Teorema de Transporte de Reynolds e Leis Integrais

Primeira Lei da Termodinâmica

(em algumas referências também chamada de Equação geral da energia
ou Equação da Energia ou ainda Equação da Energia Cinética)

Prof. Marcos Tadeu Pereira

PME3222 – 2018

1ª lei da Termodinâmica para <u>sistemas</u>:

$$\Delta E = Q + W$$

Variação da energia total de um sistema = **entrada** de calor + **entrada** de trabalho (trabalho sofrido)

A conservação de energia $\Delta E = Q + W$ pode ser escrita em termos de variação com o tempo, para sistemas:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} + \dot{W} \qquad (1)$$

Taxa de variação no tempo da energia total de um sistema = taxa líquida de transferência de calor para o sistema + potência mecânica transferida ao sistema

Teorema de Transporte de Reynolds (TTR) para a **1ª Lei da Termo** na abordagem de Euler, com **volume de controle VC**.

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \eta\rho d\forall + \int_{SC} \eta\rho\vec{V}.\vec{n}dS \qquad (2)$$

Não é necessário memorizar a derivação, apenas entenda qual a origem dos termos.

A equações integrais parecem complicadas, mas ao final teremos formas algébricas mais simples, que é o que aplicamos na solução de problemas.

Seja $N = E$ energia total do sistema

$$\eta = \frac{N}{massa} = \frac{E}{massa} = e \;, onde\; E = \int_{m_{sist}} e dm = \int_{\forall_{sist}} e\rho d\forall$$

o TTR fica então:

$$\left.\frac{dE}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} e\rho d\forall + \int_{SC} e\rho \vec{v}.\vec{n} dS \qquad (3)$$

Como não se mede energia diretamente, esta forma de apresentação não é útil. Deve-se substituir os termos de energia por grandezas mais facilmente aplicáveis ou mensuráveis: u (energia interna do sistema), $\frac{V^2}{2}$, gz

O termo de energia é constituído pelas formas disponíveis de energia no sistema:

$$e = u + \frac{v^2}{2} + gz$$

$$u = energia\ interna\ por\ unidade\ de\ massa$$

$$v^2/_2 = energia\ cinética\ por\ unidade\ de\ massa$$

$$gz = energia\ potencial\ por\ unidade\ de\ massa$$

Voltando às equações (1) e (3):

$$\left.\frac{dE}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} (u + \frac{v^2}{2} + gz)\rho d\forall + \int_{SC} \left(u + \frac{v^2}{2} + gz\right)\rho\vec{v}.\vec{n}dS = \dot{Q} + \dot{W}$$

O termo de potência $\dot{W}$ (potência das forças externas) realizado sobre o sistema (nos dois sentidos: pode ser potência retirada também) pode ser descrito como:

$$\dot{W} = \dot{W}_{fluxo} + \dot{W}_{máquina} + \dot{W}_{\tau}$$

Onde

$\dot{W}_{fluxo}$ - potência exercida por fluxo adjacente ou pistão

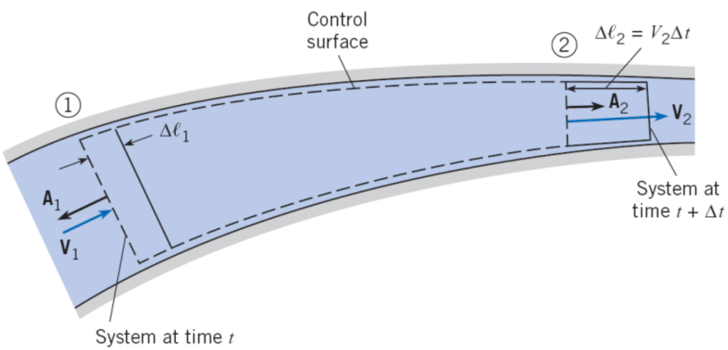
$\dot{W}_{máquina}$ é a potência transferida por **eixo** de máquina

$\dot{W}_{\tau}$ é a potência consumida pelas forças externas cisalhantes

Na expressão acima foram considerados desprezíveis os trabalhos realizados por forças elétricas, magnéticas e de tensão superficial.

$\dot{W}_{fluxo}$ ou $\dot{W}_{pressão}$

Trabalho de Fluxo é o trabalho realizado por forças de pressão. Não importa se o trabalho é feito por um pistão ou por fluido adjacente.



