UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

COLETÂNEA DE EXERCÍCIOS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS
APOSTILA Nº 12

INTRODUÇÃO À DINÂMICA DOS FLUIDOS REAIS E CAMADA LIMITE.

OSWALDO FERNANDES
PROF. ASSISTENTE DE
MECÂNICA DOS FLUIDOS
EPUSP - 1996

APOSTILA Nº 12

INTRODUÇÃO À DINÂMICA DOS FLUIDOS REAIS E CAMADA LIMITE

A - INTRODUÇÃO

Esta Apostila abrange exercícios sobre dinâmica dos fluidos reais, incluindo camada limite e lubrificação hidrodinâmica.

B -BIBLIOGRAFIA

MAMED ASSY, TUFI, Mecânica dos Fluidos, Livro-Texto, EPUSP, Capítulos XVIII e XIX.

C - PRINCIPAIS CONCEITOS

C-1 Equação do Movimento de Navier-Stokes para Movimento Laminar de Fluido Incompressível:

$$\rho\vec{a} = \rho\vec{f} - \text{grad}p + \mu\nabla^2\vec{v}.$$

C-2 Camada Limite Laminar ao Longo da Placa Plana (Desde x = 0, até x_{tr}).

a - Espessura da camada limite laminar:

$$\frac{\delta_L}{x} \cong \frac{5,0}{\sqrt{R_x}},$$

onde

$R_x = \frac{v_0 x}{\upsilon}$, x abscissa ao longo da placa, a partir do bordo de ataque, v_0 = velocidade constante do fluido, ao longe, em relação à placa (paralela a O_x).

b) Coeficiente de atrito local:

$$(C_a)_L = \frac{\tau_0}{\rho v_0^2/2} = \frac{0,664}{\sqrt{R_x}}.$$

c) Coeficiente de atrito médio:

$$\left[\overline{C_a(x)}\right]_L = \frac{1.328}{\sqrt{R_x}}.$$

d) Força de atrito (ou de arrasto):

$(F_a)_L = \frac{1}{2}\rho v_0^2 L\, \overline{C}_a(L)$, para cada um dos lados da placa plana, por unidade de largura.

C3- Camada Limite Turbulenta (acima de x_{cr} e até x = L, no bordo de fuga)

a)Espessura da camada limite turbulenta:

$$\frac{\delta_T}{x} = \frac{0.37}{R_x^{0,2}}$$

b) Coeficiente de atrito local:

$$(C_a)_T = \frac{\tau_0}{1/2\rho v_0^2} = \frac{0.0592}{R_x^{0,2}}.$$

c)Coeficiente de atrito médio (0 a x):

$$\left[\overline{C_a(x)}\right]_T = \frac{0.074}{R_x^{0,2}}.$$

d) Força de atrito (ou de arrasto) para uma placa plana onde há camada limite laminar e turbulenta (por unidade de largura, para um dos lados da placa):

$$F_a = \frac{1}{2}\rho v_0^2\left[\overline{Ca}(L)_T L - \overline{Ca}(x_{cr})_T\, x_{cr} + \overline{Ca}(x_{cr})_L\, x_{cr}\right].$$

APOSTILA Nº 12

INTRODUÇÃO À DINÂMICA DOS FLUIDOS REAIS.

12.1 – Determinar o diagrama de velocidades para um fluido incompressível, escoando em movimento laminar permanente entre duas placas, sendo uma fixa e a outra móvel. Supor que a pressão p^* seja constante em todos os pontos. Calcular a tensão de cisalhamento na placa inferior.

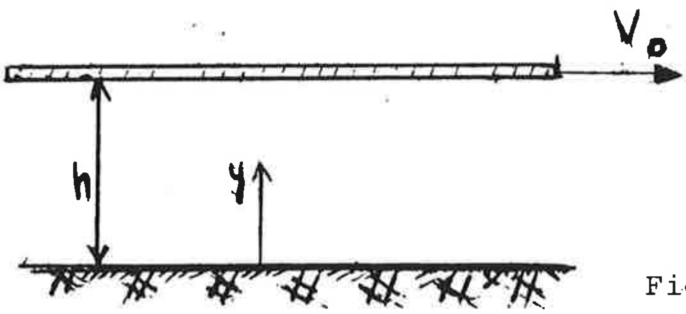


Fig 12.1

Solução:

