SEL 382 Controle Robusto

Realimentação de Estado

Profa. Vilma A. Oliveira
USP São Carlos
Março de 2017

Índice

1. Introdução

Um problema de interesse e importância em controle é modificar um dado sistema visando melhorar o seu comportamento dinâmico. A representação espaço de estado de sistemas introduziu o conceito de estado interno ao sistema e permitiu o desenvolvimento de técnicas de controle multivariável no domínio do tempo. A técnica de controle que utiliza realimentação de estado pode ser utilizada para atingir as características de desempenho desejadas. O problema mais básico da teoria de controle no domínio do tempo é a seleção da lei de controle a realimentação de estado que minimize um índice quadrático de desempenho para sistemas lineares. Este é chamado regulador quadrático linear (LQR, do inglês).

Referências utilizadas:
C. T. Chen (1999). *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, New York.
Peter Dorato (1995). *Linear-Quadratic Control: An Introduction*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.

2. Realimentação de estado

Seja a representação espaço de estado (A, B, C) onde a matriz do sistema D é zerada por razões de simplicidade.:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{1}$$

com $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$, $C \in R^{p\times n}$ e (A, B) controlável. O polinômio característico de A é dado por $\Delta(s) := \det(sI - A) = s^n + \alpha_n s^{n-1} + \cdots + \alpha_1$, com α_i real.

Considere a lei de realimentação:

$$u = -Kx + r$$

onde $K \in R^{m \times n}$ e $r \in R^m$, a matriz de realimentação e r a entrada de referência do sistema.

3. Posicionamento de polos

Problema: Obter K tal que o polinômio característico do sistema realimentado tenha as raízes desejadas.

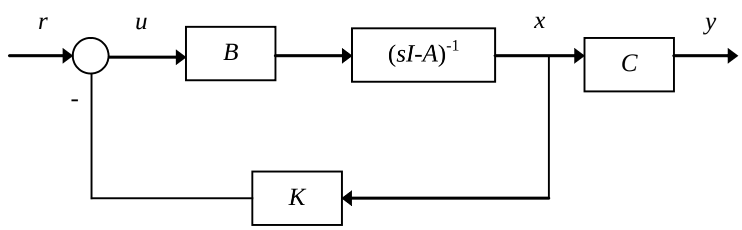
As equações do sistema realimentado podem ser obtidas substituindo a lei de controle no sistema a malha aberta:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK)x + Br \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{2}$$

A matriz A-BK gera o polinômio característico do sistema realimentado.
Pode-se mostrar que para qualquer polinômio mônico:

$$\pi(s) := \det(sI - A) = s^n + \pi_n s^{n-1} + \cdots + \pi_1 \tag{3}$$

existe uma matriz de realimentação de estado K se e só se (A,B) for controlável. O sistema de controle com u=-$Kx+v$ é mostrado abaixo na forma de diagrama de blocos.



<u>**Caso SISO**</u>

Teorema: Se (A,b,c) for controlável, então existe uma transformação de equivalência $\overline{x} = Tx$, T não singular tal que o sistema equivalente $(\overline{A}, \overline{b}, \overline{c})$ esteja na forma controlável:

$$\dot{\overline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \overline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n & \cdots & b_1 \end{bmatrix} x$$

onde os as são os coeficientes do polinômio característico de A e os bs são computados de (A,b,c).

Pode-se mostrar que a matriz de transformação $Q:=T^{-1}$ é do tipo:

$$\begin{aligned} &q_n := b \\ &q_{n-1} := Aq_n + a_1 q_n = Ab + a_1 b \\ &\vdots \\ &q_1 := Aq_2 + a_{n-1} q_n = A^{n-1} b + a_1 A^{n-2} b + \cdots a_{n-1} b \end{aligned}$$

$Q = [q_1 \cdots q_n]$ forma uma base para (A,b,c).

