

Mecânica Quântica — 7600022

Primeira Lista — provinha no dia 13/3/2017

1. Uma base geométrica é constituída pelos versores \hat{e}_1 , \hat{e}_2 e \hat{e}_3 . O primeiro versor aponta na direção Leste, o segundo na direção Norte, e o terceiro aponta verticalmente para cima. Outra base é constituída pelos versores \hat{f}_1 , \hat{f}_2 e \hat{f}_3 . O primeiro versor aponta na direção Noroeste, o segundo na Nordeste, e o terceiro aponta verticalmente para baixo. Encontre a matriz S que transforma as componentes de um vetor expresso na primeira base nas componentes do vetor expresso na segunda base.
2. Um vetor tem componentes $(1, 1, 1)$ na base e da primeira questão. Encontre suas componentes na base f .
3. Uma matriz de rotação tem a forma

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

na base e . Encontre a expressão correspondente na base f .

4. Verifique se os versores da base f obedecem à relação de completeza. Para isso, primeiro expresse \hat{f}_1 , \hat{f}_2 e \hat{f}_3 na base e .
5. Considere agora o espaço de Hilbert da mecânica quântica. Mostre que o produto escalar $\langle \alpha | \beta \rangle$ é invariante por mudança da base. Para isso, considere duas bases distintas, e mostre que a expressão para o produto escalar numa delas pode ser transformado no produto escalar na outra. *Dica: use a completeza.*
6. O potencial do oscilador harmônico é $V(x) = m\omega^2 x^2/2$. Encontre o elemento de matriz $\langle p | V | q \rangle$. *Dica: Lembre-se que $d^2 e^{ipx/\hbar} / dp^2 = -x^2 / \hbar^2$.*
7. O potencial do átomo de hidrogênio tem a forma $V(\vec{r}) = -e^2/r$. Encontre o elemento de matriz $\langle \vec{p} | V | \vec{q} \rangle$. *Dica: trabalhe em coordenadas esféricas e escolha o eixo z na direção $\vec{q} - \vec{p}$.*
8. Os harmônicos esféricos constituem uma base na qual pode ser expressa qualquer função das coordenadas esféricas θ e φ . Expresse nessa base as razões
 - (a) $R_x = x/r$;
 - (b) $R_y = y/r$;
 - (c) $R_z = z/r$.
9. Encontre os autovetores da matriz de Pauli

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

e verifique se os dois satisfazem à relação de completeza para estados de spin. *Dica: Escreva os kets como vetores colunas e os bras como vetores linhas.*

10. Imagine que a base dos momenta tenha apenas dois vetores, $|p_1\rangle$ e $|p_2\rangle$. Nessa base, resolva a Equação de Schrödinger para o potencial com elementos de matriz $\langle p | V | q \rangle$ independentes de p ou q .