

Controle Robusto

Resultados satisfatórios de aplicações de controle robusto têm sido relatados na literatura e, muitos livros de controle já incluem técnicas de controle robusto (Dorf e Bishop, 2000; Paraskevopoulos, 2002). A técnica de controle robusto utiliza resultados teóricos matematicamente envolventes e é um desafio balancear teoria e prática em cursos de graduação. A teoria de controle robusto é encontrada em Zhou et al. (1996) ou Zhou (1998), e o último indica funções do Matlab para controle robusto.

Neste capítulo, os conceitos e ferramentas principais do problema de controle robusto são apresentados. Ênfase é dada na modelagem e formulação do problema de controle para descrever as especificações de projeto em uma abordagem unificada usando funções de ponderação e transformações fracionárias lineares. O básico é apresentado com exemplos resolvidos no Matlab/Simulink. Como os estudantes são em geral motivados por aplicações em diferentes áreas, nesta seção considera-se a aplicação de controle H_∞ ao sistema de suspensão magnética apresentado anteriormente utilizando Matlab e LabView. A técnica de controle H_∞ mais utilizada é a técnica padrão com realimentação da saída y . É utilizada a análise μ para verificar a estabilidade e o desempenho das soluções. O problema de controle a ser resolvido é em geral multivariável e portanto o valor singular de matrizes de transferência é usado para generalizar a aplicação de ganho de sistemas. No Apêndice C uma revisão de valores singulares junto com a sua interpretação como ganho de sistemas são resumidos.

Para suavizar o conteúdo matemático, os conceitos são introduzidos com a ajuda de diagramas de blocos e funções de transferência. Atividades de aula são organizadas com a participação dos alunos para aumentar a interação entre alunos e entre o professor e aluno. O aluno contribui com a aula apresentando soluções dos exercícios propostos relacionados aos tópicos sendo estudados. Para chegar à solução, o aluno recebe orientação do professor ou monitor da disciplina fora da sala de aula. As tarefas a serem desenvolvidas pelo aluno em geral envolve a realização de simulação.

As aulas de laboratório propostas no final do capítulo abordam a implementação do controlador H_∞ em plataforma LabView e comparação com o desempenho do controlador avanço-atraso. Análise da robustez à variações na massa da esfera é realizada.

10.1 Estabilidade e Desempenho

Nesta seção, os principais conceitos em controle robusto são resumidos. Conceitos como decomposição por valores singulares e normas de matrizes são utilizados.

10.1.1 Funções de sensibilidade e sensibilidade complementar

Considere o diagrama típico formado pela interconexão da planta G e controlador K como na Fig. 10.1. Com r entradas de referência, d_i perturbações entrada planta, d perturbações saída da planta e n ruído de sensores.

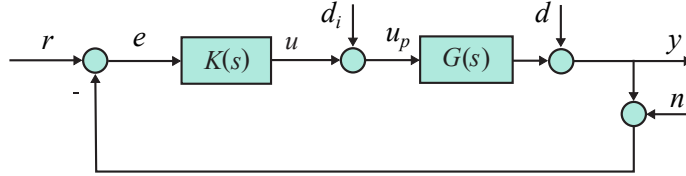


Figura 10.1: Diagrama típico de um sistema realimentado.

A matriz de sensibilidade é definida como a função de transferência entre d_i e u_p para o caso em que a malha KG é obtida abrindo-se a entrada da planta e como a função de transferência entre d e y para o caso em que a malha é obtida abrindo-se a saída da planta.

$$S_i = (I - KG)^{-1}, \quad u_p = S_i d_i \quad (10.1)$$

$$S_o = (I - GK)^{-1}, \quad u_p = S_o d \quad (10.2)$$

A matriz sensibilidade complementar T é definida como segue

$$T_i = I - S_i = KG(I - KG)^{-1} \quad (10.3)$$

$$T_o = I - S_o = GK(I - GK)^{-1} \quad (10.4)$$

com T_i obtida para a malha aberta na entrada da planta e T_o obtida para a malha aberta na saída da planta. As relações entrada-saída abaixo podem ser obtidas a partir configuração típica:

$$y = T_o(r - n) + S_o G d_i + S_o d \quad (10.5)$$

$$r - y = S_o(r - d) + T_o n - S_o G d_i \quad (10.6)$$

$$u = K S_i(r - n) - K S_i d - T_i d_i \quad (10.7)$$

$$u_p = K S_i(r - n) - K S_i d + S_i d_i, \quad u_p = u + d_i \quad (10.8)$$

A partir do diagrama de realimentação mostrado na Fig. 10.1 obtém-se $r - y = Sr$, $y = Tr$, $u = KSr$ as quais fornecem as funções de transferência entre r e o erro $e := r - y$, y e u , respectivamente, com:

$$S(s) := (I + G(s)K(s))^{-1} \quad (10.9)$$

$$T(s) := G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} = I - S(s) \quad (10.10)$$

em que $G(s)$ é a planta nominal e $K(s)$ o controlador. As matrizes S e T são referenciadas como matrizes sensibilidade e matriz sensibilidade complementar, respectivamente. No caso monovariável, S e T são funções. A matriz sensibilidade S determina o comportamento em regime permanente do sistema realimentado. A relações $y = Sd$ e $y = SGd_i$ obtidas a partir da Fig. 10.1 indica que a matriz sensibilidade S também determina a atenuação de distúrbio ou perturbação. Assim, nas especificações de atenuação de

perturbação e erros de regime, geralmente usa-se um limitante superior para a norma de $S(j\omega)$, isto é:

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) \leq |W_1^{-1}(j\omega)|, \forall \omega \tag{10.11}$$

em que $\bar{\sigma}(S(j\omega))$ é o máximo valor singular de $S(j\omega)$, e W_1 uma ponderação para $\bar{\sigma}(S(j\omega))$ que reflete a atenuação desejada para cada frequência ω . Assim, boa rejeição de distúrbio requer a satisfação de (10.11), particularmente em baixa frequência onde d and d_i são usualmente insignificantes. Se $\underline{\sigma}(GK) \gg 1$ então $S \approx (GK)^{-1}$, e de (10.11) obtém-se $\underline{\sigma}(GK) \geq |W_1|$ com $\underline{\sigma}(GK)$ o valor singular mínimo. A matriz de transferência entre a entrada r e o controle u é dada por $R(s) = K(s)S(s)$. Sendo assim, uma restrição ao controle u pode ser introduzida com um limitante sobre $\bar{\sigma}(K(j\omega)S(j\omega))$ especificado por:

$$\bar{\sigma}(K(j\omega)S(j\omega)) \leq |W_2^{-1}(j\omega)|, \tag{10.12}$$

em que $W_2(j\omega)$ é uma função de ponderação a ser especificada.

10.1.2 Requisitos de desempenho

Tendo em vista a análise das relações fundamentais apresentada, os requisitos típicos de bom desempenho são resumidos a seguir. Em baixa frequência $[0, \omega_\ell]$ requer-se:

$$\underline{\sigma}(GK) \gg 1 \text{ ou } \underline{\sigma}(KG) \gg 1 \tag{10.13}$$

e, em alta frequência $[\omega_h, \infty)$ requer-se:

$$\bar{\sigma}(GK) \ll 1; \bar{\sigma}(KG) \ll 1 \tag{10.14}$$

onde M não deve ser tão grande. As condições de projeto acima podem ser graficamente ilustradas como na Fig. 10.2.

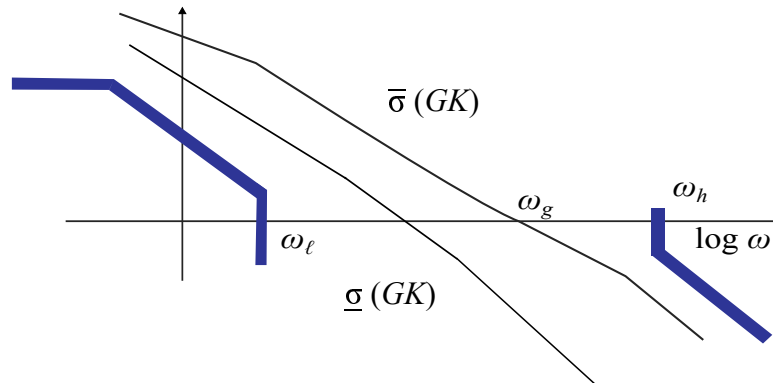


Figura 10.2: Limitantes da malha aberta

Observação 10.1 No caso multivariável, o tamanho de GK é especificado via valores singulares, por exemplo, fazendo-se $\bar{\sigma}(GK) \gg 1$ em uma faixa de frequência significa que neste intervalo o sistema rejeita o efeito da perturbação d na saída da planta.

10.1.3 Rejeição de ruído e estabilidade

Pode-se observar agora que existe um conflito entre rejeição de perturbações d e d_i e rejeição de erro de medida (tipicamente grande em alta frequência)

$$\begin{aligned} y &= T(r - n) + SGd_i + Sd_i \\ &\approx r - n \quad \text{para } \|KG\| \gg 1 \end{aligned} \quad (10.15)$$

Esta situação é piorada fora da faixa passante da planta: $\underline{\sigma}(KG) \gg 1$ e $\bar{\sigma}(G) \ll 1$ quando u torna-se inaceitável, podendo provocar saturação do atuador, desde que

$$\begin{aligned} u &= KS(r - n - d) - Td_i = SK(r - n - d) - Td_i \\ &\approx G^{-1}(r - n - d) - d_i \end{aligned} \quad (10.16)$$

Amplificam-se, portanto as perturbações e erros de medida uma vez que nesta faixa de frequência $\bar{\sigma}(G) \ll 1$. Pelo mesmo motivo não se pode fazer $\underline{\sigma}(K)$ muito grande quando $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$, pois,

$$u = KS(r - n - d) - Td_i = K(r - n - d) \quad (10.17)$$

Sistemas de engenharia, em geral, operam sob incertezas na planta e portanto um teste de robustez de estabilidade é necessário (Zhou, 1998). O teste deve indicar o pior caso de operação associada com incertezas típicas. Se o sistema da Fig. 10.1 com a planta nominal $G(s)$ for estável, o tamanho da menor perturbação Δ descrita por uma incerteza multiplicativa (a ser definida a seguir) que instabiliza o sistema realimentado é então dado por:

$$\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) = \frac{1}{\bar{\sigma}(T(j\omega))}. \quad (10.18)$$

O resultado (10.18) é dado em termos da incerteza multiplicativa e sensibilidade complementar (Chiang e Safonov, 1996). Um pequeno $\bar{\sigma}(T(j\omega))$ corresponde a um valor grande para a incerteza desestabilizante e portanto uma margem maior de estabilidade. Como consequência, um limitante superior é especificado por $\|T(s)\|$ como segue:

$$\bar{\sigma}(T(j\omega)) \leq |W_3^{-1}(j\omega)| \quad (10.19)$$

em que W_3 é uma função de ponderação usada para garantir o atendimento à condição de estabilidade. Então, boa robustez e rejeição de ruído requer a satisfação de (10.19), particularmente em altas frequências quando o ruído e erros de modelagem usualmente são significantes. Se $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$ então $T \approx GK$, e de (10.19) obtém-se $\bar{\sigma}(GK) \leq |W_3^{-1}|$.

10.2 Modelagem da Incerteza

Sistemas reais estão sujeitos a perturbações de diferentes tipos. Incertezas no sistema podem ser modeladas como perturbações no modelo nominal. A incerteza é chamada não estruturada se conhecida apenas em termos de limitantes e estruturada quando seu modelo detalhado é conhecido. Existem diversos modelos de incerteza e os mais comuns são os seguintes:

$$P_\Delta(s) = G(s) + W(s)\Delta(s) \quad (10.20)$$

$$P_\Delta(s) = [I + W(s)\Delta]G(s) \quad (10.21)$$

$$P_\Delta(s) = G(s)[I + W(s)\Delta(s)] \quad (10.22)$$

$$P_\Delta(s) = [I + W(s)\Delta(s)^{-1}]G(s) \quad (10.23)$$

Na forma de diagrama de blocos, as representações de incertezas são dadas nas Figs.10.3 e 10.4. A representação de incertezas na forma 2 blocos-padrão com o sistema realimentado é mostrada na Fig. 10.5. A função de transferência entre z_d e w_d , função vista pela incerteza é dada por:

$$M_{z_d, w_d} = \frac{-GK}{1 + GK} \quad (10.24)$$

A representação padrão na forma de diagrama de blocos como o sistema é visto pela incerteza é mostrada na Fig. 10.6.

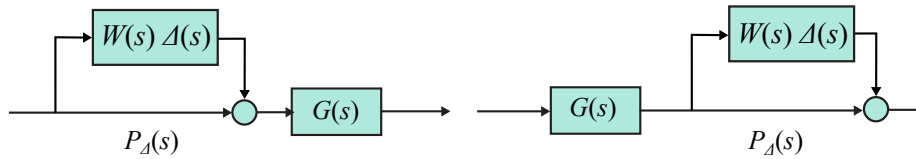


Figura 10.3: Representação incertezas multiplicativa na entrada e saída.