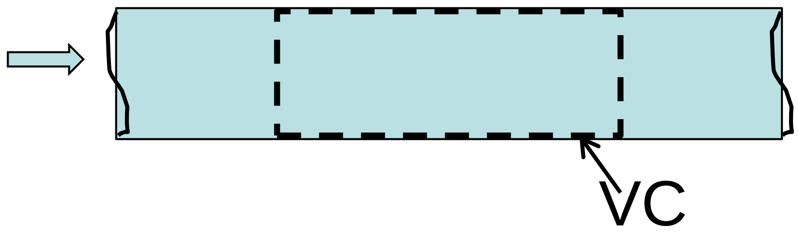
Como $\Delta W = \vec{F}.\Delta\vec{l}$, então $\dot{W} = \vec{F}.\vec{v}$

mas $\vec{F} = \int_A p d\vec{A}$ $e, portanto$ $\dot{W}_{fluxo} = -\int_{SC} p\vec{v}.\vec{n} dS$ (4)

A quantidade $\vec{v}.\vec{n}$ é positiva para a expansão e negativa para a compressão. O sinal negativo na expressão (4) garante que o trabalho realizado pelas forças de pressão é positivo quando realizado no sistema e negativo quando realizado pelo sistema, de acordo com a convenção de sinais adotada. O sinal **é negativo por convenção**, (antigo: na máquina a vapor se transfere energia para a máquina e tira-se trabalho)

Explicação adicional para $\dot{W}_{fluxo}$ ou $\dot{W}_{pressão}$

Este sinal é negativo porque vem da dedução do fluxo de energia para um VC



Não há fluxo de energia de pressão pela parede do tubo, só pelas seções de troca de massa (entrada e saída)

As tensões normais *no fluido* (interno ao VC) são iguais à pressão, só que com sinal contrário: $\sigma = -P$

A potência associada às tensões normais em uma partícula fluida $\delta\dot{W}_{tensão\ normal}$ pode ser avaliada como o produto escalar da força normal $(\delta\vec{F}_{tensão\ normal})$ associada a esta tensão e à velocidade da partícula:

$$\delta\dot{W}_{tensão\ normal} = \delta\vec{F}_{tensão\ normal}.\vec{v}$$

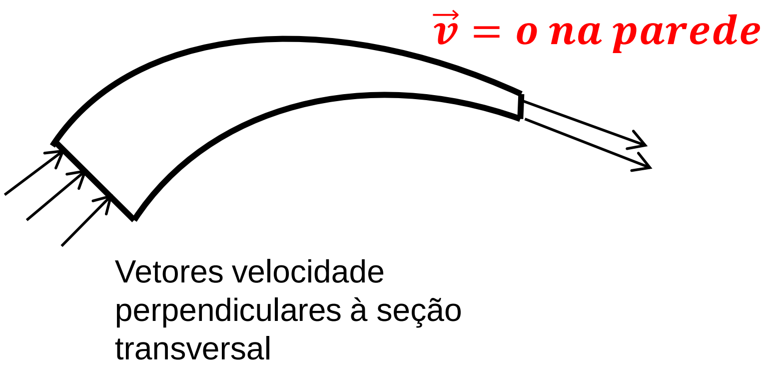
Se a força devida a esta tensão normal for expressa como o produto da pressão local, pois $\sigma = -P$, pela área da partícula fluida $\delta A\vec{n}$, então

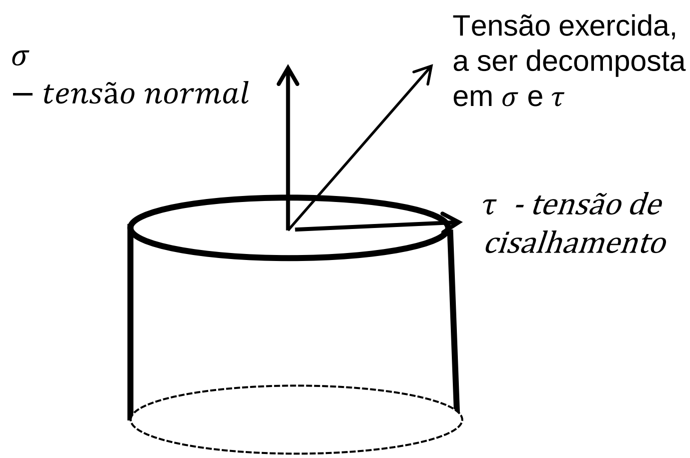
$$\delta\dot{W}_{tensão\ normal} = \sigma\vec{n}\delta A.\vec{v} = -p\vec{n}\delta A.\vec{v} = -p\vec{v}.\vec{n}\delta A$$

$\dot{W}_{\tau}$ - potência das forças externas cisalhantes

$$\dot{W}_{\tau} \cong 0$$

pois as linhas de corrente são perpendiculares à seção transversal, e na parede v=0.





$$\dot{W} = \vec{F}.\vec{v} \quad e \quad \vec{F} = \boldsymbol{\tau}.A$$

Daí: $\boldsymbol{\dot{W}_{\tau} \cong 0}$

Finalmente, o **trabalho de eixo** $\dot{\boldsymbol{W}}_{\boldsymbol{máquina}}$ pode ser considerado como o trabalho de eixo girante,

$\dot{W}_{máquina} = \omega T = 2\pi n T$, com

$\omega = velocidade\ angular\ em\ rad/s$

$T = torque\ do\ eixo$

$n = revoluções\ do\ eixo\ por\ unidade\ de\ tempo\ (\frac{rotações}{segundo})$

Uma **bomba** realiza trabalho no fluido, aumentando portanto sua energia. Pela definição adotada na Mec Flu, isto é **trabalho positivo**.