Algoritmo (Chen, 1999)

Dado um sistema (A,b,c) controlável e um conjunto de autovalores $\{\overline{\lambda}_i\}$, $i = 1, \cdots n$, encontrar um vetor real K, 1xn tal que a matriz A-bK possua o conjunto de autovalores $\{\overline{\lambda}_i\}$,$i = 1, \cdots n$.

1. Obter polinômio característico de A: $\det(sI - A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots a_n$
2. Calcular $\prod_{i=1}^{n}(s - \overline{\lambda}_i) = s^n + \overline{a}_1 s^{n-1} + \cdots + \overline{a}_n$
3. Calcular $\overline{K} := [a_n - \overline{a}_n \; a_{n-1} - \overline{a}_{n-1} \cdots a_1 - \overline{a}_1] :=$
4. Construir Q=$U\Lambda$ onde

$$U := [B \; AB \; A^2 B \cdots A^{n-1}B] \text{ e } \Lambda = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Obter T:=Q^{-1}
6. Calcular $K = \overline{K}T$

<u>Fórmula de Ackerman</u>

(Francklin and Powell, 1996)

$$K = e^T U^{-1} \Delta^D(A)$$

onde

$e = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]^T$;

U a matriz de controlabilidade;

$\Delta^D(A)$ o polinômio característico desejado calculado em A ; uma matriz polinomial n×n:

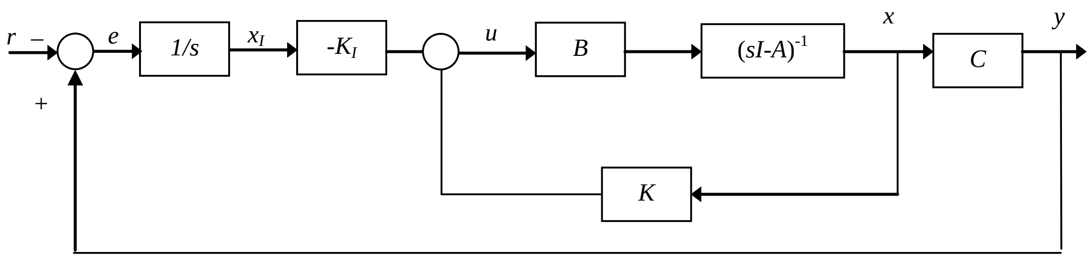
$$\Delta^D(A) = A^n + \overline{a}_1 A^{n-1} + \cdots + \overline{a}_n I$$

Comandos Matlab

C=ctrb(A,B);
O=obsv(A,C)
K=place(A,B,P): P é o vetor de autovalores desejados.

K=acker(A,B,P)

Adicionando um integrador



$$\dot{x} = Ax + B_1 u + B_2 w$$
$$y = Cx$$

$$\dot{x}_I = Cx - r$$
$$x_I = \int_0^t e\, dt$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ B1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ B2 \end{bmatrix} w$$
$$u = -\begin{bmatrix} K_I & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix}$$

4. Regulador linear quadrático

A teoria de controle linear quadrático fornece uma ferramenta analítica para o projeto de controladores multivariáveis. O problema foi primeiro tratado por Wiener nos anos 40 com trabalhos em filtragem pelo método da média quadrática, referenciado como problema de controle de média quadrática. O nome regulador quadrático linear (LQR, do inglês) só aparece na literatura no final da década de 50 com Kalman. O problema básico envolvido é a obtenção de uma lei de controle de realimentação de estado que minimize uma função custo.

