhecidas. Costuma ser praticável, contudo, se o número de variáveis não é excessivo, a representação da função sob forma gráfica, embora às vezes se empreguem escalas alteradas com o propósito de tornar o gráfico mais conveniente. Isto é o que mostra o gráfico abaixo, para os casos em que o objeto é uma esfera (ou um disco circular). Sobre o ei-.

xo das abcissas estão assinalados em escaia logaritmica os números de Reynolds (N_R), enquanto o eixo das ordenadas representa, também em escala logaritmica, o produto do primeiro adimensional por 8/3,1416, indicado por C_d e chamado "coeficiente de arrasto".

Para a utilização do gráfico apresentado, deve-se ter presente a definição do coeficiente de arrasto.

$$C_D = 2 \frac{R}{\rho V^2 A_p}$$

Sendo A_p a área da projeção do objeto sobre um plano perpendicular a V.



Coeficientes de arrasto para a esfera e disco circular. A área a ser usada é aquela projetada num plano normal à velocidade.

9

Ex. 3.11 Considere um eixo que gira num mancal bem lubrificado.

Deseja-se determinar um grupo apropriado de arranjos das variáveis pertinentes, para o equacionamento adequado da resistência devida ao atrito. As variáveis são:

Força de atrito tangencial	R
Força normal ao eixo	P
Velocidade angular do eixo	N
Viscosidade do lubrificante	μ
Diâmetro do eixo	D

<u>Solução</u>:

Uma vez que há cinco variáveis e a característica da matriz dimensional é três, o fenômeno pode ser descrito em termos de dois números adimensionais.

	P	N	D	R	μ	
M	1	0	0	1	1	10
L	1	0	1	1	-1	
T	-2	-1	0	-2	-1	

Como o determinante formado com as três primeiras colunas difere de zero, podem-se compor os seguintes arranjos adimensionais:

$$\pi_1 = R\ P^{x_1}\ N^{y_1}\ D^{z_1}$$

$$\pi_2 = \mu\ P^{x_2}\ N^{y_2}\ D^{z_2}$$

Buscando a solução para π_1 obtem-se:

$$(1)x_1 + (0)y_1 + (0)z_1 + 1 = 0$$

$$(1)x_1 + (0)y_1 + (1)z_1 + 1 = 0$$

$$(-2)x_1 + (-1)y_1 + (0)z_1 - 2 = 0$$

e portanto $\quad x_1 = -1, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0$

donde $\pi_1 = \frac{R}{P}$, relação usualmente designada como "coeficiente de atrito (f).

Com referência a π_2 obtem-se:

$$(1)x_2 + (0)y_2 + (0)z_2 + 1 = 0$$
$$(1)x_2 + (0)y_2 + (1)z_2 - 1 = 0$$
$$(-2)x_2 + (-1)y_2 + (0)z_2 - 1 = 0$$

cuja solução $x_2 = -1$, $y_2 = 1$, $z_2 = 2$ conduz a

$$\pi_2 = \frac{\mu N D^2}{P}$$

A relação fisica entre essas variáveis representa-se simbolicamente por

$$\phi\left(\frac{R}{P}, \frac{\mu N D^2}{P}\right) = 0$$

ou por

$$\frac{R}{P} = f = \varphi\left(\frac{\mu N D^2}{P}\right)$$

Ex. 3.12 O conjugado C absorvido por uma hélice maritima e o empuxo axial T por ela desenvolvido dependem de:

N: velocidade angular da hélice
D: diâmetro da hélice
v: velocidade de avanço
g: aceleração da gravidade
ρ: massa específica do líquido
ν: viscosidade cinemática do líquido.