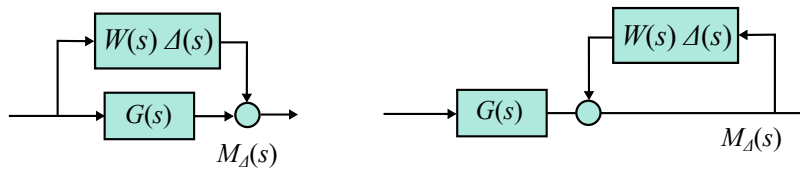


Figura 10.4: Representação incertezas aditiva e realimentação na saída.

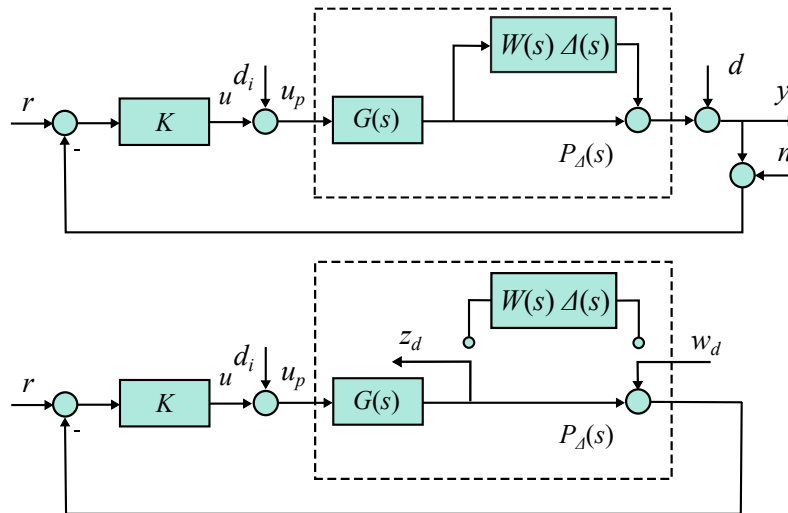


Figura 10.5: Sistema realimentado com incerteza multiplicativa na saída da planta.

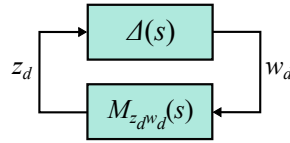


Figura 10.6: Representação incerteza na forma 2 blocos-padrão.

Exemplo 10.1 Considere a família de plantas dada por:

$$P(s) = \frac{1}{\tau s + 1} G_0(s), \quad \tau_{\min} \geq \tau \leq \tau_{\max}$$

A descrição do parâmetro incerto assumindo modelo multiplicativo (ver Fig. 10.7) para o parâmetro incerto τ é da forma:

$$\tau = \tau_m(1 + r_\tau \Delta), \quad |\Delta| \leq 1$$

em que

$$\tau_m = \frac{\tau_{\min} + \tau_{\max}}{2}, \quad r_\tau = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{\tau_{\max} + \tau_{\min}}.$$

Assim,

$$P_\Delta(s) = \frac{G_0(s)}{1 + \tau_m s + r_\tau \tau_m s \Delta}$$

dividindo e multiplicando o denominador por $1 + \tau_m s$ tem-se:

$$\begin{aligned} P_\Delta(s) &= [1 + W(s)\Delta]^{-1} \frac{G_0(s)}{1 + \tau_m s} \\ &= [1 + W\Delta]^{-1} G(s) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{G_0(s)}{1 + \tau_m s} \\ W(s) &= \frac{r_\tau \tau_m s}{1 + \tau_m s}. \end{aligned}$$

Esta representação da incerteza é do tipo incerteza realimentada na saída.

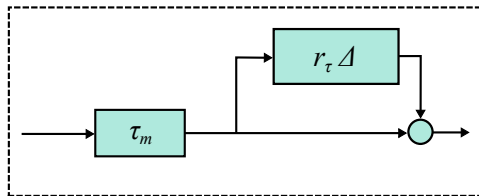


Figura 10.7: Descrição do parâmetro τ como incerteza multiplicativa.

Exemplo 10.2 Considere a família de plantas com incertezas paramétricas dada por:

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}, 1 \leq a \leq 3; 2 \leq b \leq 6.$$

Pede-se obter a descrição destas plantas usando o modelo de incerteza multiplicativa com uma simples função peso $W(s)$.

Inicialmente escolha a planta nominal usando os valores médios dos parâmetros. Inicialmente escolha a planta nominal usando os valores médios dos parâmetros. Considere então diversas plantas dentro da família para obter o erro multiplicativo:

$$\text{erro} = \left| \frac{P(j\omega) - G(j\omega)}{G(j\omega)} \right|$$

para escolher com auxílio gráfico uma função peso. Assim, pode-se chegar à seguinte descrição com modelos de incerteza multiplicativos

$$P_{\Delta}(s) = G(s)[1 + W(s)]\Delta(s).$$

No Matlab pode-se utilizar as seguintes funções:

```
mf=ginput(10) % pegar 10 pontos no gráfico do erro
multiplicativo
magg=vpck(mf(:,2),mf(:,1)) % organizar os pontos para
usar fitmag
Wim=fitmag(magg) % escolha a ordem da função
[A,B,C,D]=unpack(Wim) %converter para a forma espaço
de estado
WErro=ss(A,B,C,D) %cria o sistema espaço de estado
WErro=tf(WErro) %Mostra na tela a função de transferência
da função de ponderação do erro de modelagem
```

10.2.1 Transformações lineares fracionárias

As transformações fracionárias lineares (LFT, do inglês) são ferramentas poderosas para representar muitos objetos matemáticos. Nesta aula revemos alguns fundamentos LFT para utilização no projeto de controladores robustos.

Definição 10.1 Um mapeamento da forma $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ da forma:

$$F(s) = \frac{as + b}{cs + d} \quad (10.25)$$

chamado de uma transformação fracionária linear.

Para $d \neq 0$ tem-se a representação alternativa de $F(s)$:

$$F(s) = bd^{-1} + (a - bd^{-1}c)s(1 + d^{-1}cs)^{-1}d^{-1} \quad (10.26)$$

Na forma de diagrama de blocos o mapeamento entre w e z pode ser obtido como segue.

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, u = sy \quad (10.27)$$

eliminando u e y obtém-se a relação entre z e w :

$$\frac{z}{w} = p_{11} + p_{12}s(1 - p_{22}s)^{-1}p_{21}. \quad (10.28)$$

Igualando os coeficientes de (10.26) aos coeficientes de (10.28) obtém-se os elementos da matriz P . A Fig. 10.8 ilustra a representação LFT na forma de diagrama de blocos. Na literatura, o mapeamento em (10.27) é chamado uma LFT.

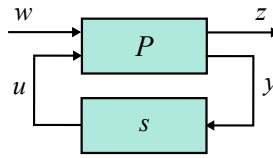


Figura 10.8: LFT inferior com respeito a s .

Para um conjunto de perturbações $\Delta(s)$, satisfazendo $\|\Delta\|_\infty \leq 1$, a planta perturbada pode ser modelada em termos de uma planta nominal G e, por exemplo, uma incerteza não estruturada multiplicativa. Neste caso tem-se:

$$P_\Delta = (1 + W_u\Delta)G, \|\Delta\|_\infty \leq 1 \quad (10.29)$$

com W_u uma função estável que reflete a incerteza no sistema.

No contexto da LFT formas mais gerais de incertezas, inclusive as paramétricas, podem ser descritas na forma de dois blocos mostrada na Fig. 10.9, que representa o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z_d \\ z \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} w_d \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_d \\ w \end{bmatrix}, \\ w_d &= \Delta z_d, \\ T_{zw} &= P_{22} + P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12}. \end{aligned} \quad (10.30)$$

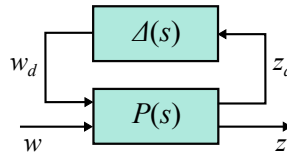


Figura 10.9: LFT superior com respeito a Δ .

Exemplo 10.3 Obter a LFT para o coeficiente incerto τ dado pelo modelo multiplicativo com $\tau = 2, 4 \pm 0, 4$. A LFT para τ é obtida a partir da função de transferência T_{zw}

usando o diagrama 2 blocos-padrão com:

$$\tau = T_{zw} := \mathcal{F}_u(P, \Delta)$$

$$P = \begin{bmatrix} \tau_m & \tau_m \\ r_\tau & 0 \end{bmatrix}$$

com $\tau = \tau_m(1 + r_\tau\Delta)$ para $\tau_m = 2,4$ e $r_\tau = 1,2/4,8$ dados por (10.25) e (10.25), respectivamente. A planta aumentada é então definida de acordo com o diagrama de blocos da Fig. 10.10.

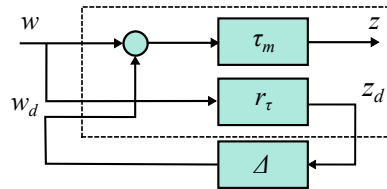


Figura 10.10: LFT para a incerteza do Exemplo 10.3.

Exemplo 10.4 Considere o sistema Maglev sob variação de 10% na massa m , a qual é descrita na forma de incerteza multiplicativa, em que \bar{m} é a massa nominal e m a massa real. A dinâmica do Maglev pode ser consultada na Seção 3.3.1.

A representação LFT para $\frac{1}{m}$ pode ser obtida como segue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} &= \frac{1}{\bar{m} + 0,1\Delta\bar{m}} \\ &= \frac{1}{\bar{m}} - \frac{0,1\Delta}{\bar{m}}(1 + 0,1\Delta)^{-1} \end{aligned}$$

e comparando com

$$T_{zw} = P_{22} + P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12}$$

pode-se obter a LFT:

$$\frac{1}{m} = \mathcal{F}_u \left(\begin{bmatrix} -0,1 & 1 \\ \frac{-0,1}{\bar{m}} & \frac{1}{\bar{m}} \end{bmatrix}, \Delta \right).$$

Exemplo 10.5 Modelos com parâmetros incertos no Matlab para simulação. A partir do exemplo de um motor (ver “robust control Matlab”) e demo: dc motor demo.html) selecionar os principais recursos do Matlab para construir modelos incertos. Repetir o Exercício 10.2 definindo os parâmetros incertos da forma:

```
a = ureal ('a', 2, 'Range', [1 3])
b = ureal ('b', 4, 'Range', [2 6])
P = tf(1, [1 a b]) %planta
```

A representação por LFT pode também associar a planta com o controlador. Neste caso, a entrada da planta é formada pelo sinal de controle u e entradas externas w , por exemplo, perturbações, sinal de ruído de sensores, sinais de comando ou referência e a saída da planta é formada pelos sinais medidos y (realimentados tornam-se entradas do controlador) e as saídas reguladas denotadas por z , por exemplo, variável de estado, sinal de controle e erro. Na forma de diagrama de blocos obtém-se a Fig. 10.11.

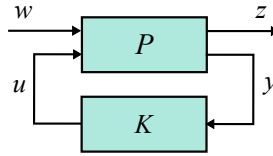


Figura 10.11: LFT inferior com respeito ao controlador K .

Os vetores entrada-saída na representação 2 blocos-padrão são dados por:

$$\begin{aligned} z &= P_{11}w + P_{12}u \\ y &= P_{21}w + P_{22}u \\ u &= Ky \end{aligned} \quad (10.31)$$

e na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \quad (10.32)$$

$$u = K(s)y. \quad (10.33)$$

Substituindo $u = K(s)y$ em (10.32), a matriz de transferência de w to z pode ser calculada como:

$$T_{zw} = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}. \quad (10.34)$$

10.3 Funções de Ponderação

O entendimento dos efeitos das funções de ponderação na solução de controle é crucial para modelar as especificações desejadas. Da Fig. 10.1 e equações (10.11), (10.12), e (10.19), pode-se ilustrar o modelo típico de interconexão como na Fig. 10.12; em que as funções W_1, W_2 , e W_3 refletem o erro em regime permanente e atenuação de distúrbio especificados, restrições sobre a entrada de controle e condição de estabilidade, respectivamente, da seguinte maneira:

1. W_1 pondera a sensibilidade S refletindo as especificações de desempenho;
2. W_2 pondera KS refletindo as restrições sobre a entrada de controle;
3. W_3 pondera a sensibilidade complementar T refletindo a condição de estabilidade e a rejeição de ruído de alta frequência.

Na Fig. 10.11, $P(s)$ define uma planta aumentada com w, u entradas e, z e y saídas. A saída z é um vetor de variáveis reguladas. Aqui w e y correspondem à referência r e erro e definidos no diagrama típico de um sistema realimentado ilustrado na Fig. 10.1, respectivamente.

No projeto H_∞ em geral são empregadas funções de ponderação para especificar a estabilidade e desempenho do sistema. O entendimento dos efeitos destas funções no sistema de controle é crucial para a modelagem das especificações. Um modelo típico para projeto, chamado de planta aumentada, é mostrado na Fig. 10.12. As funções de ponderação W_1, W_2 and W_3 refletem o erro especificado para o regime, limitações sobre a entrada de controle e a condição de estabilidade, respectivamente.