Aplicando-se a Equação de Navier-Stokes ao escoamento do fluido incompressível em movimento laminar permanente obtemos

$$\rho\vec{a} - \rho\vec{g} - \text{grad}p + \mu\nabla^2\vec{v} = -\text{grad}p^* + \mu\nabla^2\vec{v},$$

onde

$p^* = p + \gamma z$ = pressão matriz; z = cota da vertical do lugar referida a um plano horizontal de referência e contada de baixo para cima;

μ = coeficiente de viscosidade absoluta ou dinâmica;

$\vec{v} = v_x\vec{\ell}_x$, com $v_x = v_x(x,y)$, $v_y = v_z = 0$;

p^* = cte e $\text{grad}p^* = 0$.

Pela Equação da continuidade aplicada ao fluido incompressível:

$$\text{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}}^{\,0} + \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}}^{\,0} = 0.$$

Donde, $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ e $v_x = v_x(y)$, função só de y.(A)

Calculando $\vec{a}$, obtemos

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla)\vec{v} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial_x} \vec{e}_x = 0, \text{ devido a (A).}$$

Temos, então, da Eq. de Navier Stokes

$$\mu\nabla^2 \vec{v} = \mu\nabla^2 v_x \vec{e}_x = 0.$$

Ou seja:

$$0 = \mu\nabla^2 v_x = \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2}$$

por ser $\quad v_x = v_x(y).$

Integrando:

$$\frac{dv_x}{dy} = c_1$$

e

$$v_x = c_1 y + c_2 ,$$

onde c_1 e c_2 são constantes a serem determinadas através de condições de contorno, a saber:

Para $y = 0$, $v_x = 0$;

$y = h$, $v_x = v_o$.

Daí,

$$v_x = \frac{v_o y}{h} .$$

A tensão de cisalhamento vale

$$\tau = \mu \frac{dv_x}{dy} = \mu \frac{v_o}{h} ,$$

constante em todos os pontos, inclusive na placa inferior.

Ex.12.2 - Um fluido viscoso escoa sobre um plano inclinado como é mostrado na figura. O escoamento é dinamicamente estabelecido e paralelo ao plano. A velocidade não é função da distância ao reservatório. Para uma profundidade h do fluido, determinar:

- o diagrama de velocidades, adotando que o fluido seja incompressível, o regime permanente e o escoamento plano;
- a distribuição das pressões;
- a tensão de cisalhamento no plano inclinado.

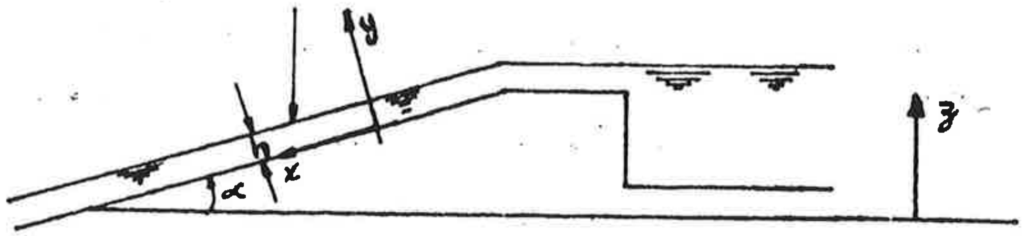


Fig 12.2

Solução:

A aplicação da Equação de Navier-Stokes ao escoamento em consideração nos leva a

$$\rho\vec{a} = \rho\vec{g} - \text{grad}p + \mu\nabla^2\vec{v},$$

com

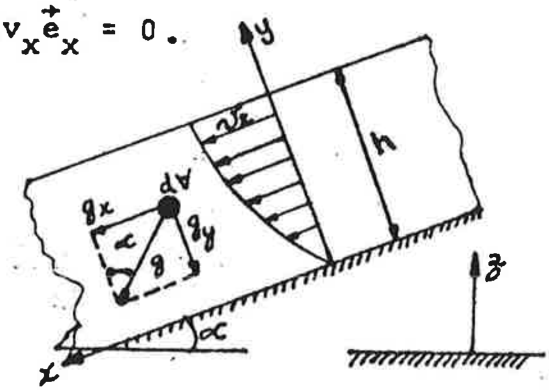
$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x \quad ,$$