Achar as variáveis adimensionais correspondentes às funções

$$T = f_1(N, D, v, g, \rho, \nu)$$
$$C = f_2(N, D, v, g, \rho\ \nu)$$

Solução:

Considerada a matriz dimensional,

	ρ	v	D	N	g	ν	T	C
M	1	0	0	0	0	0	1	1
L	-3	1	1	0	1	2	1	2
T	0	-1	0	-1	-2	-1	-2	-2

um possível agrupamento de variáveis é o seguinte:

$$\pi_1 = N \; \rho^{x_1} \; v^{y_1} \; D^{z_1}$$
$$\pi_2 = g \; \rho^{x_2} \; v^{y_2} \; D^{z_2}$$
$$\pi_3 = \nu \; \rho^{x_3} \; v^{y_3} \; D^{z_3}$$
$$\pi_4 = T \; \rho^{x_4} \; v^{y_4} \; D^{z_4}$$
$$\pi_5 = C \; \rho^{x_5} \; v^{y_5} \; D^{z_5}$$

A determinação dos expoentes de ρ, v e D conduz ao resultado:

$$\pi_1 = \frac{ND}{v}$$

$$\pi_2 = \frac{gD}{v^2} = \frac{1}{N_F}$$

$$\pi_3 = \frac{\nu}{VD} = \frac{1}{N_R} \qquad \text{(ver exerc. 3.10)}$$

$$\pi_4 = \frac{T}{\rho \; D^2 \; v^2}$$

$$\pi_5 = \frac{C}{\rho \; D^3 \; v^2}$$

A variável adimensional π_2 é o inverso do chamado "número de Froude (N_F)", e aparece normalmente em problemas em que forças devidas à ação da gravidade desempenham papel importante. Tal é o caso de líquidos que escoam apresentando uma superfície livre (canais, vertedores, etc.,), ou de objetos que se deslocam à superfície ou próximo da superfície de um líquido (navios, querena de hidroaviões, hélices de embarcações etc.).

As funções f_1 e f_2 podem ser substituidas por

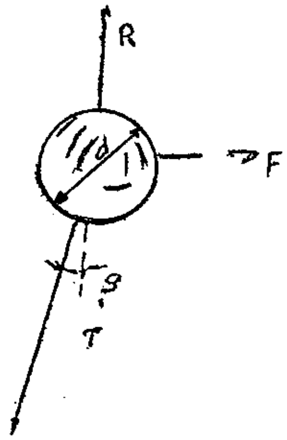
$$\frac{T}{\rho \; D^2 \; v^2} = \phi_1(\frac{ND}{v} \; , \; N_F \; , \; N_R)$$

e

$$\frac{C}{\rho \; D^3 \; v^2} = \phi_2(\frac{ND}{v} \; , \; N_F \; , \; N_R)$$

Ex. 3.13 Um balão de borracha com 15 cm de diâmetro está cheio de hidrogênio. As condições ambientes são as da atmosfera padrão ao nível do mar. O hidrogênio está à mesma pressão e temperatura do ar externo. O balão está amarrado a um cordão e uma corrente de ar de 16 km/h, horizontal e uniforme, varre a região. Desprezando-se o efeito do vento sobre o cordão, e o peso da borracha, qual o ângulo formado pelo cordão com a vertical, no ponto onde se liga ao balão?

Solução:



As tres forças em equilíbrio, mostradas na figura, são

$R = \frac{\pi d^3}{6} (\gamma_{ar} - \gamma_H)$ = resultante vertical, igual ao peso do ar deslocado menos o peso do hidrogênio.

$F = 0{,}5\ C_d\ \rho_{ar}\ v^2 (\frac{\pi d^2}{4})$ = força de arrasto provocada pelo vento sobre o balão.

$T = (R^2 + F^2)^{0,5}$ = tração exercida pelo cordão, com uma inclinação $\beta = \text{arc tg}(\frac{F}{R})$

Sabe-se também que

$$\gamma_{ar} - \gamma_H = \frac{p_{atm}}{\theta_{atm}} (\frac{1}{R_{ar}} - \frac{1}{R_H})$$

com

$p_{atm} = 1{,}013 \times 10^4\ kgf/m^2$ (atmosfera padrão)

$\theta_{atm} = 15 + 273 = 288$ K (atmosfera padrão)

$R_{ar} = 29{,}3$ m/ K (constante do ar)