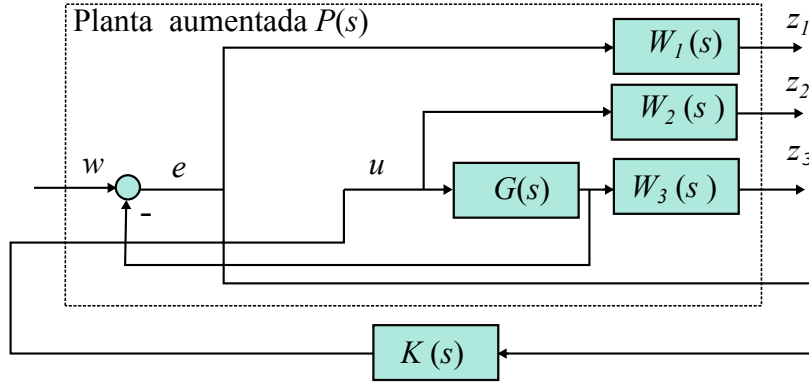


Figura 10.12: Planta aumentada.

Considerando o modelo típico para projeto como na Fig. 10.12 com funções de ponderação W_1, W_2 e W_3 , a matriz de transferência T_{zw} é dada por:

$$T_{zw} := \mathcal{F}_\ell(P, K) = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 T \end{bmatrix}. \quad (10.35)$$

Na Fig. 10.12, $P(s)$ define uma planta aumentada com w e u entradas, z e y saídas. Note que aqui w e y correspondem ao sinal de referência r e erro e no diagrama típico da Fig. 10.1, respectivamente.

Se considerar incerteza na planta, tem-se a forma 3 blocos-padrão mais geral mostrada na Fig.10.13. Dessa forma, tem-se:

$$\mathcal{F}_u = T_{zw} = M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12}, \quad \|\Delta\|_\infty \leq 1 \quad (10.36)$$

com M como ilustrado na Fig. 10.13 dado por:

$$\begin{aligned} M_{11} &= [\bar{P}_{z_d w_d}] \\ M_{12} &= [\bar{P}_{z_d w} \quad \bar{P}_{z_d u}] \\ M_{21} &= \begin{bmatrix} \bar{P}_{z w_d} \\ \bar{P}_{y w_d} \end{bmatrix} \\ M_{22} &= \begin{bmatrix} \bar{P}_{z w} & \bar{P}_{z u} \\ \bar{P}_{z_d w} & \bar{P}_{y w_d} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O sistema conectado da Fig. 10.13 pode ser então descrito por:

$$\begin{bmatrix} z_d \\ z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} w_d \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_d \\ w \end{bmatrix}, \quad w_d = \Delta z_d. \quad (10.37)$$

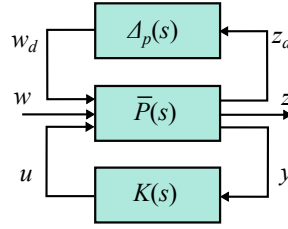


Figura 10.13: LFT inferior com respeito ao controlador K .

A representação espaço de estado do sistema na forma 2 blocos-padrão é descrita como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u \end{aligned} \quad (10.38)$$

com $w := [w_d \ w]^T$ e $z := [z_d \ z]^T$ e matrizes A , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 , D_{11} , D_{21} , D_{22} de dimensões apropriadas.

Exemplo 10.6 Considere um modelo de incerteza multiplicativa na entrada da planta. Suponha que a planta nominal seja razoavelmente precisa (desvio de cerca de 0,5%) em frequências abaixo de 10 rad/s, mas imprecisa em frequências acima de 1000 rad/s (desvio de 40%). Considere um modelo de incerteza da planta entre estes dois extremos. A partir desta especificação, verificar que o limitante para a incerteza pode ser da forma (ordem 1).

$$W(j\omega) = k \frac{j\omega + 10}{(j\omega + 1000)}$$

Resta apenas determinar o ganho k . Para a faixa de baixa frequência tem-se:

$$|W(j\omega)| = \frac{10k}{1000}$$

e sendo $|\Delta'(j\omega)| \leq |W(j\omega)|$, para $|\Delta'(j\omega)| \leq 0,5\%$ tem-se $k \geq 0,5$. Já para a faixa de alta frequência obtém-se $W(j\omega) = k$ o que fornece

$$|\Delta'(j\omega)| \leq 40\%$$

e portanto tem-se $k \geq 0,4$. O valor de k que atende as duas situações é então $k \geq 0,5$. O sistema aumentado na forma 2 blocos-padrão com incerteza sem o controlador é apresentado na Fig. 10.14 com $P(s)$ dado por:

$$\begin{bmatrix} z_d \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w_d \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{z_d w_d} & P_{z_d w} \\ P_{z w_d} & P_{z w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_d \\ w \end{bmatrix}, \quad w_d = \Delta z_d$$

A transferência entre z e w a malha fechada é dada por $T_{zw} = P_{zw} + P_{z w_d} \Delta [I - P_{z_d w_d} \Delta]^{-1} P_{z_d w}$.

```

Exemplo 10.6.m
close all;clear all;clc;
%Verificando o limitante para o modelo de incerteza da planta
%Função Wd(s)
numw=0.5*[1 10];
denw=[1 1000];
sisw=tf(numw,denw);
figure(1);
bode(sisw,{0.1,1e5});
% Abrindo arquivo simulink com a representacao do sistema
run PlantPEx10-6;
%Obtendo a planta aumentada P(s)
disp('Representação espaço estado da planta aumentada P(s)')
[A,B,C,D]=linmod('PlantPEx10-6')

```

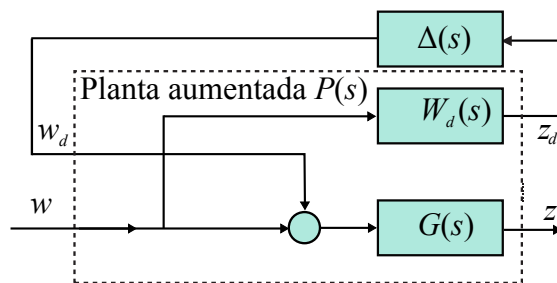


Figura 10.14: Diagrama 2 blocos-padrão.

10.4 Robustez de Estabilidade e Desempenho Caso Incerteza Multiplicativa

Para garantir a estabilidade e o desempenho do sistema incerto é necessário testar a robustez de desempenho e de estabilidade.

A seguir são apresentadas as condições de estabilidade e desempenho que guiam a seleção das funções W_1 e W_3 para o caso monovariável e incertezas multiplicativas.

Considere o sistema realimentado com incerteza multiplicativa normalizada descrito por $P_\Delta(s) = [1 + W(s)\Delta(s)]G(s)$, $|\Delta(s)|_\infty \leq 1$. Pode-se utilizar o critério de Nyquist para obter as condições de robustez de estabilidade do sistema realimentado. Considere o gráfico típico de Nyquist de $K(s)G(s)$ na Fig. 10.15 para o caso monovariável em que $K(s)$ e $G(s)$ não possuem polos no semiplano lateral direito e portanto estabilidade significa que o ponto crítico $-1 + j0$ não é envolvido.

Suponha que a planta perturbada tenha o mesmo número de polos no semiplano direito que a planta nominal. Utilizando a descrição da planta por incerteza multiplicativa pode-se representar a incerteza sobre $KG(s)$ no diagrama de Nyquist por círculos de raio $|W(j\omega)K(j\omega)G(j\omega)|$ uma vez que $G(s) = [1 + W(s)\Delta(s)]G(s)$ e $K(s)G(s) + W(s)K(s)G(s)\Delta = K(s)G(s)$. Portanto, para evitar o envolvimento do

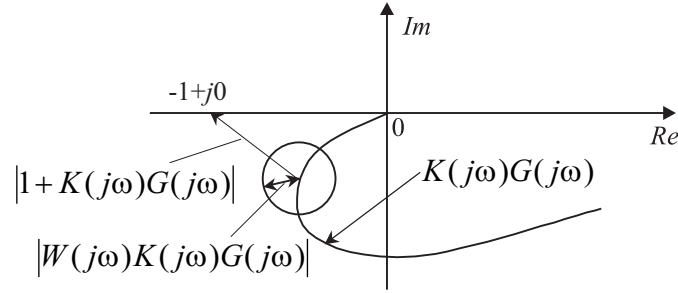


Figura 10.15: Condição de robustez de estabilidade a partir do diagrama de Nyquist caso monovariável.

ponto crítico $-1 + j0$ nenhum dos círculos de raio $|W(j\omega)K(j\omega)G(j\omega)|$, $\forall \omega$ pode cruzar este ponto crítico. Por inspeção da Fig. 10.15, conclui-se que o envolvimento é evitado para $|WK(s)G(s)| < |1 + K(s)G(s)|$, ou equivalentemente se

$$|WK(s)G(s)(1 + K(s)G(s))^{-1}| < 1. \quad (10.39)$$

Pode-se, assim, escrever a condição de robustez de estabilidade da seguinte forma

$$|WT| < 1 \quad (10.40)$$

em que $T = K(s)G(s)(1 + K(s)G(s))^{-1}$ é a função sensibilidade complementar. Este limitante para a função sensibilidade complementar T é garantido em termos da função W_3 quando a seguinte condição é atendida

$$|W_3| \geq |W|. \quad (10.41)$$

Especificações de desempenho são relacionadas à função sensibilidade S , que deve respeitar

$$|WS| \leq 1. \quad (10.42)$$

Exercício 10.1 (Burl, 1999) *Seja o modelo simplificado de uma aeronave considerada como um corpo rígido (sem ressonâncias)*

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \text{ e compensador } K(s) = \frac{20(s+1)}{(s+10)}.$$

Suponha que a planta real seja

$$G(s) = \frac{2(s+1)}{s^2(s^2 + s + 1)}$$

Pede-se:

1. Obter o modelo de incerteza multiplicativa para a planta
2. Obter $M(s)$ a função de transferência vista pela incerteza
3. Verificar a estabilidade do sistema a malha fechada quando sujeito à incerteza calculada em 1.

A condição de robustez de desempenho garante as especificações de desempenho para o conjunto de perturbações consideradas. Uma função sensibilidade modificada, que incorpora perturbações na planta é mostrada a seguir:

$$S' = \frac{1}{1 + KG(1 + \Delta W)} = \frac{S}{1 + \Delta WT}. \quad (10.43)$$

De (10.43), S' pode ser feita mais próxima de S adotando-se W_3 mais restritiva, de tal forma que $|WT| \ll 1$.

10.5 Análise μ

A análise do problema de robustez para descrições mais gerais de perturbações pode ser formulada em uma abordagem unificada utilizando LFT e o valor singular estruturado (SSV, do inglês), conhecido como μ .

Valor singular estruturado

Considere uma estrutura bloco diagonal, com blocos escalares repetidos e blocos completos, para a incerteza Δ , definindo-se $\mathbf{\Delta}$ como

$$\mathbf{\Delta} = \{diag[\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_s I_{r_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_F] : \delta_i \in \mathbb{C}, \Delta_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}\} \quad (10.44)$$

com S e F o número de blocos escalares e blocos completos, respectivamente. Considere agora um subconjunto de $\mathbf{\Delta}$ com norma limitada

$$\mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \{\Delta \in \mathbf{\Delta} : \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\}. \quad (10.45)$$

O SSV pode tratar incertezas estruturadas e não estruturadas e seu inverso define a menor perturbação Δ instabilizante do sistema (Zhou, 1998).

O SSV pode ser interpretado como uma margem de estabilidade com respeito à incerteza Δ . Dada uma matriz de transferência M , O SSV é definido como segue.

Definição 10.2 (Zhou, 1998) For $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mu_{\Delta}(M)$ is given by

$$\mu_{\Delta}(M) = \begin{cases} \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) | \det(I - M\Delta) = 0\}}, & \exists \Delta \in \mathbf{B}\mathbf{\Delta} | \det(I - M\Delta) = 0 \\ 0, & \det(I - M\Delta) \neq 0, \forall \Delta \in \mathbf{B}\mathbf{\Delta}. \end{cases} \quad (10.46)$$

com $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ uma matriz de perturbações diagonal em blocos representando incertezas escalares e não estruturadas e $\bar{\sigma}(\cdot)$ o valor singular máximo.

10.5.1 Robustez de estabilidade

A estabilidade de um sistema sujeito à perturbação Δ é determinada a partir da análise do sistema realimentado da Fig. 10.17. A estabilidade de sistemas multivariáveis pode ser estudada estendendo o critério de Nyquist. Seja o sistema realimentado mostrado na Fig. 10.1. Se todos os elementos da matriz de transferência forem estáveis o sistema é dito ser internamente estável. Agrupando as entradas externas na malha de realimentação como w_1 e w_2 e os sinais de entrada da planta e controlador como e_1 e e_2 , respectivamente, o sistema realimentado pode ser descrito como na Fig. 10.16 que é comumente utilizado para análise de estabilidade.