$$\vec{a} = 0 \text{ (conforme raciocínio aplicado ao problema 6.1),}$$

$$v_x = v_x(y) \text{ - ver problema 6.1.}$$

Então:

$$\rho\vec{g} - \text{grad}p + \mu\nabla^2 v_x\vec{e}_x = 0.$$



Segundo $\vec{e}_x$

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\nabla^2 v_x = 0;$$

$$\rho g \operatorname{sen}\alpha - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{d^2 v_x}{dy^2} = 0 \quad (A)$$

Segundo $\vec{e}_y$,

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$-\rho g\cos\alpha = \frac{\partial p}{\partial y} \text{ , que, integrando, nos fornece}$$

$$p = -\rho g y\cos\alpha + f(x), \text{ pois } p = p(x, y).$$

Mas, para $y = h$, $p = p_o = 0$ (p_{atm} efetiva) e $f(x) = \rho g h \cos\alpha$.

Daí, a distribuição de pressões

$$p = \rho g(h - y)\cos\alpha \quad \text{e} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

É uma distribuição hidrostática segundo à normal, $\vec{e}_y$, às linhas de corrente, uma vez que $p + \rho g y \cos\alpha = p + \rho g z = \rho g h \cos\alpha = cte$. De (A)

$$-\rho g \operatorname{sen}\alpha = \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2}\text{, que, integrando, fornece:}$$

$$v_x = -\frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{2\mu} y^2 + c_1 y + c_2,$$

onde as constantes c_1 e c_2 são obtidas a partir das condições de contorno a seguir:

$$v_x = 0, \text{ para } y = 0;$$

$$\tau = \mu \frac{dv_x}{dy} = 0, \text{ para } y = h.$$

Então $c_2 = 0$ e $c_1 \frac{gh\operatorname{sen}\alpha}{\mu}$, o que nos leva ao diagrama de velocidades

$$v_x = \frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{2\mu}(2h - y)y = \frac{g\operatorname{sen}\alpha}{2\nu}(2h - y)y$$

e

$$(v_x)_{max} = \frac{gh^2\operatorname{sen}\alpha}{2\nu}.$$

A tensão de cisalhamento τ valerá

$$\tau = \mu \frac{dv_x}{dy} = \rho g \operatorname{sen}\alpha(h - y).$$

Para $y = 0$, $\tau_o = \rho g h \operatorname{sen}\alpha$.

?.3 - Determinar a distribuição de velocidades e a queda de pressão no escoamento em regime permanente de um fluido incompressível entre duas placas planas fixas, no campo de gravidade.

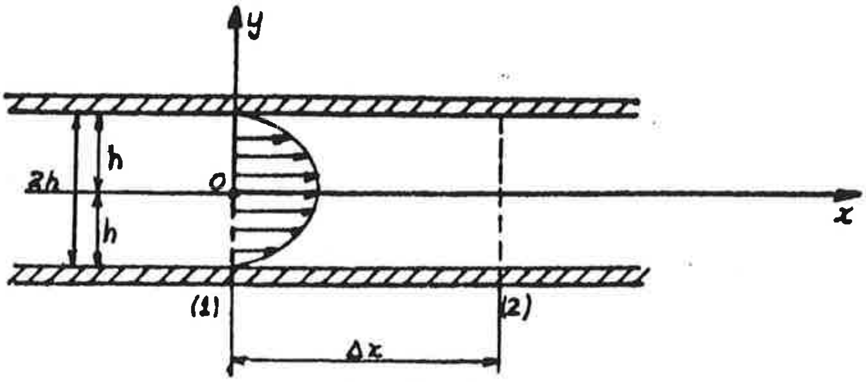


Fig 12.3

Resp.: $v = v_{max}(1 - \frac{y^2}{h^2})$; $(p_1 + \rho g z_1) - (p_2 + \rho g z_2) = \frac{2 v_{max} \mu}{h^2} \Delta x$.