$R_H = 421{,}1$ m/ K (constante do hidrogênio)

$$\therefore\ \gamma_{ar} - \gamma_H = \frac{1{,}013 \times 10^4}{288} (\frac{1}{29{,}3} - \frac{1}{421{,}1}) = 1{,}117\ kgf/m^3$$

e que

$C_d = f(N_R)$ = função do número de Reynolds representada no gráfico do exerc. 7.10.

sendo

$$N_R = \frac{Vd}{\nu_{ar}} = \frac{(16\ 000/3600)\ x\ 0\ 15(m/s)(m)}{1,45\ x\ 10^{-5}\ m^2/s} = 4,6\ x\ 10^4$$

obtem-se do gráfico

$$C_d = 0,48$$

Finalmente,

$$\frac{F}{R} = \frac{3C_d\ V^2\ \gamma_{ar}}{4dg(\gamma_{ar} - \gamma_H)}$$

$$tg\ \beta = \frac{3\ x\ 0,48(16\ 000/3\ 600)^2 1,2}{4\ x\ 0,15\ x\ 9,81\ x\ 1,117} = 5,192$$

$$\therefore\ \beta = 79^o 6'$$

Ex. 3.14 Para o balão do problema anterior, deseja-se saber qual a velocidade do vento que acarreta o ângulo de - 14
10^o entre o cordão e a vertical. Os demais dados são os mesmos.

Solução:

A equação desenvolvida no problema anterior pode - ser escrita sob a forma

$$tg\ \beta = \frac{3C_d V^2}{4dg} \left(\frac{R_H}{R_H - R_{ar}}\right)$$

ou ainda

$$tg\ \beta = \frac{3\ \nu^2 C_d V^2 d^2}{4\ d^{1+2} g\ \nu^2} \left(\frac{R_H}{R_H - R_{ar}}\right) = \frac{3\nu^2}{4g\ d^3} \left(\frac{R_H}{R_H - R_{ar}}\right) C_d\ N_R^2$$

Esta última equação, mais a função

$$C_d = f(N_R)$$

resolvidas simultaneamente dão a resposta do problema.

Pode-se resolver por tentativas, tirando-se pares de valores (C_d, N_R) do gráfico do exerc. 7.10, introduzindo-os em seguida na expressão da tg β. O par que fornecer $\beta = 10^o$ satisfaz as hipóteses, e com o valor de N_R calcula-se V.

A segunda maneira consiste em desenhar-se a reta

$$C_d \; N_R^2 = \text{constante}$$

no gráfico bi-logarítmico citado. No presente caso a constante vale

$$\frac{4g\,d^3}{3\nu^2}\left(\frac{R_H - R_{ar}}{R_H}\right) \operatorname{tg} \beta = \frac{4 \times 9{,}81(0{,}15)^3(421{,}1 - 29{,}3}{3(1{,}45 \times 10^{-5})^2(421{,}1)} \times \operatorname{tg} 10^{o} =$$

$$= 34{,}45 \times 10^6$$

Dois pontos da reta $C_d \; N_R^2 = 34{,}45 \times 10^6$ permitirão traçá-la. Por exemplo, os pontos

$$A(C_d = 15; \quad N_R = 1515)$$

$$B(C_d = 0{,}15; \; N_R = 15154)$$

Esses pontos estão marcados no gráfico. O leitor poderá verificar que a reta que passa por eles intercepta a curva representativa da função $C_d = f(N_R)$ no ponto de coordenadas 15

$$C_d = 0{,}42$$

$$N_R = 9060$$

Este ponto corresponde à solução do problema por satisfazer simultaneamente a todas as suas condições.

A velocidade procurada vale

$$v = \frac{\nu N_R}{d} = \frac{1{,}45 \times 10^{-5} \times 9060}{0{,}15} = 0{,}876 \text{ m/s}$$

ou

$$v = 3{,}15 \text{ km/h}$$

Ex. 3.15 Para o dimensionamento de desarenadores, é necessário o cálculo da velocidade de deposição atingida pelos grãos de areia em sua queda para o fundo. Assim sendo, pede-se calcular a velocidade de uma pequena esfera de quartzo que decanta em água. O diâmetro da esfera é de 0,076 mm e a sua densidade relativa é 2,65.