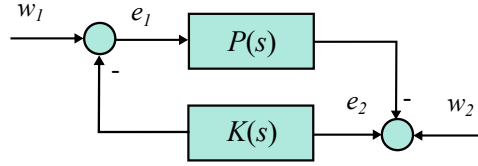


Figura 10.16: Diagrama de análise de estabilidade externa.

Lema 10.1 *Suponha K e G estáveis. Então o sistema descrito na Fig. 10.16 é internamente estável se e só se os zeros de $\det(I + GK)$ possuem parte real negativa.*

Supondo-se o sistema realimentado nominal estável, quaisquer polos instáveis devem ser soluções de

$$\det(I + M_{11}(s)\Delta(s)) = 0. \quad (10.47)$$

Robustez de estabilidade é avaliada pela menor perturbação Δ desestabilizante que leva à uma solução de (10.47) localizada no eixo imaginário. A menor perturbação Δ é definida em termos de $\bar{\sigma}(\Delta)$ como segue

$$\inf_w \left\{ \min_{\Delta \in \mathbf{B}\Delta} [\bar{\sigma}(\Delta) \text{ tal que } \det(I - M_{11}\Delta) = 0] \right\}. \quad (10.48)$$

Uma medida da menor perturbação Δ desestabilizante é dada pelo SSV, conhecido como μ .

Um sistema realimentado descrito na forma padrão é estável internamente (todas as suas funções de transferências são estáveis) para todas as possíveis perturbações $\Delta \in \mathbf{B}\Delta$ se e só se o sistema nominal a malha fechada for internamente estável e $\sup_{\omega} \{\mu_{\Delta}[M_{11}(j\omega)]\} < 1$ como estabelece o seguinte teorema.

Teorema 10.1 (Pequenos Ganhos) *Um sistema realimentado representado na forma 2-blocos padrão da Fig. 10.13 é internamente estável para $\Delta \in \mathbf{B}\Delta$ e $M(s)$ estável se e só se*

$$\sup_{\omega} [\mu_{\Delta}(M_{11}(j\omega))] < 1. \quad (10.49)$$

A seguir é apresentado um esboço da prova seguindo Zhou et al. (1996). Uma vez que $M(s)$ é estável, a instabilidade só pode ser causada pela malha fechada da perturbação Δ e a análise de estabilidade pode ser feita a partir do digrama da Fig. 10.17. Assim, usando Δ admissível e $\sup_{\omega} [\mu_{\Delta}(M_{11})] < 1$ tem-se $\det(I - M_{11}\Delta) \neq 0$. De fato,

$$\inf_{\omega} [\sigma(I - M_{11}\Delta)] \geq 1 - \sup_{\omega} [\bar{\sigma}(M_{11}\Delta)] = 1 - \|M_{11}\Delta\|_{\infty} > 0 \quad (10.50)$$

e a suficiência segue. A necessidade pode ser mostrada usando contradição supondo que $\sup_{\omega} [\bar{\sigma}(M_{11}\Delta)] \geq 1$ e mostrando que existe Δ admissível tal que $\det(I - M\Delta)$ tenha um zero no eixo imaginário usando decomposição de valores singulares.

10.5.2 Robustez de desempenho

Considera-se inicialmente o desempenho do sistema nominal e em seguida robustez de desempenho. Consideram-se as especificações de desempenho mais comuns: acompanhamento de referência, rejeição de perturbações e restrição na amplitude dos valores

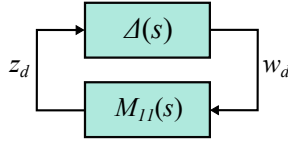


Figura 10.17: Análise de estabilidade.

da saída do controlador. Considere as relações fundamentais a partir da configuração típica mostrada na Fig. 10.1

$$y = T_o(r - n) + S_o G d_i + S_o d \quad (10.51)$$

$$e = S_o(r - d) + T_o n - S_o G d_i \quad (10.52)$$

$$u = K S_i(r - n) - K S_i d - T_i d_i \quad (10.53)$$

com $e = r - y$.

Para o acompanhamento de referência deve-se impor que o erro de acompanhamento seja tal que (Cruz, 1996):

$$\frac{\|e\|_2}{\|r\|_2} \leq \varepsilon_r. \quad (10.54)$$

De outra forma, utilizando a matriz sensibilidade pode-se escrever $\|W_r(jw)S_o(jw)\|_\infty \leq 1$ para $W_r(jw)$ escolhido adequadamente. Equivalentemente, para a rejeição de perturbação na saída da planta, deve-se impor

$$\frac{\|y\|_2}{\|d\|_2} \leq \varepsilon_d \quad (10.55)$$

e conseqüentemente $\|W_d(jw)S_o(jw)\|_\infty \leq 1$, $W_d(jw)$ escolhido adequadamente. Para restringir a amplitude do sinal de controle ou atuador deve-se impor:

$$\|W_u(jw)K S_o(jw)\|_\infty \leq 1 \quad (10.56)$$

para $W_u(jw)$ escolhido adequadamente.

As especificações de desempenho descritas anteriormente podem ser representadas na matriz de transferência entre z e w dada por

$$\|T_{zw}\|_\infty = \|\mathcal{F}_\ell(P, K)\|_\infty = \left\| \begin{array}{c} W_r S_o \\ W_d S_o \\ W_u K S_o \end{array} \right\|_\infty < 1 \quad (10.57)$$

para saídas do diagrama 2 blocos-padrão dadas por $z_1 = W_r e$, $z_2 = W_d y$, $z_3 = W_u u$ e entradas $w_1 = r$ e $w_2 = d$. Outras especificações podem ser incorporadas nesta formulação 2 blocos-padrão.

Como visto anteriormente, a especificação de desempenho pode ser feita a partir da norma H_∞ da matriz de transferência T_{zw} . A norma H_∞ possui a vantagem de ser de fácil aplicação. Diz-se que um sistema realimentado possui desempenho robusto se o sistema conservar-se internamente estável e a especificação $\|T_{zw}\|_\infty < 1$ for satisfeita para as perturbações admissíveis. Assim, a partir do Teorema 10.1, as condições para desempenho robusto podem ser expressas em termos de:

$$\|T_{zw}\|_\infty < 1 \quad (10.58)$$

$$\sup_\omega \mu_\Delta[M_{11}] < 1. \quad (10.59)$$

O problema de robustez de desempenho pode ser convertido em um problema equivalente de robustez de estabilidade através da inclusão de um bloco de incerteza fictício ao sistema. O bloco de desempenho conecta a saída z à entrada ω . Portanto, introduzindo um bloco fictício de perturbação Δ_f associado às especificações de desempenho, uma estrutura aumentada de incerteza pode ser formada

$$\Delta_P = \left\{ \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_f \end{bmatrix} : \Delta \in \mathbf{\Delta}, \Delta_f \in \mathbf{C}^{n_w \times n_z} \right\}. \quad (10.60)$$

Um resultado importante para a análise de robustez é dado a seguir.

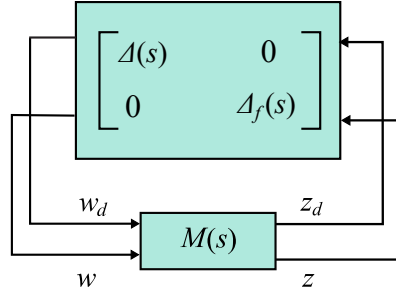


Figura 10.18: LFT do sistema com perturbação aumentada.

Teorema 10.2 *O sistema da Fig. 10.18 atende as condições de robustez de desempenho (10.58) e (10.59) se e só se este for internamente estável.*

Suponha o sistema internamente estável para a estrutura de perturbação aumentada (10.60). Assim, tem-se

$$\det(I - M\Delta_P) \neq 0. \quad (10.61)$$

Para o caso especial de Δ_P

$$\Delta_P = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.62)$$

tem-se $\det(I - M\Delta_P) = \det(I - M_{11}\Delta) \neq 0$ o que implica (10.59). Expandindo (10.61)

$$\det(I - M_P\Delta) = \det \begin{bmatrix} I - M_{11}\Delta & -M_{12}\Delta_f \\ -M_{21}\Delta & I - M_{11}\Delta_f \end{bmatrix} \quad (10.63)$$

e usando a identidade

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A) \det(D - CA^{-1}B) \quad (10.64)$$

obtém-se

$$\det(I - M\Delta_P) = \det(I - M_{11}\Delta) \det(I - T_{zw}\Delta_f). \quad (10.65)$$

Tendo em vista (10.61) chega-se a

$$\det(I - T_{zw}\Delta_f) \neq 0. \quad (10.66)$$

E então, pelo Teorema 10.1 chega-se à condição (10.58).

Exercício 10.2 Seja o sistema realimentado da Fig. 10.19 com a planta $G(s)$ apresentando um polo incerto:

$$G(s) = \frac{1}{s + 2 + \delta}, \delta \in [-0.2, 0.2].$$

Esta incerteza pode ser descrita na forma separada da planta nominal para $\Delta \in [-1, 1]$ como na Fig. 10.20. Sabe-se que a referência varia lentamente com banda-limitada em menos de 10 rad/seg. O objetivo do controle é fazer a saída seguir a referência com erro de regime menor que -20 dB. Uma função de ponderação para a função sensibilidade pode ser do tipo:

$$W_e(j\omega) = \frac{150}{j\omega + 10}$$

a qual garante um ganho maior do que 20 dB na faixa $[0, 10 \text{ rad/seg}]$. A forma padrão para o sistema normalizando a incerteza em 1 é como a seguir na Fig. 10.21. A especificação de desempenho foi incorporada como incerteza $\Delta(s)$. Pede-se:

1. A matriz aumentada M e o seu valor singular estruturado para $K = 50$ e $K = 200$ com $M(s) = \mathcal{F}_\ell(P(s), K(s))$
2. Plotar o diagrama do valor singular estruturado e verificar se a condição de robustez de desempenho é satisfeita.

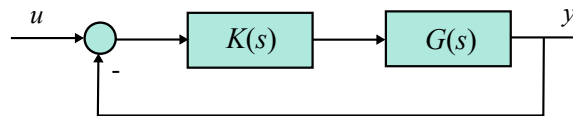


Figura 10.19: Sistema realimentado.

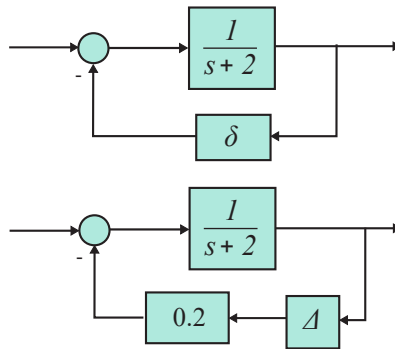


Figura 10.20: Incluindo incertezas no diagrama de blocos.

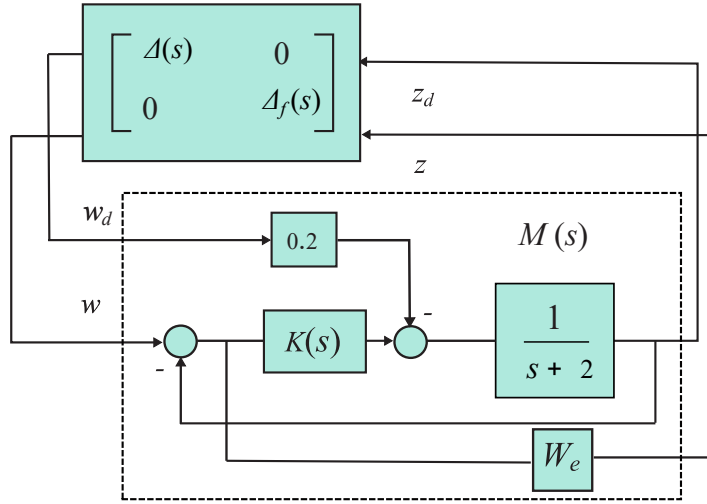


Figura 10.21: Sistema realimentado na forma LFT.