12.4 - Seja um viscosímetro de cilindros coaxiais. Admitir que:

a) o escoamento entre os cilindros é laminar e é devido à rotação do cilindro interno;

b) as propriedades do fluido são constantes;

c) as componentes radiais e verticais das velocidades são nulas;

d) despreza-se o efeito do fundo.

Determinar o conjugado necessário para manter o cilindro interno com ω = cte.

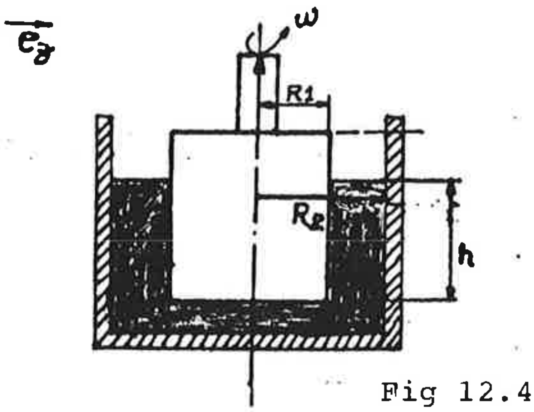


Fig 12.4

Solução

Aplicando-se a equação de Navier Stokes obtemos

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{g} - \text{grad} p + \mu \nabla^2 \vec{v},$$

com

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla)\vec{v} = \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \vec{e}_\theta) = - \frac{v_\theta^2}{r} \vec{e}_r ,$$

uma vez que

$$\vec{v} = v_\theta \vec{e}_\theta \ , \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = - \vec{e}_r \quad e \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0, \text{ ou seja } v_\theta = v_\theta(r).$$

O último resultado $\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$ se obtém da equação da continuidade

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial \overset{\to 0}{v_r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \text{ (Fluido incompressível).}$$

Sendo $\vec{g} = -g\vec{e}_z$,

$$-\rho \frac{v_\theta^2}{r}\vec{e}_r = -\rho g\vec{e}_z - \frac{\partial p}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{\partial p}{r\partial\theta}\vec{e}_\theta - \frac{\partial p}{\partial z}\vec{e}_z + \mu\nabla^2 v_\theta \vec{e}_\theta + \mu v_\theta \nabla^2 \vec{e}_\theta,$$

onde, por simetria, $\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$, ou seja $p = p(r, z)$,

e

$$\nabla^2 v_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}v_\theta\right), \text{ pois } v_\theta = v_\theta(r);$$

e

$$\nabla^2 \vec{e}_\theta = \frac{1d^2}{r^2 d\theta^2}\vec{e}_\theta = \frac{-\vec{e}_\theta}{r^2}.$$

Daí

$$\rho\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad \text{donde } p = -\rho g z + \varphi(r)$$

e

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_\theta}{dr}\right) = \frac{v_\theta}{r^2}, \text{ ou seja, } r\frac{d^2 v_\theta}{dr^2} + \frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r} = 0.\text{(A)}$$

Ora $v_\theta = r$ (diagrama linear de velocidades) é uma solução particular de (A). Consideremos u tal que $v_0 = u \cdot r$. Obtemos, substituindo em (A)

$$ru'' = -3u'$$

e

$$u = -\frac{1}{2r^2}\text{ ; donde: } y = -\frac{1}{2r}.$$

A solução geral de (A) será, então, do tipo:

$v_\theta = \frac{c_1}{r} + c_2 r$ com c_1 e c_2 constantes a determinar pelas condições de contorno a seguir:

- Para $r = R_1$, $v_\theta = \omega R_1$ (condição de aderência completa).

- Para $r = R_2$, $v_\theta = 0$ (idem).