Solução:

Como o diâmetro da esfera é muito pequeno, o número de Reynolds deve ser baixo, de modo que provavelmente o movimento da esfera através da água se dá em regime laminar, obedecendo à lei de Stokes indicada no gráfico do exerc. .10, isto é

$$C_d = \frac{24}{N_R}$$

Considerando que

$$F = 0,5\ C_d\ \rho\ v^2\ A = 0,5\ C_d\ \rho\ v^2\ \frac{\pi d^2}{4}$$

e

$$N_R = \frac{vd}{\nu}$$

(onde $\underline{d}$ é diâmetro da esfera), uma combinação das três expressões acima conduz a

$$F = 3\rho\nu\ v\pi d$$

Por outro lado, a força resultante sobre a esfera vale

16

$$F = \frac{\pi d^3}{6}\ (\gamma_q - \gamma) = \frac{\pi d^3}{6}\ |(\frac{\gamma_q}{\gamma}) - 1|\gamma$$

De modo que

$$v = \frac{\frac{\pi d^3}{6}\ \gamma(\gamma_q/\gamma - 1)}{3\rho\nu\pi d} = \frac{d^2 g(\gamma_q/\gamma - 1)}{18\ \nu}$$

$$v = \frac{(0,076 \times 10^{-3})^2\ 9,81(2,65 - 1)}{18 \times 10^{-6}} = 5,2\mathrm{x}10^{-3} m/s$$

e

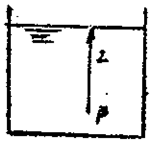
$$N_R = \frac{(5,2 \times 10^{-3})(0,076 \times 10^{-3})}{10^{-6}} = 0,4$$

confirmando-se portanto a validade da lei de Stokes.

Ex. 3.16 Pesquisar a lei física (do tipo monomia) que relaciona.

a) vazão em volume (L^3T^{-1}) que escoa por um orifício, supondo ser ela função da massa específica do líquido, diâmetro do orifício e diferença de pressão.
b) potência de uma bomba, supondo ser ela função do peso específico do fluido, da vazão e da altura manométrica H_m.

c) pressão num líquido em função de z, ρ e g

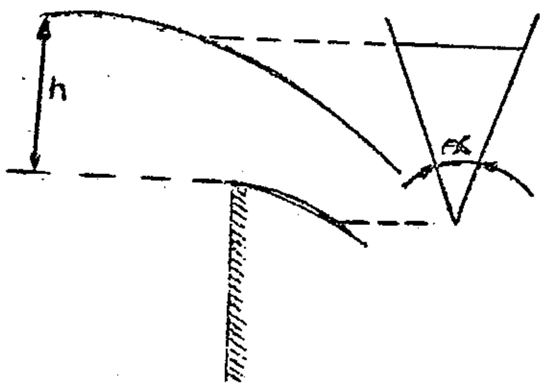


Resp.: a) $Q = c_1 D^2 \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}$ b) $W = c_2 \gamma Q H_m$

c) $p = c_3 \rho g z$

Ex. 3.17 Determinou-se experimentalmente que o período de oscilação de um pêndulo simples é dado por $T = 2\ell^{1/2}$, para T em segundos e ℓ em metros. Pede-se esse período no sistema - hora, cm. Sabendo-se que T é também função da aceleração da - gravidade, determinar a expressão de T para que seja válida em qualquer sistema de unidades coerentes. 17

Ex. 3.18 A água escoa por um vertedor triangular de ângulo α no vértice inferior. Determinar a expressão da vazão $Q(L^3T^{-1})$ sabendo-se que as variáveis intervenientes são ρ (massa específica), h (altura), g (aceleração da gravidade) e α. A mesma questão supondo que o vertedor é um semi-circulo de raio a.