10.6 Projeto H_∞ e Funções de Ponderação

O problema de controle H_∞ foi formulado primeiramente por Zames (1981) a partir da minimização da norma H_∞ da função sensibilidade do sistema realimentado, nome derivado de espaços de Hardy da teoria de análise funcional. A norma H_∞ de uma função de transferência é definida como:

$$\|G(j\omega)\|_\infty = \sup_\omega |G(j\omega)|.$$

Considere a representação 2 blocos-padrão mostrada na Fig. 10.11 com $P(s)$ a matriz de transferência aumentada. Do diagrama tem-se:

$$\begin{aligned} z &= P_{11}w + P_{12}u \\ y &= P_{21}w + P_{22}u \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \\ u &= Ky. \end{aligned} \tag{10.67}$$

A seguir, obtém-se a matriz de transferência entre a saída regulada z e a entrada externa w . Substituindo u na equação de y tem-se:

$$y = P_{21}w + P_{22}Ky \quad \text{e assim} \quad y = (1 - P_{22}K)^{-1}P_{21}w.$$

E, pode-se escrever:

$$u = Ky = K(1 - P_{22}K)^{-1}P_{21}w.$$

Finalmente, substituindo u na equação de z tem-se:

$$\begin{aligned} z &= P_{11}w + P_{12}K(1 - P_{22}K)^{-1}P_{21}w \\ &= [P_{11} + P_{12}K(1 - P_{22}K)^{-1}P_{21}]w \end{aligned} \tag{10.68}$$

e então

$$z = T_{zw}w \quad (10.69)$$

com

$$T_{zw} = P_{11} + P_{12}K(1 - P_{22}K)^{-1}P_{21}.$$

A planta aumentada na forma espaço de estado é da forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u. \end{aligned} \quad (10.70)$$

10.6.1 Problema de controle H_∞ com realimentação de estado

Considere o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{12}u \\ y &= \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10.71)$$

Condição simplificadora do projeto: $D_{12}^T [C_1 \ D_{12}] = [0 \ 1]$

O problema de controle H_∞ com realimentação de estado consiste na obtenção de um controlador que minimize:

$$J = \|T_{zw}\|_\infty = \sup_{\|w(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2}. \quad (10.72)$$

Uma função objetivo quadrática tratável pode ser obtida considerando um limitante para a norma

$$\|T_{zw}\|_\infty = \sup_{\|w(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} < \gamma \quad (10.73)$$

γ é chamado de limitante de desempenho. O controlador que satisfaz este limitante é chamado controlador H_∞ sub-ótimo.

Teorema 10.3 *Existe um controlador admissível tal que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ para um dado γ se e só se existe uma matriz definida positiva P satisfazendo:*

$$A^T P + PA - P(B_2B_2^T - y^{-2}B_1B_1^T)P + C_1^T C_1 \geq 0 \quad (10.74)$$

com $A_c = A - B_2B_2^T P + y^{-2}B_1B_1^T P$ estável. O controlador é dado por $u(t) = -Kx(t)$ com $K = -B_2^T P$.

10.6.2 Problema de controle H_∞ com realimentação da saída

Seja $P(s)$ a realização espaço de estado de uma planta aumentada descrita na forma compacta:

$$P(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right]. \quad (10.75)$$

O problema pode ser formulado como obter um controlador estabilizante $u = Ky$ tal que a norma da função de transferência de malha fechada $T_{zw} = P_{11} + P_{12}K(1 - P_{22}K)^{-1}P_{21}$ seja pequena, isto é, $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, com γ um escalar positivo.

Condições de existência de solução simplificada

- a) O par (A, B_1) é estabilizável e o par (C_1, A) é detetável (condições mais fracas do que controlabilidade e observabilidade).
- b) O par (A, B_2) é estabilizável e o par (C_2, A) é detetável. Esta condição é uma condição necessária para o controlador existir.
- c) $D_{12}^T [C_1 \ D_{12}] = [0 \ 1]$, $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- d) $D_{11} = 0$ e $D_{22} = 0$.

As condições c) e d) não são necessárias, mas simplificam a solução.

Teorema 10.4 *Existe um controlador admissível tal que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ se e só se as seguintes três condições forem satisfeitas:*

1. $A^T P + PA - P(B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T)P + C_1^T C_1 \geq 0$ com $A_c = A - B_2 B_2^T P + \gamma^{-2} B_1 B_1^T P$ estável
2. $SA^T + AS - S(C_2^T C_2 - \gamma^{-2} C_1^T C_1)S + B_1 B_1^T \geq 0$ com $A_f = A - SC_2^T C_2 + \gamma^{-2} SC_1^T C_1$ estável
3. $\rho(PS) < \gamma^2$.

O controlador é dado por

$$K = \begin{bmatrix} A_\infty & -Z_\infty \\ F_\infty & 0 \end{bmatrix}$$

com $A_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T P + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2$ e $F_\infty = B_2^T P$, $L_\infty = -SC_2^T$, $Z_\infty = (1 - \gamma^{-2} SP)^{-1}$

Incorporando funções pesos

Dadas as especificações de desempenho e estabilidade em termos da função sensibilidade e sensibilidade complementar:

$$\begin{aligned} \|W_1 S\|_\infty < 1 \text{ ou } \|S\|_\infty < \|W_1^{-1}\|_\infty \\ \text{e} \\ \|W_3 T\|_\infty < 1 \text{ ou } \|T\|_\infty < \|W_3^{-1}\|_\infty. \end{aligned} \quad (10.76)$$

o problema de controle H_∞ pode ser formulado em termos da minimização da função objetivo $\|T_{zw}\|_\infty$ dada por $T_{zw} = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_3 T \end{bmatrix}$, ou em termos de encontrar um γ pequeno tal que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$. O diagrama do sistema na forma 2 blocos-padrão é mostrado na Fig. 10.22 abaixo.

Observação 10.2 *Os comandos Matlab `augtf` e `augss` fornecem a planta aumentada, e os comandos `hinfg` e `h2lqg` fornecem os controladores H_2 e H_∞ .*

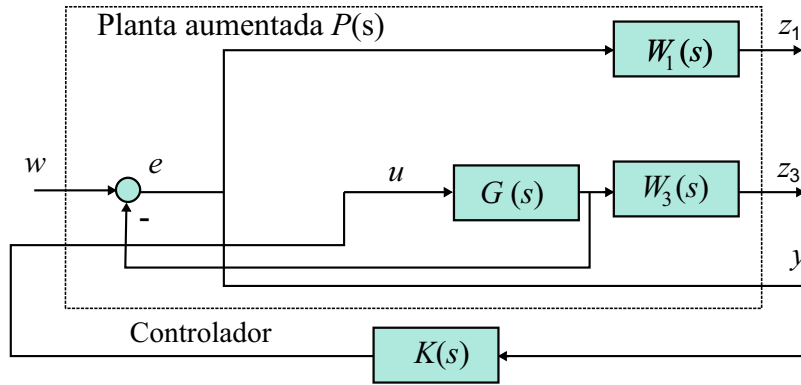


Figura 10.22: Diagrama planta aumentada.

Exercício 10.3 Considere a configuração de controle da Fig. (10.22) com

$$G = \frac{(s-1)}{(s-2)}$$

$$W_1 = \frac{0.1(s+100)}{(100s+1)}$$

$$W_2 = 0.1$$

$$W_3 = \square$$

Pede-se:

1. Obter um controlador H -infinito usando o Matlab com a função `hinftot`.
2. Verificar se as condições de projeto dadas por W_1 e W_2 foram satisfeitas.
3. Plotar a resposta ao degrau do sistema a malha fechada com o controlador obtido no item anterior.
4. Obter as margens de ganho e fase do sistema com controlador.

Exercício 10.4 Considere novamente a configuração de controle mostrada na Fig. (10.22) mas com entradas de perturbações d_i e d na entrada da planta e saída da planta, respectivamente e com (Zhou, 1998)

$$G = \frac{50(s+1,4)}{(s+2)(s+1)}$$

$$W_1 = \frac{2}{s+0,2}$$

$$W_2 = \frac{(s+1)}{(s+10)}$$

$$W_3 = \square.$$

Com $w = [d \ d_i]^T$ e $z = [z_1 \ z_2]^T$, projetar um controlador para minimizar $\|T_{zw}\|_\infty$.

O método H_∞ padrão de realimentação da saída é usado para estabilização do sistema de suspensão. O problema padrão de controle H_∞ é formulado em termos de

encontrar um controlador K , se este existir, tal que para um dado $\gamma > 0$

$$\|T_{zw}\|_\infty = \left\| \begin{array}{c} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 T \end{array} \right\|_\infty \leq \gamma. \quad (10.77)$$

O projeto de controle H_∞ permite incluir especificações de desempenho e estabilidade, rejeição de perturbações e limitações na entrada de controle através das funções de ponderação. Os critérios empregados para a escolha das funções W_1, W_2 e W_3 são resumidas a seguir.

A função W_1 é um limitante para a função sensibilidade S e deve refletir a rejeição a distúrbios externos, erro de regime e tolerância a variações. Além disso, deve proporcionar o ganho mínimo da malha em baixas frequências, já que o sistema de suspensão é condicionalmente estável. Para W_1 de primeira ordem, seu polo deve proporcionar a velocidade desejada.

A função W_2 deve ter um ganho suficiente para limitar a entrada de controle para uma faixa aceitável, evitando a saturação do atuador. Entretanto, um ganho alto pode deteriorar o desempenho, e este compromisso deve ser levado em conta. Deve atenuar os ruídos de alta frequência, porém manter aceitável a velocidade da resposta.

A função W_3 deve minimizar o pico da função sensibilidade complementar T , reduzindo as oscilações e garantindo a estabilidade, entretanto é conflitante com W_1 , especialmente em baixas frequências.

A planta aumentada pode ser obtida usando a função *augtfe*, então, com tss a planta aumentada (10.12) e ssc1 o sistema a malha fechada resultante, o controlador H_∞ pode ser obtido como segue:

```
[sscp,sscl]=hinf(tss);
[syscc]=ss(sscp);
```

10.7 Síntese μ

O objetivo de projeto é obter um controlador estabilizante K , tal que para todas as perturbações Δ o sistema em malha fechada seja estável e satisfaz:

$$\|\mathcal{F}_\ell[\mathcal{F}_u(P, \Delta), K]\|_\infty \leq 1. \quad (10.78)$$

O objetivo da síntese μ é minimizar sobre todos os controladores estabilizantes K , o pico do valor de $\mu_\Delta(\cdot)$ da função transferência de malha fechada $\mathcal{F}_\ell(P, K)$, ou seja

$$\min_{\substack{K \\ \text{estabilizavel}}} \max_w \mu_\Delta(\mathcal{F}_\ell(P, K)(jw)). \quad (10.79)$$

No problema min max (10.79), a redução do limitante superior de μ permite aumentar a menor perturbação desestabilizante Δ assim, aumentando a margem de robustez de estabilidade. A computação direta de $\mu_\Delta(M)$ fazendo-se uma busca sobre todos os $\Delta \in \mathbf{B}\Delta$ não é praticável. Portanto, um limitante superior de $\mu_\Delta(M)$ é usado no projeto de controladores robustos. Um limitante superior de $\mu_\Delta(M)$ é $\bar{\sigma}(M)$ como pode ser visto no Exercício 10.5. Entretanto, este limitante é bastante conservador. Para superar este problema, em (Safonov, 1982) o conceito de escalonamento diagonal é utilizado para computar um limitante para $\mu_\Delta(\cdot)$. A motivação para este escalonamento é que se Δ e D são matrizes diagonais tem-se $\|\Delta\|_\infty = \|D\Delta D^{-1}\|_\infty$ mas $\|DM D^{-1}\|_\infty$ pode ser feita

bem menor do que $\|M\|_\infty$. Portanto, como os polos do sistema realimentado 10.13 não são afetados pelo escalonamento, tem-se:

$$\mu_\Delta(M) = \mu_\Delta(DMD^{-1}). \quad (10.80)$$

Isto leva ao seguinte limitante superior para $\mu_\Delta(M)$

$$\mu_\Delta(M) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (10.81)$$

com \mathcal{D} um conjunto de matrizes de escalonamento diagonais com a propriedade $D\Delta = \Delta D$ para todo $D \in \mathcal{D}$ e $\Delta \in \Delta \in \mathbf{B}\Delta$.

Pode-se enxergar (10.79) como um problema de minimização do limitante superior μ_Δ mostrado em (10.81) e formar a chamada iteração $D - K$.

$$\min_{\substack{K \\ \text{estabilizavel}}} \min_{D^{-1} \in H_\infty} \|D\mathcal{F}_\ell(P, K)D^{-1}\|_\infty. \quad (10.82)$$

A Fig. 10.23 ilustra o problema de otimização.

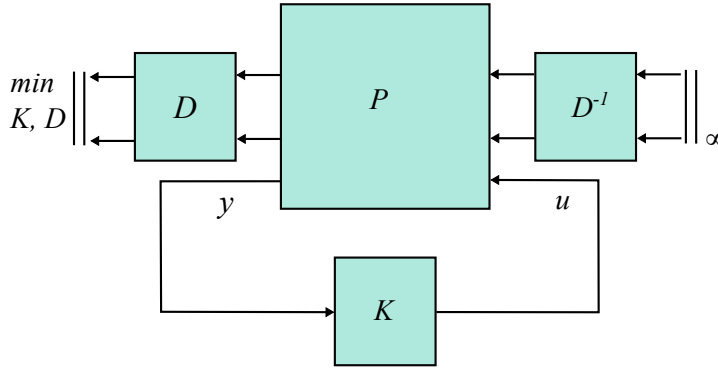


Figura 10.23: Síntese $D - K$.