Então: $$c_1 = \frac{\omega R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad \text{e} \quad c_2 = -\frac{\omega R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

O conjugado exercido pelo fluido no cilindro interno será

$$C' = F \, . \, R_1 = \tau_1 2\pi R_1 h \times R_1 = 2\pi R_1^2 h \tau_1,$$

onde

$$\tau_1 = \mu\left(\frac{dv}{dr}\right)_{r=R_1} = \mu\left(c_2 - \frac{c_1}{R_1^{\,2}}\right) = -\,\omega\frac{\mu(R_1^{\,2} + R_2^{\,2})}{R_2^2 - R_1^{\,2})}.$$

Daí, sendo

C = conjugado exercido sobre o fluido = $-\,C'$,

$$C = 2\pi\mu\omega h \frac{R_1^{\,2}(R_1^{\,2} + R_2^{\,2})}{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}}$$

12.5 - Determinar o diagrama de velocidades de um escoamento laminar permanente de um fluido incompressível, num conduto de seção circular. Determinar ainda a perda de carga entre duas seções e o coeficiente de perda de carga distribuida. Equação de Navier Stokes em coordenadas cilindricas.

$$* \quad \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \; v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^{\,2}}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial r} +$$
$$+ \nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial^2 z} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2}\right);$$

$$* \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p^*}{\partial \theta} +$$
$$+ \nu\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right);$$

$$* \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial z} +$$

$$+ \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

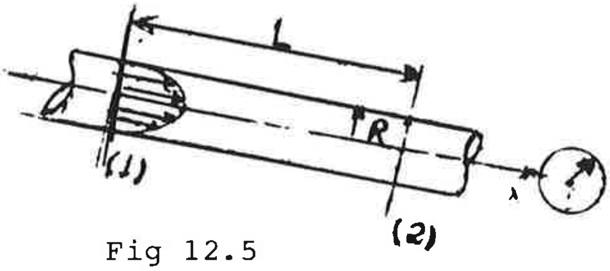


Fig 12.5

Lembrar que:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right]$$

Resp.: $v = v_{max} \left|1 - \left(\frac{r}{R}\right)\right|^2$; $h_f = \frac{32\ v\ L\ \mu}{g\ \rho\ D^2}$; $f = \frac{64}{Re}$.

12.6 – Uma placa plana, extremamente fina e polida acha-se numa corrente uniforme de ar de fraca turbulência e com velocidade - de 60 m/s. A placa mede 14 cm de comprimento por 1 m de envergadura. Determinar

- expressão da espessura da camada limite dinâmica, e seu valor no bordo de fuga;
- força de arrasto que age sobre as 2 faces da placa.

Dados $\nu_{ar} = 0{,}16\ cm^2/s$; $\rho_{ar} = 1{,}1$ g/litro; $R_{cr} = 5 \times 10^5$

<u>Solução:</u>

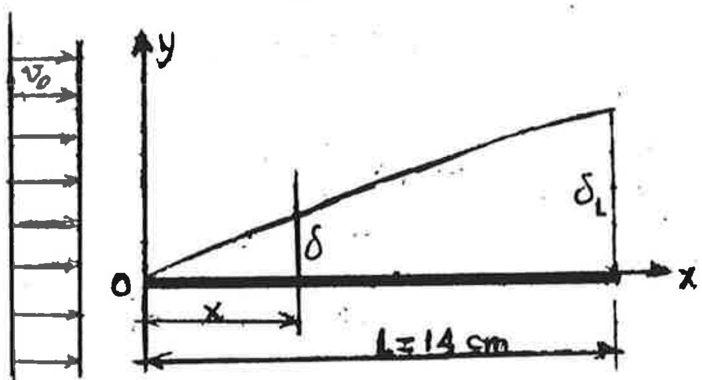


Fig 12.6

Verifiquemos inicialmente o tipo de escoamento que tem lugar sobre a placa plana em estudo.

Cálculo do número de Reynolds Re:

$$Re = \frac{v_o x}{\nu} = \frac{60x}{0{,}16 \times 10^{-4}} = 3{,}75 \times 10^6 x.$$

Para x = L = 0,14m, obtemos o máximo Re,

$$(Re)_L = 5{,}3 \times 10^5.$$

Como o $(Re)_{cr}$ de passagem do movimento laminar para o turbulento é igual a 5×10^5, podemos considerar que em toda a placa a camada limite seja laminar, valendo para ela, portanto, as seguintes expressões:

Espessura δ da camada limite, segundo Blasius,

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re}} = 2,58 \times 10^{-3} \sqrt{x} .$$

Para x = L,

$$\delta_L = 0,001m = 1mm .$$

Coeficiente médio de atrito na placa:

$$C_a = \frac{1332}{\sqrt{R_L}} = 18 \times 10^{-4} .$$

Força de arrasto em cada face:

$$F_a = \frac{1}{2} \rho v_o^2 C_a S =$$

$$F_a = \frac{1}{2} \times \frac{1,1}{10} \times 60^2 \times 18 \times 10^{-4} \times 0,14 \times 1 =$$

$$= 0,050 \text{ kgf}.$$

Nas duas faces F_a = 0,10 kgf.