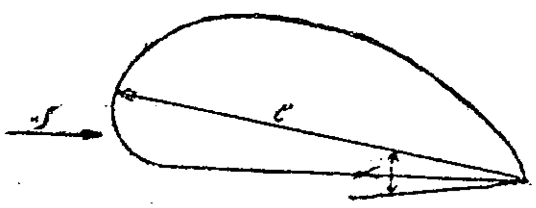
Ex 3.19 Em um canal de seção em forma de V, a altura crítica y_{cr} é função da vazão Q, da aceleração do peso g, e do ângulo α de inclinação das duas paredes do canal. Determinar pela análise dimensional a forma geral de y_{cr}.

Ex. 3.20 A perda da pressão Δp devida a uma singularidade qualquer (registro, válvula, mudança de direção, etc.)depende da forma da singularidade, do diâmetro D do tubo, da velocidade V, da massa específica ρ e da viscosidade dinâmica μ do líquido. Determinar a expressão mais geral de Δp, particularizando-a para o caso em que o efeito da viscosidade é desprezível.

Ex. 3.21 Um líquido é vertido, com vazão constante, para o interior de uma cubeta conica girante. O líquido é submetido a radiações para matar as bactérias enquanto escorre pela parede da cubeta sob a ação da força centrifuga. A eficiência das radiações depende da espessura da camada líquida sobre as paredes. Esta espessura é determinada pela vazão Q, pela velocidade ângular ω da cubeta, pela massa específica ρ, pelo coeficiente de viscosidade μ do líquido, pela aceleração da gravidade g, pela altura h da cubeta e pelo ângulo α do cone. Qual é, para a espessura <u>e</u> da camada líquida, a forma mais geral da função suposta dimensionalmente homogênea. 18

Ex. 3.22 O problema básico de um projeto de um perfil de asa é o seu deslocamento em movimento uniforme através de um fluido em repouso. Este fenômeno é equivalente ao problema de um fluido em movimento uniforme através de um perfil fixo, conforme ilustrado na figura. Se o fluido é considerado incompressível mas viscoso, a força R exercida pelo fluido sobre o perfil é função das seguintes variáveis ℓ, ρ, ν, v_o, α.

Determinar pelo teorema Pi a forma geral de R. Quando o movimento é extremamente lento, R torna-se função somente de ν, ℓ, v_o e α. Determinar para este caso a forma geral de R e particularizar o resultado para o caso em que o obstáculo é uma esfera (fórmula de Stokes).



Ex. 3.23 A queda de pressão Δp entre as pressões reinantes na entrada e na saída de umaturbina ou bomba depende de

D - diâmetro
Q - vazão
N - rotação
ρ - densidade
μ - viscosidade absoluta

Determinar a função adimensional equivalente à função

$$\Delta p = f(D, Q, N, \rho, \mu)$$

Resp.: $\dfrac{\Delta p}{1/2\ \rho (DN)^2} \quad \dfrac{ND^3}{Q} \quad \dfrac{ND^2}{\nu}$

Ex. 3.24 Para se determinar a resistência oposta pelas ondas a um barco fazem-se ensaios no laboratório em um tanque de provas sobre um modelo reduzido na escala 1:25. 19

a) se a velocidade máxima que o protótipo desenvolverá é de - 36 km/h, qual deve ser a velocidade desenvolvida no modelo para se obter ondas dinamicamente semelhantes às reais.

b) se a resistência oposta no modelo é de 0,2 kgf que valor terá no protótipo.

<u>Solução</u>:

Como se pretende determinar a resistência devida apenas às ondas, a lei física exprime-se por

$$\frac{R}{\rho L^2 v^2} = \phi\ (N_F)$$

Ora, se $(N_F)_m = (N_F)_p$ (com o índice m significando "modelo", e p "protótipo") resultará necessariamente

$$\left(\frac{R}{\rho L^2 v^2}\right)_m = \left(\frac{P}{\rho L^2 v^2}\right)_p$$