4.1 Formulação do problema do regulador quadrático

Seja o sistema linear invariante no tempo (A,B,I,0)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \tag{4}$$

com $x \in R^n$, $u \in R^m$ e (A,B) estabilizável e a lei de realimentação de estado:

$$u = -Kx \tag{5}$$

onde $K \in R^{m \times n}$ é a chamada matriz de realimentação de estado. Substituindo a lei de realimentação de estado no sistema (A,B,C) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK)x \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{6}$$

Problema: Obter $u(.)$, uma função contínua por partes em R, que minimiza a função de custo quadrática $J(x_0,u)$ associada ao sistema (A,B,I,0):

$$J(x_0,u) = \int_0^T (x^T Qx + u^T Ru)dt + x^T(T)Mx(T) \qquad (7)$$

onde $Q = Q^T \geq 0, M \geq 0, R = R^T > 0$ são matrizes de ponderação e $x(.)$ solução de (A,B,I,0) em resposta à lei de controle $u(.)$ e condição inicial x_0; T é fixo e $x(T)$ livre.

Solução:

Utiliza-se o princípio de optimalidade e equações de Hamilton-Jacobi.

Princípio de optimalidade: Se $u^*(\tau)$ é ótimo no intervalo $[t,T]$, iniciando em $x(t)$, então $u^*(\tau)$ é necessariamente ótimo no subintervalo $[t+\delta t, T]$ para qualquer δt tal que $T-\delta \geq \delta t > 0$

Seja

$J^*(x,t) = \min\limits_{u[t,T]}\{\int_t^T (x^T Qx + u^T Ru)d\tau + x^T(T)Mx(T)\}$ o custo mínimo para $x_0=x$ e $t_0=t$

Em que * denota valor ótimo e $u[t,T]$ o sinal de controle no intervalo $[t,T]$. Usando a propriedade de adição de integrais e o princípio de optimalidade tem-se

$$J^*(x,t) = \min_{u[t,t+\delta t]}\{\int_t^{t+\delta t} (x^T Qx + u^T Ru)d\tau + J^*(x(t+\delta t), t+\delta t)\} \qquad (8)$$

Note que para escrever a equação acima usa-se o fato que o valor mínimo de J iniciando no estado $x(t+\delta t)$ no tempo $t+\delta t$ é dado por $J^*(x(t+\delta t), t+\delta t)$. Note também que pelo princípio de optimalidade, o problema de obter um controle ótimo no intervalo $[t,T]$ foi reduzido ao problema de obter um controle ótimo no intervalo reduzido $[t, t+\delta t]$.

Uma vez que $\dfrac{dJ^*}{dt} = \dfrac{\partial J}{\partial t}\dfrac{dt}{dt} + \dfrac{\partial J}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}$, expandindo $J^*(x(t+\delta t), t+\delta t)$ no ponto $(x(t),t)$ em série de Taylor tem-se:

$$J^*(x(t+\delta t, t+\delta t) = J^*(x,t) + \left[\frac{\partial J^*}{\partial t}\right]^T \delta t + \left[\frac{\partial J^*}{\partial x}\right]^T (x(t+\delta t) - x(t))\cdot$$

Agora, aproximando a integral em (8) por $(x^T Qx + u^T Ru)\delta t$ e usando a definição de derivada para aproximar $x(t+\delta t) - x(t)$ por $(Ax+Bu)\delta t$, obtém-se

$J^*(x,t) = \min\limits_{u(t)}\{(x^T Qx + u^T Ru)\delta t + J^*(x,t) + \left[\dfrac{\partial J^*}{\partial t}\right]\delta t + \left[\dfrac{\partial J^*}{\partial x}\right]^T (Ax+Bu)\delta t\}\cdot$ No limite quando $\delta t \to dt$, obtém-se a **equação de Hamilton-Jacobi**

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_{u(t)}\{x^T Qx + u^T Ru + \left[\frac{\partial J^*}{\partial x}\right]^T (Ax+Bu)\}, \qquad (9)$$

<u>Problema de horizonte finito: equação matricial de Riccati</u>

A minimização pode ser feita fazendo-se o gradiente em relação a u de

$x^T Qx + u^T Ru + \left[\dfrac{\partial J^*}{\partial x}\right]^T (Ax+Bu)$ igual a zero

e resolvendo para u. Isto fornece

$$u^* = \frac{-1}{2} R^{-1} B^T \frac{\partial J^*}{\partial x} \tag{10}$$

Utilizou-se aqui a identidade $\frac{\partial}{\partial u}[(u^T R u) + B^T \frac{\partial J^*}{\partial x} u] = 2Ru + B^T \frac{\partial J^*}{\partial x}$.