12.7

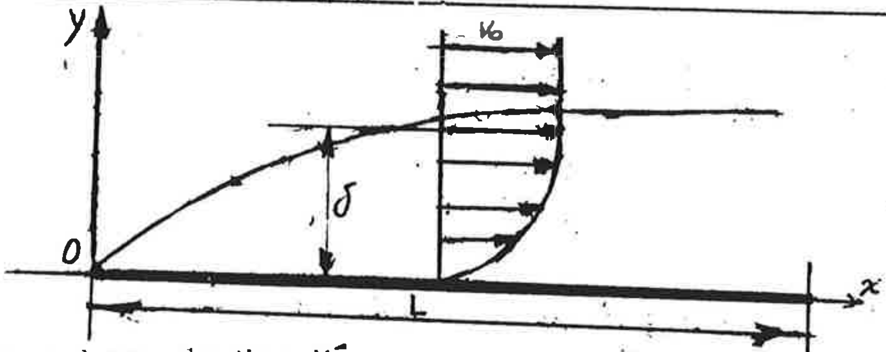


Fig 12.7

-Usando o Lema de Von Kármán para a camada limite ao longo de uma placa plana, determinar o diagrama de velocidades no interior da camada limite e a expressão da espessura da camada limite, ao se considerar tal diagrama parabólico (comparar - com a solução de Blasius). Determinar, também, a expressão do coeficiente de atrito local médio e da força de arrasto na placa.

Solução:

Lema de Von Kárman (para v_o = cTe)

$$\tau = \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho(v_x v_o - v_x^2)dy = \mu\left(\frac{dv_x}{dy}\right)_{y=0} = \frac{1}{e}\frac{dR_a}{dx},$$

onde e = envergadura da placa.

Perfil parabólico de velocidades:

$$v_x = ay^2 + bx + c,$$

onde a, b e c são constantes a serem determinadas através das condições de contorno:

- para y = 0, v_x = 0, donde c = 0;
- para y = δ = espessura da camada limite,

$$v_x = v_o,$$

$$v_o = a\delta^2 + b\delta;$$

- para y = δ, $\frac{\partial v_x}{\partial y} = 2ay + b = 2a\delta + b = 0.$

Daí,

$$a = \frac{-v_o}{\delta^2} \quad \text{e} \quad b = \frac{2v_o}{\delta} \quad \text{e}$$

$$v_x = -\frac{v_o y^2}{\delta^2} + \frac{2v_o y}{\delta}.$$

Aplicando o Lema de Von Kárman,

$$\tau = \mu(2ay + b)_{y=0} = \rho\frac{d}{dx}\int_0^\delta \left(\frac{-v_o^2 y^2}{\delta^2} + \frac{2v_o^2 y}{\delta} - \frac{v_o^2 y^4}{\delta^4} - 4v_o^2\frac{y^2}{\delta^2} + 4v_o^2\frac{y^3}{\delta^3}\right)dy.$$

Daí:

$$+\frac{2\nu v_o}{\delta} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{v_o^2}{3}\delta + v_o^2\delta - \frac{v_o^2\delta}{5} - \frac{4}{3}v_o^2\delta + v_o^2\delta\right)$$

$$= \frac{2}{15}v_o^2\frac{d\delta}{dx}.$$

Donde,

$$\delta d\delta = \frac{15\nu}{v_o}dx.$$

Integrando,

$$\delta^2 = \frac{30\nu}{v_o}x + k.$$

Se para x = 0, δ = 0, então k = 0 e $\delta / x = 5.48/\sqrt{Re}$, com $Re = v_0 x/\upsilon$ que se apresenta 10% acima do valor obtido por Blasius.