Por conseguinte,

$$\frac{V_m^2}{L_m g_m} = \frac{V_p^2}{L_p g_p}$$

$$\left(\frac{V_m}{V_p}\right)^2 = k_V^2 = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)\left(\frac{g_m}{g_p}\right) = k_L$$

$$\therefore \quad k_v = \sqrt{1:25} = 1:5$$

$$V_m = 36/5 = 7{,}2 \text{ km/h} \quad \text{ou} \quad 2{,}0 \text{ m/s}$$

$$k_R = k_\rho \, k_L^2 \, k_v^2 = k_\rho \, k_L^2 \, k_L = k_L^3$$

$$\therefore \quad k_R = (1:25)^3 = 1:15625$$

$$\therefore \quad R_p = 15\,625 \times 0{,}2 = 3\,125 \text{ kgf}$$

Ex. 3.25 Um submarino deverá mover-se, quando submerso, à velocidade de 6 nós. Constroe-se para testes um modelo do mesmo com dimensões lineares iguais a um décimo das do protótipo. Qual deve ser a velocidade do modelo, se os ensaios forem feitos com a mesma água em que o submarino real navegará? Determinar também a escala de forças, que permitirá avaliar-se a força de arrasto sobre o submarino a partir da força homóloga 20
medida no modelo.

Solução:

Como já é sabido, esse movimento obedece à lei

$$\frac{F}{\rho \ell^2 v^2} = \phi \, (N_R)$$

em que a função simbolizada por ϕ depende da geometria do escoamento, e portanto da forma geométrica do objeto (submarino). Se fosse conhecida ϕ, atraves de experiências prévias com objetos geometricamente semelhantes, o comportamento desse submarino poderia ser imediatamente previsto com base naquela função. Este é o procedimento usado, por exemplo, quando o objeto do problema é uma esfera, pois para essa forma geométrica a função ϕ já é amplamente conhecida (ver Problemas 13, 14 e 15).

Quando, como é o caso em questão, não existe informação prévia, o procedimento a ser seguido é determinar os pontos representativos de ϕ (definidos pelas coordenadas $F/\rho \ell^2 v^2$ e N_R) que interessam ao problema. Conforme o interesse, podem-se determinar um ponto, dois pontos, alguns pontos, ou uma série de pontos cobrindo um intervalo de valores das duas coordenadas. Para a determinação, são feitas experiências com um modelo, geometricamente semelhante a ele porém de tamanho diferente, forçando-se uma das variáveis adimensionais do fenômeno (ou, todas menos uma) a assumir o mesmo valor com que se apresentará em relação ao objeto real - o valor da variável restante para o modelo automaticamente resultará o mesmo que para o protótipo.

Assim, no presente caso deve-se impor

$$(N_R)_m = (N_R)_p$$

$$\frac{V_m \ell_m}{\nu_m} = \frac{V_p \ell_p}{\nu_p}$$

$$\frac{V_m}{V_p} = (\frac{\nu_m}{\nu_p}) / (\frac{\ell_m}{\ell_p})$$

21

$$k_V = k_\nu / k_L$$

(a relação indicada pela letra k é chamada escala)

o numericamente,

$$k_V = 1/0,1 = 10$$

$$\therefore \quad V_m = 10 \ v_p = 10 \times 6 = 60 \text{ nós}$$

ou

$$V_m = 60(1853 \text{ m}/3600\text{s}) = 30,9 \text{ m/s}$$

O que o leitor acha deste resultado?

A escala de forças decorre da igualdade

$$\frac{F_m}{\rho_m \ell_m^2 V_m} = \frac{F_p}{\rho_p \ell_p^2 V_p}$$

$$\therefore \quad \frac{F_m}{F_p} = (\frac{\rho_m}{\rho_p}) (\frac{\ell_m}{\ell_p})^2 (\frac{V_m}{V_p})^2$$

$$k_F = k_\rho \ k_L^2 \ k_V^2 = k_\rho \ k_\nu^2$$

resultando numericamente

$$k_F = 1(1)^2 = 1$$

O que dizer deste resultado?

Ex. 3.26 Seja uma classe de ventiladores geometricamente semelhantes que dependem de dois comprimentos, o diâmetro D do rotor e o diâmetro d da seção contraída. A potência W é função de D, d, N, ρ, M onde N é a frequência, ρ é a massa específica e M é a vazão em massa ($FL^{-1}T$). Determinar as condições e os resultados de semelhança.