Algoritmo 10.1 (Iteração $D - K$)

1. Fixar uma estimativa inicial da matriz de escalonamento $D_\omega = \text{diag}(d_1^\omega I, \dots, d_{F-1}^\omega I, I) \in \mathcal{D}$, $d_i^\omega, i = 1, \dots, F - 1$ escalares positivos ;
2. Encontrar funções de transferência escalares estáveis $d_i(s), d_i^{-1}(s)$ para $i = 1, 2, \dots, (F - 1)$ de forma que $|d_i(j\omega)| \approx d_i^\omega$;
3. Seja $D(s) = \text{diag}(d_1(s)I, \dots, d_{F-1}(s)I, I)$;
4. Construir um modelo espaço de estado para o sistema $\hat{P} = (D(s)I)P(D^{-1}(s)I)$;
5. Solucionar o problema de otimização H_∞

$$\min_K \|\mathcal{F}_\ell(\hat{P}, K)\|_\infty \quad (10.83)$$

e denotar o controlador encontrado por \hat{K} ;

6. Solucionar

$$\min_{D_\omega \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}[D_\omega \mathcal{F}_\ell(P, \hat{K})(j\omega) D_\omega^{-1}] \quad (10.84)$$

e denotar o novo D_ω por \hat{D}_ω ;

7. Comparar \hat{D}_ω com o anterior D_ω e retornar ao passo 2 até atingir convergência.

Exercício 10.5 *Mostrar que o SSV é limitado acima pelo valor singular máximo, isto é*

$$\mu_\Delta(M) \leq \bar{\sigma}(M).$$

Sugestão. Utilizar a Definição 10.2 para um Δ^ satisfazendo $\det(I - M\Delta) = 0$ e utilizar o conceito de norma induzida de matriz.*

A teoria de síntese μ é encontrada em Zhou (1998) e Burl (1999), e instruções para usar o Matlab em Balas et al. (1995).

10.7.1 Problema de controle H_2

O problema de controle H_2 é formulado similarmente ao problema H-infinito, mas em termos da minimização de $\|T_{zw}\|_2$, a norma H_2 da função de transferência é dada por:

$$\|T_{zw}\|_2 = \frac{1}{2\pi} \int \text{tr}(T_{zw}^*(j\omega) T_{zw}(j\omega))^{1/2} d\omega. \quad (10.85)$$

com $\text{tr}(A)$ o traço de A . Pode-se dar à norma H_2 a seguinte interpretação. Seja $w(t)$ uma entrada ruído branco com $E\{w(t)w^*(t)\} = I\delta(t - \tau)$ e o erro dado por $z = T_{zw}w$. A potência esperada para o sinal de erro z (valor rms de z) é dada por:

$$\|z\|_{pow} = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T z^* z dt \right\} \quad (10.86)$$

com E o operador esperança. No domínio do tempo tem-se que:

$$z = \int_{-T}^T T_{zw}(t - \tau) w(\tau) d\tau \quad (10.87)$$

Substituindo (10.87) em (10.86) e notando que $z^* z = \text{tr} E\{zz^*\}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \|z\|_{pow} &= \|T_{zw}w\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T d\tau \int_{-T}^T \text{tr} \left(T_{zw}(t - \tau) E\{w(\tau)w^*(\sigma)\} T_{zw}^*(t - \sigma) \right) d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(T_{zw}(t - \tau) T_{zw}^*(t - \tau)) d\tau \\ &= \|T_{zw}\|_2^2. \end{aligned} \quad (10.88)$$

Portanto, minimizando o valor $\|z\|_{pow}$ é o mesmo que minimizar de $\|T_{zw}\|_2^2$. Usando a identidade de Parseval, obtém-se a norma em (10.85).

10.8 Discretização do controlador H_∞

A técnica de projeto H_∞ geralmente leva a controladores contínuos de ordem elevada, não sendo viável a implementação analógica. A partir da representação contínua em espaço de estado é normalmente usada a transformação de Tustin para a obtenção do controlador na forma de espaço de estado discreta

$$\begin{aligned} x_c(k+1) &= A_c x_c(k) + B_c u(k) \\ u(k) &= C_c x_c(k) + D_c u(k). \end{aligned} \tag{10.89}$$

A transformação Tustin, também chamada de bilinear, preserva a norma H_∞ e apresenta resultados satisfatórios desde que o tempo de amostragem T seja da ordem de 10 vezes menor que as constantes de tempo do sistema. Esta transformação é obtida seguindo a relação

$$z = e^{sT} \approx \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2} \quad \text{ou} \quad s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}. \tag{10.90}$$

A função *bilin* do Matlab é empregada para realizar a discretização na forma de espaço de estado,

| | |
|---|--------------------------------|
| <code>[syscd] = bilin(syscc,1,'tustin',Ts)</code> | T_s é o tempo de amostragem. |
| <code>[Ac, Bc, Cc, Dc, T]=ssdata(syscd)</code> | gerando controlador |

e a implementação deste pode ser realizada através de registradores de deslocamento, somadores e multiplicadores, como na Fig. (10.24).

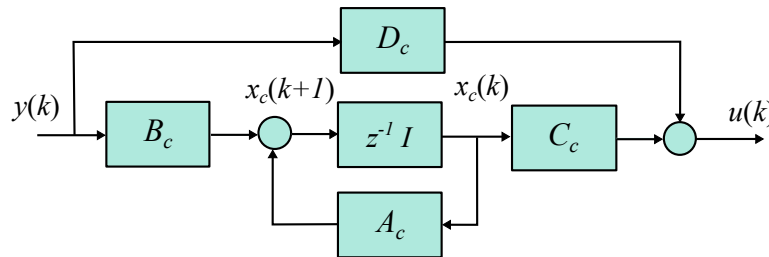


Figura 10.24: Realização em diagrama de blocos.

10.9 Exemplo de Projeto

Para aplicar técnicas de controle robusto em problemas práticos, os conceitos de planta aumentada, especificação de desempenho e funções de ponderação são fundamentais. A seguir utiliza-se o mesmo sistema de suspensão apresentado na Seção 3.3 para reforçar estes conceitos a partir da realização de um projeto completo de um controlador incluindo testes de desempenho e estabilidade e simulações.

O projeto de um controlador μ para o sistema de suspensão magnética supõe a existência de variações paramétricas na massa da esfera e distúrbios externos. A planta aumentada é então construída com as funções de ponderação W_1 , W_2 e W_3 mencionadas anteriormente e uma entrada e saída adicional para modelar a incerteza na massa.

10.9.1 Escolha das matrizes de ponderação

A escolha das matrizes de ponderação W_1 , W_2 e W_3 tem por base as características do sistema a ser controlado e no caso tratado observa-se o seguinte.

W_1 deve limitar S , em baixas frequências estabelece um ganho mínimo necessário para estabilizar o sistema em malha fechada para que tenha boa rejeição a perturbações externas, apresente pequeno erro de regime e tenha desempenho insensível a variações da planta. O ganho nesta faixa não pode ser muito elevado para evitar a saturação do PWM. A localização do polo deve proporcionar a velocidade desejada.

A função W_2 deve ter um ganho suficiente para limitar a entrada de controle para uma faixa aceitável, evitando a saturação do atuador. Entretanto, um ganho alto pode deteriorar o desempenho. Este ganho deve atenuar os ruídos de alta frequência, porém manter aceitável a velocidade da resposta.

A função W_3 deve minimizar o pico da função sensibilidade complementar T , reduzindo as oscilações e garantindo a estabilidade, entretanto é conflitante com W_1 , especialmente em baixas frequências. Após simulações e ajustes, as funções escolhidas foram:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{2,25}{s + 0,1} \\ W_2 &= \frac{0,0045s + 0,09}{s + 150} \\ W_3 &= \frac{0,095s + 1,9}{s + 190}. \end{aligned}$$

10.9.2 Incertezas paramétricas

Incertezas paramétricas podem ser representadas por LFTs. Para o modelo de suspensão magnética escolhido é razoável considerar a variação da massa m suspensa para uma aplicação de um veículo suspenso magneticamente no qual a entrada e saída de passageiros representaria uma variação real e prevista da massa. Considera-se uma variação de 10% na massa da esfera

$$m = \bar{m} + 0,1\delta\bar{m}, \quad \delta \in [-1, 1] \quad (10.91)$$

em que \bar{m} é a massa nominal e m a massa real. Esta perturbação é descrita na planta aumentada da Fig. 10.25 por uma LFT em δ . De fato, o termo $\frac{1}{m}$ pode ser escrito como

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{\bar{m}} - \frac{0,1\delta}{\bar{m}}(1 + 0,1\delta)^{-1}. \quad (10.92)$$

Comparando (10.36 and (10.92), a matriz LFT correspondente a qual é denotada M_1 pode ser obtida como

$$M_1 = \begin{bmatrix} -0,1 & 1 \\ \frac{-0,1}{\bar{m}} & \frac{1}{\bar{m}} \end{bmatrix}. \quad (10.93)$$

A LFT pode ser representada na forma:

$$\frac{1}{\bar{m} + 0,1\delta\bar{m}} \Leftrightarrow \mathcal{F}_u \left(\delta, \begin{bmatrix} -0,1 & 1 \\ \frac{-0,1}{\bar{m}} & \frac{1}{\bar{m}} \end{bmatrix} \right). \quad (10.94)$$

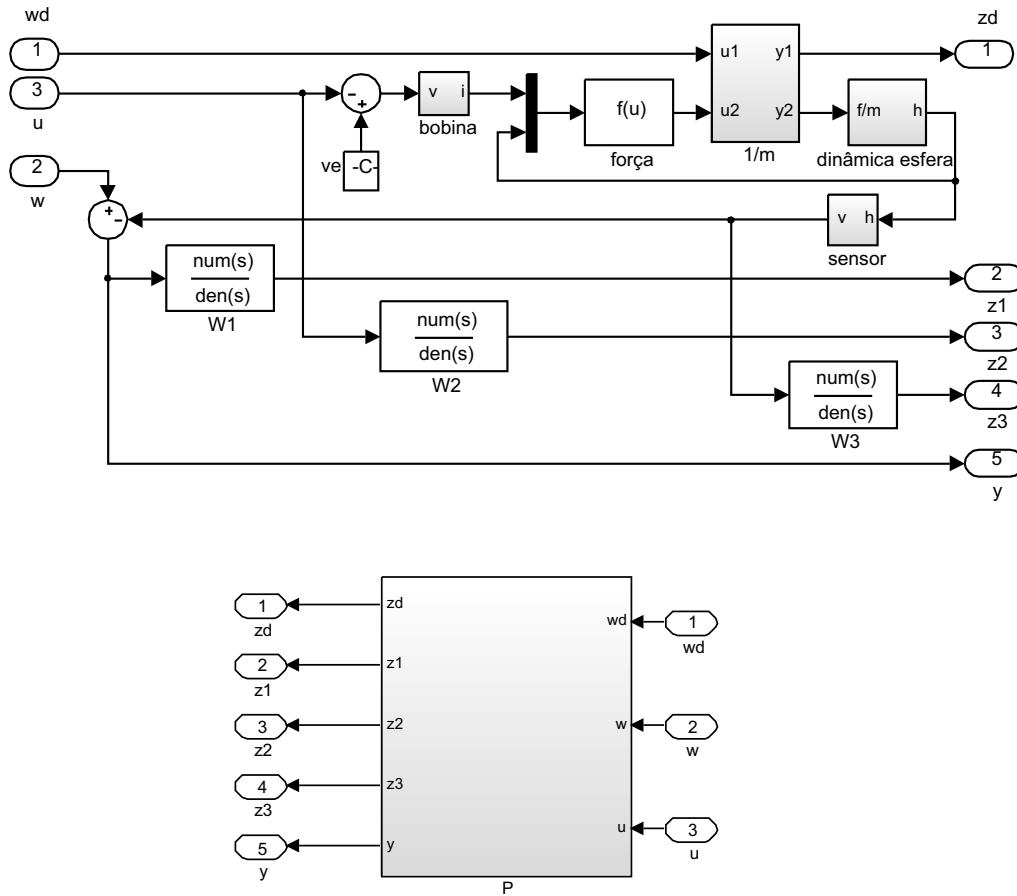


Figura 10.25: Diagrama em blocos no Simulink para gerar a planta aumentada P .

10.9.3 Controlador H_∞ padrão

O problema de controle H_∞ padrão é formulado em termos de encontrar um controlador admissível K , se existir um, tal que, para um dado $\gamma > 0$

$$\|T_{zw}\|_\infty := \left\| \begin{array}{c} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 T \end{array} \right\|_\infty \leq \gamma. \quad (10.95)$$

Para modelar as especificações de desempenho e estabilidade, uma planta aumentada é obtida a partir da planta nominal G e funções de ponderação. Para considerar o modelo perturbado para a planta em termos de incerteza multiplicativa a qual reflete a variação da massa m , gera-se um função de transferência estável W_u e ajusta-se a função de ponderação W_3 de forma que a condição de estabilidade para a incerteza multiplicativa é garantida $\|W_u T\|_\infty < 1$ e W_3 é alterada para:

$$W_3 = \frac{0,095s + 1,9}{s + 190}. \quad (10.96)$$

A planta aumentada segue a estrutura mostrada na Fig. 10.22 obtida com a função augtf (ver código a seguir) em que $sscp = \text{mksys}(Ac, Bc, Cc, Dc)$ com Ac, Bc, Cc, Dc as matrizes do controlador obtidas e $sscl$ o sistema de malha fechada resultante.

```
[tss]=augtf(Gn,W1,W2,W3);
% o controlador H infinito é então obtido via os seguintes comandos
[sscp,sscl]=hinf(tss);
[syscc]=ss(sscp)
```

O controlador encontrado é de ordem 6. A função *hinf* utiliza um algoritmo com 2 equações de Riccati (Zhou, 1998). Fig. 10.26 ilustra os limitantes de desempenho e estabilidade especificado em termos de W_1 and W_3^{-1} .