Coeficiente de atrito local. Para $\overline{Ca}(x) = 2C_a(x)$, obtem-se $\overline{C}_a(x) = \frac{2\tau}{\frac{1}{2}\rho v_0^2} = \frac{4\mu b}{\rho v_0^2} = \frac{1.46}{\sqrt{Re}}$.

Segundo Blasius,

$$(\bar{C}_a)_B = \frac{1,332}{\sqrt{Re}} .$$

Comparando, $\dfrac{\bar{C}_a}{(\bar{C}_a)_B} = 1,10 .$

Força de arrasto

$$R_a = \frac{1}{2} \rho \, v_o^2 \, \bar{C}_a S ,$$

onde

$$S = e \, . \, L .$$

Ex. 12.8 — Usando o Lema de Von Kárman para a camada limite ao longo de uma placa plana, determinar, para um diagrama de velocidades da forma

$$v_x = ay + by^3 ,$$

- expressão da velocidade v_x ,
- expressão da espessura da camada limite,
- expressão dos coeficientes de atrito local e médio.

Resp.:

$$v_x = \frac{3v_o}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{v_o}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 ; \qquad C_a = \frac{0,647}{\sqrt{Re}} ;$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,64}{Re} \quad \text{com} \quad Re = \frac{v_o x}{\nu} ; \qquad C_a = \frac{1,294}{\sqrt{Re}} .$$

Ex. 12.9 — Usando o Lema de Von Kárman para a camada limite ao longo de uma placa plana, determinar, para um diagrama senoidal da forma

$$v_x = a \operatorname{sen} by + C ,$$

- expressão da velocidade v_x;
- expressão da espessura da camada limite;
- expressão dos coeficientes de atrito local e médio.

Resp.: $v_x = v_o \operatorname{sen} \frac{\pi y}{2\delta}$;

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,79}{\sqrt{Re}} \text{, com } Re = \frac{v_o x}{\nu};$$

$$C_a = \frac{0,656}{\sqrt{Re}} \quad e \quad \bar{C}_a = \frac{1,312}{\sqrt{Re}}.$$

Ex. 12.10 – Uma placa plana de 1 m de comprimento por 2 m de largura e de espessura desprezível, cai verticalmente - num fluido de viscosidade cinemática 1,5 x 10^{-6} m^2/s. A placa pesa 1,6 kgf e desce com velocidade constante de 2.0 m/s. Determinar o ponto da placa no qual haverá transição da camada limite (ρ = 100 utm/m^3).

Resp. x_{cr} = 0,63m.

Ex. 12.11 - Determinar a espessura da camada limite laminar numa abcissa x, sobre uma placa plana, sabendo-se que - Re = 10^4 nesta abscissa.

Dados: $\nu = 10^{-5}$ m^2/s; v_o = 0,1 m/s ;

$$\frac{x\bar{C}_a}{2} = \int_o^\delta \frac{v}{v_o}\left(1 - \frac{v}{v_o}\right) dy,$$ $\bar{C}_a$ = coeficiente de atrito médio entre 0 e x.

O diagrama de velocidades na camada limite, segundo a normal à placa é $v = \alpha y^3 + \beta y$, com α e β a determinar.

Resp.: δ = 4,8 cm.

Ex. 12.12 – Lubrificação hidrodinâmica

Achar as expressões da distribuição de pressões e das forças de sustentação e arrasto para um mancal de sapatas que trabalha conforme esquema da figura e campo das velocidades

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x (v_y = v_z = 0).$$

Determinar, também, a condição de sustentação máxima.

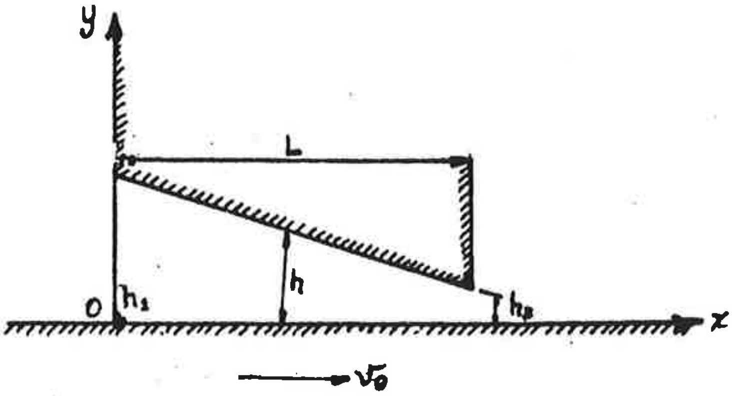


Fig 12.12

Solução:

Aplicando a Equação de Navier-Stokes,

$$\rho\vec{a} = \rho\vec{g} - \text{grad}p + \mu\nabla^2\vec{v} = -\text{grad}p^* + \mu\nabla^2\vec{v},$$

com

$p^* = p + \rho g z$ (z = ordenada vertical do local, orientada de baixo para cima);

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla)\vec{v} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}\vec{e}_x .$$

Como $\text{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$, $\vec{a} = 0$, $v_x = v_x(y)$

e

$$\text{grad}p^* = \mu\nabla^2 v_x\vec{e}_x ,$$

então

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p^*}{\partial z} = 0 \quad \text{e} \quad p^* = p^*(x);$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} = \mu\nabla^2 v_x = \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) = \mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} .$$

Como o primeiro membro é só função de x e o segundo só função de y,

$$\frac{dp^*}{dx} = A ,$$

$$\mu\frac{d^2 v_x}{dy^2} = A ,$$

onde A = cte .

Integrando,

$$v_x = \frac{Ay^2}{2\mu} + c_1 y + c_2 ,$$

com c_1 e c_2 constantes a determinar pelas condições de contorno:

Para $y = 0$, $v_x(0) = v$.

Para $y = h$, $v_x(h) = 0$.

Daí,

$$v_x = \frac{Ay}{2\mu}(y - h) - \frac{v_o}{h}(y - h) = (\frac{Ay}{2\mu} - \frac{v_o}{h})(y - h).$$

Para uma largura de sapata unitária (normalmente ao plano xOy) a vazão Q de lubrificante será dada por:

$$Q = \int_o^h v_x dy = \frac{v_o h}{2} - \frac{Ah^3}{12\mu} .$$

Distribuição das pressões p^* :

$$A = \frac{dp^*}{dx} = \frac{6\mu v_o}{h^2} - \frac{12\mu Q}{h^3} ,$$

onde $h = h(x) = h_1 - mx$ e $m = \dfrac{h_1 - h_2}{L}$.

Integrando,

$$p^* = \frac{6\mu v_o}{m(h_1 - mx)} - \frac{6\mu Q}{m(h_1 - mx)^2} + c_3 = p$$ (se se desprezar o efeito da gravidade pois h é pequeno).

Condições de contorno: Para $x = 0$ e $x = L$, $p = 0$.

Então:

$$Q = \frac{v_o h_1 h_2}{h_1 + h_2} \quad \text{e} \quad c_3 = - \frac{6\mu v_o}{m(h_1 + h_2)} \quad \text{e} \quad p = \frac{6\mu v_o x(h - h_2)}{h^2(h_1 + h_2)} .$$

Se $h > h_2$, $p > 0$; $p_{max} = \dfrac{3\mu v_o L(h_1 - h_2)}{2h_1 h_2(h_1 + h_2)}$ para $\bar{x} = \dfrac{h_1 L}{h_1 + h_2}$ e

$$\bar{h} = \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2} .$$

A força F de sustentação será $F = \int_o^L p dx$ por unidade de largura do mancal.

$$F = \frac{6\mu v_o L}{h_2^2(k - 1)^2}\left[\ell n\, k - 2\,\frac{k - 1}{k + 1}\right] \quad \text{com } k = \frac{h_1}{h_2} .$$

A força de arrasto será $F_a = \int_o^L \tau_o \, dx = \int_o^L \mu \left|\frac{dv}{dy}\right|_{y=0} dx$;

$$F_a = 2\mu \frac{v_o L}{h_2(k - 1)}\left[2\ell n k - 3\,\frac{k - 1}{k + 1}\right] .$$

F é máximo para k = 2,2, quando ,então, $F_{max} = \dfrac{0{,}16\mu v_o L^2}{h_2^{\,2}}$.