Ex. 3.27 O vertedouro de uma barragem em projeto destina-se a uma vazão de 5 m^3/s. A altura H do nível de água acima da crista do vertedouro deverá ser determinada por meio de um modelo. Determinar uma escala de comprimento para o modelo, sabendo que a vazão disponível no laboratório é $Q_m = 0{,}02\ m^3/s$ e que a força da gravidade é a principal responsável pelo movi- 22
mento.

Resp.: $K_L \leq 1/10$

Ex. 3.28 Determinar a relação entre as escalas quando há igualdade dos números de Reynolds, Euler, Froude e Weber no modelo e no protótipo:

a) $k_v k_L = k_\nu$

b) $k_p = k_\rho \, k_v^2$

c) $k_v^2 = k_L k_g = k_L$

d) $k_\rho k_v^2 k_L = k_\sigma$

Ex. 3.29 Um modelo de navio na escala 1:100 é testado em laboratório. O protótipo tem 100 m de comprimento. Para uma velocidade que corresponde a 10 m/s no protótipo, a força de arrasto medida no modelo é 1 kgf. Qual é a velocidade de teste do modelo e a força de arrasto do protótipo. As grandezas que intervêem no fenomeno são ρ, V, L, μ, g, p.

Resp.: $v_m = 1$ m/s $\qquad F_p = 10\,000$ kgf

Ex. 3.30 Para se determinar as características de uma hélice de 4,0 m de diâmetro, que gira com frequência de 100 rpm, foi executado um modelo de 0,50 m de diâmetro. Sabe se que a força de propulsão da hélice é função somente da velocidade de deslocamento V, do diâmetro D da hélice e da frequência N, e das características μ e ρ do líquido. Pedem-se: a) Mostrar que se o modelo se move no mesmo líquido do protótipo a semelhança completa é impossível de ser realizada na prática (fenômeno de cavitação no líquido ou razões de compressibilidade no ar); b) Desprezando as forças viscosas e Admitindo para o modelo que a frequência de rotação é de 360 rpm, que a força de propulsão é de 23 kgf, que o momento aplicado é de 2,20 kgm e que a velocidade de deslocamento é de 9,0 km/h determinar o rendimento do modelo, a velocidade, a força de propulsão e o momento do protótipo.

Ex. 3.31 Deseja-se determinar a força que resiste ao avanço de um navio à velocidade de 4,88 m/s em água do mar (ρ = 1026 kg/m^3), por meio de um modelo construido na escala linear 1:16 e cujo casco apresenta uma área molhada de 3,72m^2. Na velocidade correspondente à condição de semelhança, a força de resistência medida durante ensaio do modelo em água doce - foi de 4,35 kgf. Sabe-se que a força de arrasto em kgf/m^2 sobre o modelo em água doce devida exclusivamente à viscosidade, vale $0{,}443v^{1,9}$; sobre o navio em água do mar, a aludida força de arrasto vale $0{,}396v^{1,85}$. Determinar a velocidade de ensaio do modelo e a resistência total ao avanço do navio. 23

Res.: v = 1,22 m/s F = 15 300 kgf(aprox.)

Ex. 3.32 A vazão Q de um líquido com viscosidade cinemática ν é medida por meio de um vertedor triangular. Levando em conta as variáveis intervenientes, mostrar que

$$\frac{Q}{H^{2,5}\ g^{0,5}} = \phi\left(\frac{H^{1,5}\ g^{1,5}}{\nu}\right)$$

onde H é a distância vertical desde a superfície livre do líquido até o vértice do triangulo.

Para um vertedor com ângulo de 60°, a vazão de água é calculável por $Q = 0{,}7634\ H^{2,47}$ (unidades métricas), fórmula essa determinada experimentalmente. Determinar a vazão, em m^3/s, sobre um vertedor idêntico, de um líquido cuja viscosidade cinemática é seis vezes a da água quando H = 0,23 m.

Res $20{,}8 \times 10^{-3}$ m^3/s