Trabalho realizado pelo escoamento em **turbina**s é considerado **trabalho negativo**.

A mesma convenção vale para o calor $\dot{Q}$: $\dot{Q}$ é positivo quando transferido para o sistema e negativo quando transferido para fora do sistema

Voltando à equação da **1ª lei**, com o termo de potência externa dividido em dois, $\dot{W}_{fluxo}$ e $\dot{W}_{máquina}$:

$$\dot{W}_{máquina_{sist}} + \dot{Q}_{sist} - \int_{SC} p\vec{v}.\vec{n}dS = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} (u + \frac{v^2}{2} + gz)\rho d\forall + \int_{SC} \left(u + \frac{v^2}{2} + gz\right)\rho\vec{v}.\vec{n}dS$$

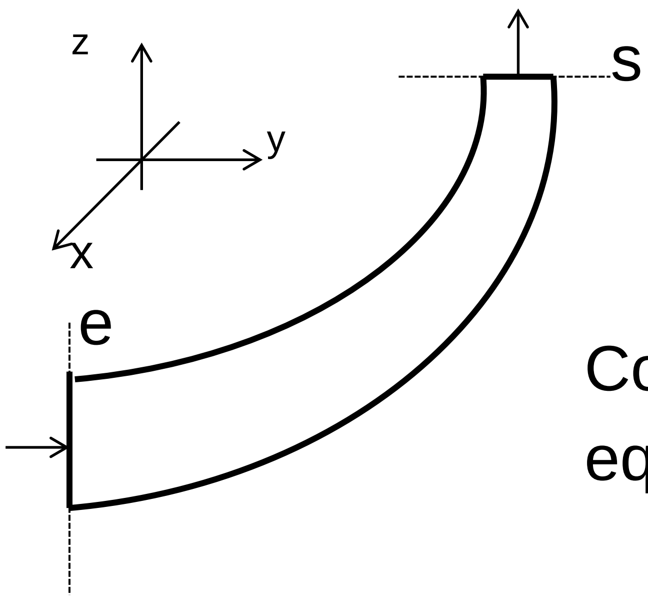
onde $\dot{Q}$ pode assumir a forma de radiação, condução ou convecção (qualquer forma de transferência de calor).
Observar que **em um instante t_0** o **sistema** se confunde com o ∀C e o trabalho de eixo e a troca de calor estão relacionadas ao ∀C. Da expressão acima resulta a

equação da 1ª lei aplicada a um VC:

$$\dot{W}_{máquina} + \dot{Q} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\boldsymbol{V}C} (u + \frac{v^2}{2} + gz)\rho d\boldsymbol{V} + \int_{SC} \left(u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right)\rho\vec{V}.\vec{n}dS$$

Às vezes $u + \frac{p}{\rho}$ são combinados na 2ª integral: $h = u + {}^{p}/_{\rho}$ onde h é a entalpia específica.

Pode-se ter a **equação da 1ª lei aplicada a dutos**:



- VC com 1 entrada e 1saída,
- Regime permanente
- Fluido incompressível

Com estas hipóteses, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ e a equação se transforma em:

$$\dot{W}_m + \dot{Q} = \int_{SC} \left(u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{V}.\vec{n} dS$$

$$\dot{W}_m + \dot{Q} = -\int_{A_e} \left(u_e + \frac{{v_e}^2}{2} + gz_e + \frac{p_e}{\rho} \right) \rho v_e dA_e + \int_{A_s} \left(u_s + \frac{{v_s}^2}{2} + gz_s + \frac{p_s}{\rho} \right) \rho v_s dA_s$$

Observar que para realizar a integração, é necessário conhecer o perfil de velocidades (as outras grandezas são consideradas uniformes).