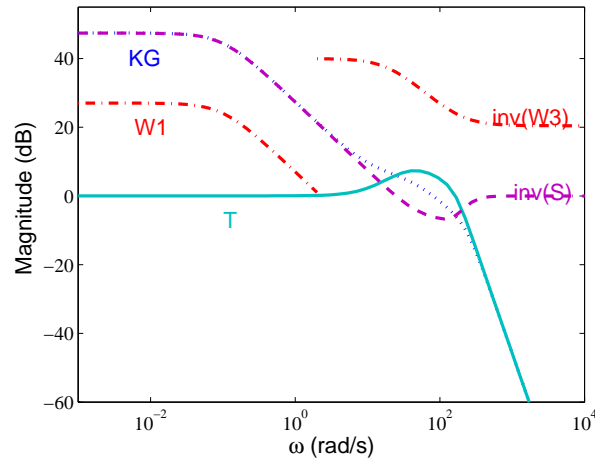


Figura 10.26: Especificações de projeto.

10.9.4 Controlador μ

A matriz P para o problema de controle de acordo com a Fig. 10.25 descreve o sistema interconectado

$$\begin{bmatrix} z_d \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w_d \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (10.97)$$

A solução de (10.82) leva à minimização de $\|W_1 S\|_\infty$, $\|W_2 K S\|_\infty$, $\|W_3 T\|_\infty$ e $\|T_{z_d w_d}\|_\infty$. A síntese do controlador pode ser obtida no Matlab através dos comandos (Balas et al., 1995).

```
[Ap,Bp,Cp,Dp]=linmod('Pmu');
P=pck[Ap,Bp,Cp,Dp];
dk\_def\_name = 'G\_dk.m';
dkit;
O arquivo G\_dk.m é descrito a seguir:
```

```
% estrutura de interconexão da planta nominal
nominal\_dk = P;
nmeas\_dk = 1; % número de saídas
ncont\_dk = 1; % número de entradas de controle
% estrutura de Delta para calcular mu de Delta
blk\_dk = [-1 0;1 3];
% faixa de frequência de resposta
omega\_dk = logspace(-1,4,200);
```

Encontra-se assim um controlador de sexta ordem, na sétima iteração, com o menor pico de μ_{Δ_P} . Um controlador de ordem maior poderia ser encontrado no escalonamento da matriz de transferência D porém acarretaria um tempo de processamento maior comprometendo a implementação em tempo real do controlador.

10.9.5 Testes de robustez

A resposta em frequência do limitante superior de μ para o teste de robustez de desempenho é obtida através dos comandos

```
M=starp(P,K,1,1);
% calcula mu de Deltap(M) para o teste de robustez de desempenho
[bnds]= mu(M,[-1 0; 1 3]);
[Af, Bf, Cf, Df]=linmod('M11');
% calcula mu de Delta(M11) para o teste de robustez de estabilidade
[mu,LOGD]=SSV(Af,Bf,Cf,Df,w,[-1 -1]);
```

Segundo o teste de estabilidade robusta (10.49) mostrado na Fig. 10.27 o sistema é robustamente estável para os dois controladores uma vez que $\mu_{\Delta} \leq 1$. Observa-se que o controlador μ tem maior tolerância a variações de massa em relação ao H_{∞} . Enquanto o primeiro atinge a instabilidade com $\delta = 1/0,1768 = 5,65$, ou seja, a massa pode variar no intervalo de $0,44\bar{m} \leq m \leq 1,56\bar{m}$ para $m = \bar{m} + 0,1\delta\bar{m}$, o segundo é desestabilizado com $\delta = 1/0,2118 = 4,72$ que resulta na faixa admissível $0,53\bar{m} \leq m \leq 1,47\bar{m}$.

O teste de robustez de desempenho é feito com a perturbação aumentada Δ_P , para considerar as condições (10.58) e (10.59). Na Fig. 10.28 observa-se que ambos tem desempenho robusto mas o controlador μ apresenta vantagens consideráveis. O pico de μ_{Δ_P} do controlador μ é 0,275 enquanto para o controlador H_{∞} é de 0,534, o que representa uma faixa de tolerância da massa de $0,64\bar{m} \leq m \leq 1,36\bar{m}$ e $0,81\bar{m} \leq m \leq 1,19\bar{m}$, respectivamente. A Fig. 10.29 apresenta o diagrama Simulink utilizado para a realização de simulações com perturbações.

10.10 Aulas de Laboratório

A principal dificuldade no ensino de controle é a variedade de conceitos envolvidos em uma única aula de controle uma vez que o estudante tem de integrar os conceitos de álgebra linear, equações diferenciais, e sistemas dinâmicos. Para motivar os alunos sobre os temas sendo ensinados, um ou dois alunos recebem tarefa de casa. Na semana seguinte, esses estudantes trazem as suas soluções que são então dadas aos outros como um trabalho de classe orientado. Para facilitar a conclusão da tarefa de casa, mais instruções são dadas a eles durante a semana.

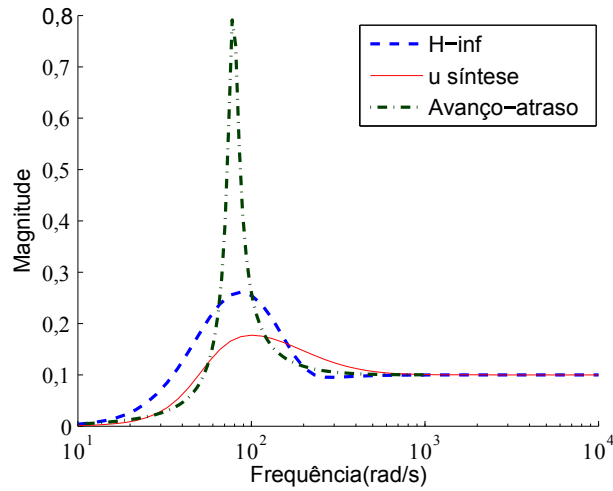


Figura 10.27: Teste de robustez de estabilidade.

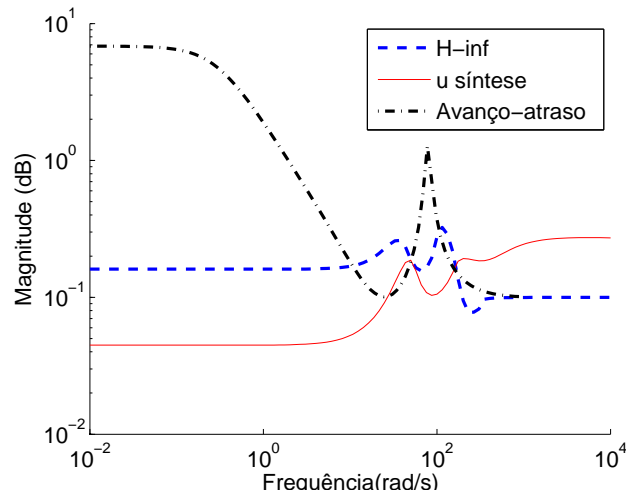


Figura 10.28: Teste de robustez de desempenho.

Para usar o projeto de controle robusto em problemas práticos, descobre-se que os conceitos de planta aumentada, especificação de desempenho, e as funções de ponderação e de modelos conectados são de suma importância. Algumas possíveis tarefas de classe de trabalho que envolvem esses conceitos incluem os seguintes itens.

10.10.1 Análise e síntese

1. Analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio (h_e, i_e) das equações non-lineares usando o modelo linearizado com os parâmetros dados na Seção 3.3.
2. Descrever a planta perturbada e escolher as funções de ponderação seguindo as

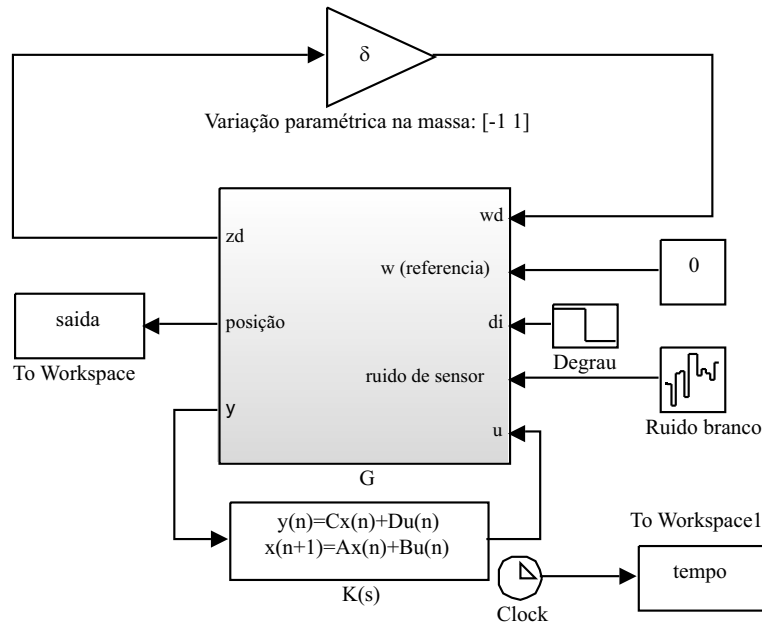


Figura 10.29: Modelo Simulink para simulação de perturbações.

diretrizes dadas na Seção 10.9.2 and 10.9.1. Obter uma função de ponderação W_u estável para uma variação de 10% na massa da esfera adotando:

$$m = \bar{m} + 0,1\delta\bar{m}, \quad -1 \leq \delta \leq 1$$

em que \bar{m} é a massa nominal.

3. Construir a planta aumentada mostrada nas Figs. 10.12 e 10.25 para projeto usando os procedimentos fornecidos na Seção 10.9.3 e 10.7, respectivamente. Utilizar as as funções de ponderação encontradas no projeto.
4. Desenvolver um programa Matlab para obter os controladores H_∞ e μ usando os passos fornecidos na Seções 10.6 e 10.7, respectivamente. Para comparação, usar um controlador avanço-atraso obtido com as interfaces sisotool ou rltool do Matlab.
5. Desenvolver um programa Matlab para realizar os testes de robustez em termos dos limitantes superiores de μ usando os passos fornecidos na Seção 10.5. Gráficos típicos obtidos pelos alunos são mostrados na Fig. 10.28.
6. Testar a robustez de estabilidade, apresentando o gráfico em frequência da função sensibilidade complementar juntamente com o gráfico de $1/W_3$ e $1/W_u$. Apesar de a condição (10.41) não ser satisfeita em toda a faixa de frequências, a condição de robustez de estabilidade (10.40) é atendida. A escolha foi feita desta forma para não prejudicar o avanço de fase proporcionado pelo controlador, já que a robustez de estabilidade continua sendo garantida.

7. Obter o diagrama para análise μ do sistema controlado para verificar robustez de desempenho e estabilidade. Os limitantes de μ fornecem informações do efeito da perturbação δ_m na matriz M . A matriz M deve ser obtida a partir do diagrama apresentado na Fig. 10.25

$$\begin{bmatrix} z_d \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} w_d \\ w \end{bmatrix}.$$

8. Obter a resposta em frequência do limitante superior de μ para o teste de robustez de desempenho. Utilizar os seguintes passos

```
[Af, Bf, Cf, Df]=linmod('MHinf')
[mu,LOGD]=SSV(Af,Bf,Cf,Df,w,[-1 0;1 3])
```

em que ω é a faixa de frequência selecionada e $[-1 \ 0; 1 \ 3]$ é a descrição dos blocos de incerteza.

9. Testar a robustez de estabilidade usando o bloco de incertezas $[-1 \ 0]$ e a submatriz M_{11} , obtida por

```
M11=sel(M,1,1).
```

10.10.2 Trabalhos de simulação

1. Construir um diagrama Simulink do tipo mostrado na Fig. 10.29 para obter as respostas a perturbação degrau.
2. Plotar as respostas do sistema de controle realimentado com o controlador avanço-atraso obtido.
3. Repetir o item 2 acrescentando perturbações do tipo degrau de diferentes amplitudes e variar a massa da esfera com os controladores H_∞ e μ obtidos. Gráficos típicos obtidos pelos alunos são mostrados na Figura 10.30.

10.10.3 Implementação do controlador

1. Obter o controlador discreto usando os procedimentos apresentados na Subseção 10.8.
2. Construir um VI em três estágios para implementar o controlador no LabView como na Fig. 10.31.
3. Obter a resposta do sistema a um degrau de perturbação de 0,1 V na tensão na bobina.
4. Testar a robustez do controlador adicionando um anel na esfera de metal.