Há necessidade aqui de conhecer a forma de $J^*(x,t)$ para chegar à uma solução geral. Sabe-se que a integral de uma forma quadrática para um sistema linear é quadrática na condição inicial. Assim, é razoável considerar a seguinte forma para $J^*(x,t)$

$J^*(x,t) = x^T P(t) x$; $P(t)$ simétrica.

Desta forma, o gradiente de $J^*(x,t)$ é então $2P(t)x$. Substituindo o gradiente de $J^*(x,t)$ na equação de Hamilton-Jacobi com $u^* = \frac{-1}{2} R^{-1} B^T \frac{\partial J^*}{\partial x}$ obtém-se

$-x^T \dot{P}(t) x = x^T (A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q) x$ (usando aqui a identidade $2x^T PAx = x^T (A^T P + PA) x$).

A condição de contorno é dada por:

$J^*(x,T) = x^T P(T) x = x^T M x$.

Então, obtém-se a equação de Riccati e a condição de contorno para P :

$$\dot{P}(t) = A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q \tag{11}$$

$P(T) = M$.

E, finalmente obtém-se a lei de controle ótimo em função de $P(t)$

$u^* = -K(t) x$

com $K(t) = R^{-1} B^T P(t)$.

<u>Problema LQR de estado estacionário</u>

Neste caso, a função de custo quadrática $J(x_0, u)$ torna-se

$J(x_0, u) = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$. Como $\frac{\partial J^*(x,t)}{\partial t} = x^T \dot{P} x$ e $J^*(x,t)$ tem que ser finito para $t \to \infty$, $\dot{P}(t) \to 0$, e a equação de Riccati é a equação algébrica

$0 = A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q$.

Assim obtém-se

$u^* = -Kx$

com $K = R^{-1} B^T P$

A solução do problema LQR de estado estacionário é geralmente dada em duas partes. Primeiro estabelece-se condições de existência de uma solução única positiva definida da equação de Riccati tal que $A - BR^{-1} B^T$ seja estável e então o problema LQR é solucionado pela lei de realimentação ótima $u = -R^{-1} B^T P x$.

Teorema: Considere o problema LQR. Suponha (A,B) estabilizável e (A,D) detectável com $Q = D^T D$. Então, existe *P* única semidefinida positiva e simétrica satisfazendo

$$A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \tag{11}$$

e a lei de controle dada por $u = -R^{-1}B^T Px$ é ótima e estabiliza o sistema realimentado com o custo para condição inicial x_0 dado por

$$J(x_0, u^*) = x_0^T P x_0$$

Prova. Usando a seguinte candidata de função de Lyapunov $V(x) = x^T Px$ mostraremos que $\dot{V}(x) = \dfrac{d}{dt} x^T Px < 0$ para $x \neq 0$. Calculando a derivada de $V(x)$ e usando (11) obtém-se $\dot{V}(x) = -x^T(Q + PBR^{-1}B^T P)x$ a qual pode ser escrita como $\dot{V}(x) = -x^T(Q + (R^{-1}B^T P)^T R(R^{-1}B^T P))x$, $\dot{V}(x) = 0$ implica $Dx = 0$ e $R^{-1}B^T Px = 0$ usando a condição de detetabilidade tem-se que $Dx = 0$ só para $x = 0$ e então segue que $\dot{V}(x) < 0$ e $\dot{V}(x) = 0$ para $x = 0$ e o sistema é assintoticamente estável.