Como os perfis de velocidade nunca são uniformes (se v fosse a velocidade média, a integral estaria resolvida) deve-se introduzir o **coeficiente de energia cinética $\boldsymbol{\alpha}$,** que possibilita correções para os perfis reais de velocidade:

Admitem-se propriedades uniformes nas seções de entrada e saída (observar que v é a velocidade em cada ponto da seção e V é a velocidade média, como se fosse um perfil uniforme). Define-se α como

$$\alpha = \frac{\int_A \rho\left(\frac{v^2}{2}\right) v dA}{\int_A \rho\left(\frac{V^2}{2}\right) V dA} = \frac{\int_A \rho\left(\frac{v^3}{2}\right) dA}{\int_A \rho\left(\frac{V^3}{2}\right) dA} = \frac{\int_A \rho v^3 dA}{\rho V^3 A} = \frac{\boldsymbol{perfil\, real}}{\boldsymbol{perfil\, médio}}$$

Para escoamentos turbulentos, normalmente $\alpha = 1$, e para escoamentos laminares, $\alpha = 2$. Na transição, $1 \leq \alpha \leq 2$.

Voltando à **equação da 1a lei** aplicada a dutos:

$$\dot{W}_m + \dot{Q} = -\int_{A_e} \left(u_e + \frac{{v_e}^2}{2} + gz_e + \frac{p_e}{\rho}\right)\rho v_e dA_e + \int_{A_s} \left(u_s + \frac{{v_s}^2}{2} + gz_s + \frac{p_s}{\rho}\right)\rho v_s dA_s$$

Com a definição de α pode-se abrir as integrais (considerando propriedades uniformes):

$$\dot{W}_m + \dot{Q} = -\left(u + \alpha\frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right)_e \rho Q_e + \left(u + \alpha\frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right)_s \rho Q_s$$

Lembrando que $Q_s = Q_e = Q$ (vazão) e que $\dot{Q}$ é energia

$$\left(\frac{\propto_e {V_e}^2}{2} + gz_e + \frac{p_e}{\rho}\right)\rho Q - \left(\frac{\propto_s {V_s}^2}{2} + gz_s + \frac{p_s}{\rho}\right)\rho Q = (u_s - u_e)\rho Q - \dot{Q} - \dot{W}_m$$

$$\underbrace{\left(\frac{\propto_e {V_e}^2}{2} + gz_e + \frac{p_e}{\rho}\right)}_{\substack{\text{energia mecânica por} \\ \text{unidade de massa} \\ \text{na entrada}}} - \underbrace{\left(\frac{\propto_s {V_s}^2}{2} + gz_s + \frac{p_s}{\rho}\right)}_{\substack{\text{energia mecânica por} \\ \text{unidade de massa} \\ \text{na saída}}} = \underbrace{\left\{u_s - u_e - \frac{\dot{Q}}{\rho Q}\right\}}_{\substack{\text{termos térmicos} \\ \text{perda de} \\ \text{energia por} \\ \text{dissipação} \\ \text{viscosa incluída}}} - \underbrace{\frac{\dot{W}_m}{\rho Q}}_{\substack{\text{potência por} \\ \text{unidade de} \\ \text{massa devida} \\ \text{ao trabalho} \\ \text{de eixo}}}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\propto_e V_e{}^2}{2} + gz_e + \frac{p_e}{\rho}\right)}_{\substack{energia\ mecânica\ por\\ unidade\ de\ massa\\ na\ entrada}} - \underbrace{\left(\frac{\propto_s V_s{}^2}{2} + gz_s + \frac{p_s}{\rho}\right)}_{\substack{energia\ mecânica\ por\\ unidade\ de\ massa\\ na\ saída}} = \underbrace{\left\{u_s - u_e - \frac{\dot{Q}}{\rho Q}\right\}}_{\substack{termos\ térmicos\\ perda\ de\\ energia\ por\\ dissipação\\ viscosa\ incluída}} - \underbrace{\frac{\dot{W}_m}{\rho Q}}_{\substack{potência\ por\\ unidade\ de\\ massa\ devida\\ ao\ trabalho\\ de\ eixo}}$$

Dividindo esta expressão por g, resulta:

$$\underbrace{\left(\frac{\propto_e V_e{}^2}{2g} + \frac{p_e}{\gamma} + z_e\right)}_{\substack{H_e = carga\ total\\ na\ seção\ de\\ entrada}} - \underbrace{\left(\frac{\propto_s V_s{}^2}{2g} + \frac{p_s}{\gamma} + z_s\right)}_{\substack{H_s = carga\ total\\ na\ seção\ de\\ saída}} = \underbrace{\left\{u_s - u_e - \frac{\dot{Q}}{\rho Q}\right\}\frac{1}{g}}_{\substack{\frac{\dot{W}_a}{\gamma Q} = perda\ de\\ carga\ no\\ trecho}} - \underbrace{\frac{\dot{W}_m}{\gamma Q}}_{\substack{carga\ retirada\\ ou\ fornecida\\ por\ máquina}}$$

$$H_e - H_s = \frac{\dot{W}_a}{\gamma Q} - \frac{\dot{W}_m}{\gamma Q}$$

Se $\dot{W}_m > 0 \rightarrow Bomba$
Se $\dot{W}_m < 0 \rightarrow Turbina$