Para verificar que a lei $u = -R^{-1}B^T Px$ é ótima, em (10) substituir o gradiente de $J^*(x,t) = x^T Px$. Finalmente, o custo total pode ser calculado verificando-se que

$$\begin{aligned} J(x_0, u^*) &= \int_0^\infty \dot{V}(x)dt = V(x)\,|_0^\infty = -V(x_0) \\ &= x_0^T P x_0 \end{aligned}$$

Restou mostrar que a solução é única e semidefinida positiva.

Observação: A solução do LQR padrão reduz-se ao problema de obter a solução positiva definida da equação de Riccati.

<u>Propriedades de controlabilidade e observabilidade</u>

Teorema 4.8. O sistema dinâmico (A,B,C,D) ou equivalentemente o par (A,B) é controlável se e só se as condições equivalentes seguintes forem verificadas:

a) Popov-belevitch-Hautus (PBH) teste:

$$\text{posto}\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \tag{37}$$

o conjunto de autovalores da parte não controlável de (A,B) coincide com o conjunto de valores de s para os quais a matriz acima perde posto.

b) Kalman teste:

$$\text{posto}[B \quad AB \quad \cdots \quad (A)^{n-1}B] = n \tag{38}$$

c) Wonham teste: Dado um conjunto arbitrário simétrico Λ de n números complexos, existe uma matriz K tal que o espectrum de A+BK coincide com Λ.

Prova . a) Volta: Suponha que $\text{posto}\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} < n$ para algum s. Então, existe $v \neq 0$ tal que $v^*[(\lambda I - A) \quad B] = 0$. Assim, uma vez que $v^*\lambda I = v^* A$ e $v^* B = 0$,

$v^*[B\ AB\ A^2B \cdots A^{n-1}B] = v^*[B\ \lambda B\ \lambda^2 B \cdots \lambda^{n-1}B] = 0$ o que implica que (A,B) não é controlável pelo teste de Kalman.

b) Ida: Suponha agora que (A,B) não é controlável. Então, existe $v \neq 0$ tal que $v^*[B\ AB\ A^2B \cdots A^{n-1}B] = 0$. O que implica que $v^* A^i B = 0$, $i = 0, \cdots, n-1$. Assim, $\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix}$ perde posto em $s = \lambda$.

Teorema 4.9: O sistema dinâmico (A,B,C,D) ou equivalentemente o par (A,B) é estabilizável se e só se as condições equivalentes seguintes forem verificadas:

b) PBH teste:

$$\text{posto}\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} = n, \quad \text{Re}(s) \geq 0 \tag{39}$$

b) Kalman teste: A parte não controlável do sistema é estável. Já para a parte instável o posto $\mathbf{posto}\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \boldsymbol{n}$, o que significa que para todo λ e correspondente autovetor v tal que $v^* A = v^* \lambda$ e $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0 \text{ tem-se } v^* B \neq 0.$

Teorema 4.4 : O sistema dinâmico (A, B, C, D) ou equivalentemente o par (A,C) é detectável se e só se as condições equivalentes seguintes forem verificadas:

a) PBH teste:

$$\mathrm{posto}\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \mathrm{Re(s)} \geq 0 \tag{31}$$

ou seja $\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$ possui posto coluna completo.

b) Kalman teste: A parte não observável do sistema é estável. Isto é, para todo λ e correspondente autovetor v tal que $Av = \lambda v$ e $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0 \text{ tem-se } Cv \neq 0.$ Caso tenha-se $Cv = 0$, pelo PBH teste, o sistema não seria detetável pois $\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} v = 0$ com $v \neq 0$ tem-se que $\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} < n,$ contradizendo a condição de posto coluna completo.

Comandos Matlab:

O módulo *Control System* contém subrotinas para o cálculo do ganho de realimentação *K* e da solução da equação de Riccati.

Comandos Matlab

$[K, P] = lqr(A, B, Q, R)$;

$[K, P] = lqr2(A, B, Q, R)$: Solução da ARE via matriz Hamiltoniana do sistema:

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}.$$

Outras rotinas:
reg; *are*; *ric*