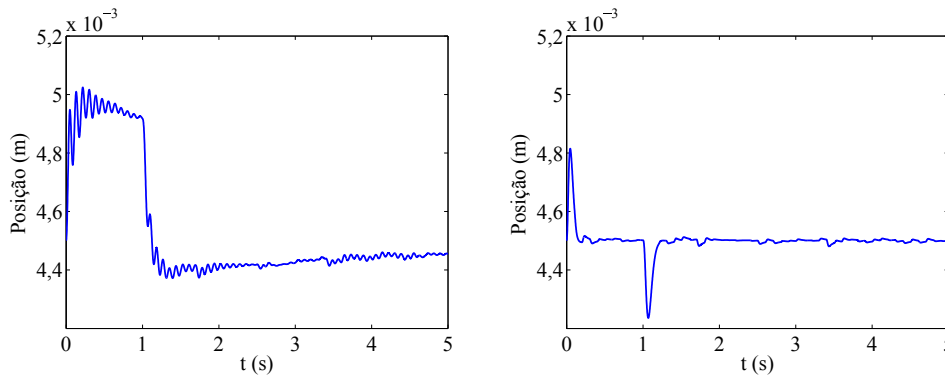


Figura 10.30: Respostas ao degrau de perturbação. Com controlador avanço-atraso (esquerda) e com controlador H_∞ padrão (direita).

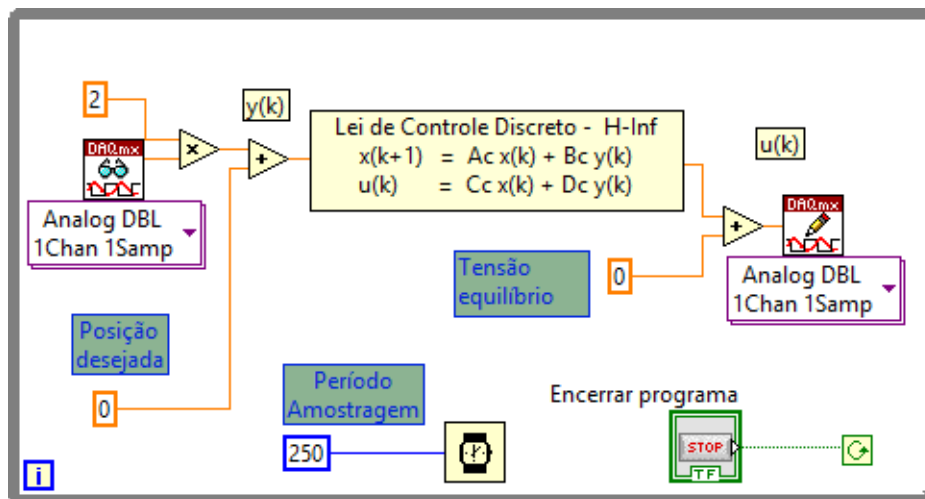


Figura 10.31: Diagrama LabView.

Neste ponto, os estudantes já percebem que controladores de alta ordem podem fornecer soluções mais adequadas para o problema do que o controlador de 2ª ordem avanço-atraso obtido.

Em geral, as respostas dos estudantes às atividades de sala de aula interativas foram bastante positivas.

Indicam que o ponto forte do curso é a introdução às técnicas de controle robusto com foco nas aplicações relacionando teoria, simulação e trabalho de laboratório

Além disso, o uso intensivo de Matlab e Simulink em sala de aula contribuiu para desenvolver as suas habilidades em simulações.

Como consequência da experiência adquirida em atividades de aula, a participação dos estudantes em discussões aumentou.

Cada grupo de estudantes explora alguns aspectos do projeto de acordo com a sua habilidade e envolvimento com outras disciplinas o que favorece a aprendizagem de novos componentes de controle a aplicações.

O uso de resposta em frequência para descrever as especificações de desempenho e o uso do Simulink foram bem assimilados pelos estudantes. O diagrama LabView VI na configuração usada é fornecido de forma que o estudante precisa somente projetar a lei de controle e introduzir no bloco como mostrado na Fig. 10.31.

Apêndices

Apêndice A

Tabela da Transformada \mathcal{Z} e Propriedades

A.1 Propriedades da Transformada \mathcal{Z}

Linearidade

$$\mathcal{Z}\{\alpha x_1(k) + \beta x_2(k)\} = \alpha \mathcal{Z}\{x_1(k)\} + \beta \mathcal{Z}\{x_2(k)\} \quad (\text{A.1})$$

Deslocamento para Direita - O Operador Avanço

$$\mathcal{Z}\{x(k-d)\} = z^{-d} \mathcal{Z}\{x(k)\} = z^{-d} X(z) \quad d \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

Deslocamento para Esquerda - O Operador Atraso

$$\mathcal{Z}\{x(k+d)\} = z^d \left[X(z) - \sum_{q=0}^{d-1} x(q)z^{-q} \right] \quad d \geq 0 \quad (\text{A.3})$$

Amortecimento

$$\mathcal{Z}\{x(k)e^{-akT_s}\} = X(ze^{aT_s}) \quad (\text{A.4})$$

Valor Inicial

$$X(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (\text{A.5})$$

Valor Final

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) \quad (\text{A.6})$$

A propriedade do valor final somente é válida se $x(\infty)$ existe. Assim, só se aplica a processos estáveis.

A.2 Tabelas de Transformadas

| | | | |
|----------------------------|---|---|--------|
| $x(t)$ | $X(s)$ | $X(z)$ | |
| $1(t)$ | $\frac{1}{s}$ | $\frac{z-1}{z}$ | (01) |
| t | $\frac{1}{s^2}$ | $\frac{T_s z}{(z-1)^2}$ | (02) |
| t^2 | $\frac{2}{s^3}$ | $\frac{T_s^2(z+1)}{(z-1)^3}$ | (03) |
| t^3 | $\frac{6}{s^4}$ | $\frac{T_s^3(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$ | (04) |
| e^{-at} | $\frac{1}{(s+a)}$ | $\frac{z-e^{-aT_s}}{z}$ | (05) |
| te^{-at} | $\frac{1}{(s+a)^2}$ | $\frac{T_s z e^{-aT_s}}{(z-e^{-aT_s})^2}$ | (06) |
| $t^2 e^{-at}$ | $\frac{2}{(s+a)^3}$ | $\frac{T_s^2 z^2 e^{-aT_s} (z+e^{-aT_s})}{(z-e^{-aT_s})^3}$ | (07) |
| $1 - e^{-at}$ | $\frac{a}{s(s+a)}$ | $\frac{(1-e^{-aT_s})z}{(z-1)(z-e^{-aT_s})}$ | (08) |
| $at - 1 + e^{-at}$ | $\frac{a^2}{s^2(s+a)}$ | $\frac{(aT_s - 1 + e^{-aT_s})z^2 + (1 - aT_s e^{-aT_s} - e^{-aT_s})}{(z-1)^2(z-e^{-aT_s})}$ | (09) |
| $e^{-at} - e^{-bt}$ | $\frac{(b-a)}{(s+a)(s+b)}$ | $\frac{z(e^{-aT_s} - e^{-bT_s})}{(z-e^{-aT_s})(z-e^{-bT_s})}$ | (10) |
| $1 - (1+at)e^{-at}$ | $\frac{a^2}{s(s+a)^2}$ | $\frac{z}{z-1} - \frac{z}{(z-e^{-aT_s})} - \frac{aT_s e^{-aT_s} z}{(z-e^{-aT_s})^2}$ | (11) |
| $\sin(\omega_1 t)$ | $\frac{\omega_1}{s^2 + \omega_1^2}$ | $\frac{z \sin(\omega_1 T_s)}{z^2 - 2z \cos(\omega_1 T_s) + 1}$ | (12) |
| $\cos(\omega_1 t)$ | $\frac{s}{s^2 + \omega_1^2}$ | $\frac{z(z - \cos(\omega_1 T_s))}{z^2 - 2z \cos(\omega_1 T_s) + 1}$ | (13) |
| $e^{-at} \sin(\omega_1 t)$ | $\frac{\omega_1}{(s+a)^2 + \omega_1^2}$ | $\frac{z e^{-aT_s} \sin(\omega_1 T_s)}{z^2 - 2z e^{-aT_s} \cos(\omega_1 T_s) + e^{-2aT_s}}$ | (12) |
| $e^{-at} \cos(\omega_1 t)$ | $\frac{(s+a)}{(s+a)^2 + \omega_1^2}$ | $\frac{z(z - \cos(\omega_1 T_s))}{z^2 - 2z e^{-aT_s} \cos(\omega_1 T_s) + e^{-2aT_s}}$ | (13) |

Tabela A.1: Transformadas de Laplace e Transformadas Z

Apêndice B

Rotinas de Interrupção e do Controlador PI

```
void TIMER_isr()
{
    disable_interrupts(INT_TIMER1);
    clear_interrupt(INT_TIMER1);

    if(running_motor==1) //Flag Motor Rodando
    {

        Digital = read_adc();
        H = Digital*0.12038;

        //CONTROLADOR
        en = ref-H; //Calcula o Erro
        un = 0.00613*en - 0.003465*en1 + un1;
        en1 = en;
        un1 = un;

        //ATRIBUI VALOR CALCULADO AO DUTY
        un = un*10000;
        if(un>9500)
        {
            un = 9500;
        }
        if(un<0)
        {
            un = 0;
        }
        duty = (unsigned int)un;
        enable_interrupts(INT_TIMER1);
    }
}
```


Apêndice C

Ganho para Sistemas MIMO

O ganho é uma relação entra/saída e pode ser definido como

$$\begin{aligned}\text{Ganho} &= \frac{\|y\|}{\|u\|} = \frac{\|G(j\omega)u_0e^{j\omega t}\|}{\|u_0e^{j\omega t}\|} \\ &= \frac{\|G(j\omega)u_0\|}{\|u_0\|}\end{aligned}\tag{C.1}$$

com $\| \cdot \|$ a norma Euclidiana. Observe que multiplicando a entrada por um escalar não altera o ganho do sistema, assim

$$\begin{aligned}\min_{u_0} \frac{\|G(j\omega)u_0\|}{\|u_0\|} &\leq \text{Ganho} \leq \max_{u_0} \frac{\|G(j\omega)u_0\|}{\|u_0\|} \\ \text{ou} \min_{\|u_0\|=1} \|G(j\omega)u_0\| &\leq \text{Ganho} \leq \max_{\|u_0\|=1} \|G(j\omega)u_0\|\end{aligned}$$

Não existe uma definição útil de fase para sistemas MIMO. A resposta em frequência de sistemas MIMO é limitada portanto pelo máximo e mínimo ganho do sistema. Seja a decomposição

$$H = Y \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*\tag{C.2}$$

em que $H \in C^{m \times p}$, $Y \in C^{p \times p}$, $U \in C^{m \times m}$ são matrizes unitárias e $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ com $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ e $\min(m, p) \geq r$. As colunas de U são formadas por autovetores ortonormais de H^*H e as colunas de Y por autovetores ortonormais de HH^* .

Notação C.1 $\sigma(H) = \sigma_i : i = 1, \dots, r$, $\sigma_{\max}(H) = \sigma_1$ e $\sigma_{\min}(H) = \sigma_r$.

Pode ser verificado que $\sigma(H) = \max[\lambda_i(H^*H)]^{1/2}$ e $\sigma(H) = \min[\lambda_i(H^*H)]^{1/2}$ com $\lambda(\cdot)$ denotando autovalor.

Definição C.1 Uma matriz $U \in F^{n \times n}$ é dita uma matriz unitária se e só se $U^*U = UU^* = 1_n$. Equivalentemente, as n colunas de U formam uma base ortonormal de F^n , i. e.

$$u_i^*u_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}\tag{C.3}$$

Se $F = R$, a matriz U é chamada ortogonal.

Observação C.1 Matrizes unitárias preservam o produto interno e daqui a norma de vetores: $U \in F^{n \times n}$ é unitária então $\forall x, y \in F^n (Ux, Uy) = (x, y)$ e daqui $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$.

Observação C.2 A matriz H não possui valores singulares zero ($\sigma(H) > 0$) se e só se H tiver posto coluna completo. Quando a matriz H for quadrada tem-se $\sigma_{\min}(H) > 0$ se e só se H for não singular.

C.1 Interpretação da Matriz H como Operador

Sejam

$$\begin{aligned} H : C^p &\mapsto C^m & U &= [U_1 U_2], & U_1 &\in C^{m \times r} \\ u &\mapsto Hu & Y &= [Y_1 Y_2], & Y_1 &\in C^{p \times r} \end{aligned} \quad (C.4)$$

Assim, $H[U_1 U_2] = [Y_1 \Sigma : 0]$ onde $HU_1 = Y_1 \Sigma$ ou $H = Y_1 \Sigma U_1^*$ ou na forma didática

$$H = \sum_{i=1}^r \sigma_i y_i u_i^* \quad (C.5)$$

com u_i e y_i e colunas de U e Y , respectivamente. Os vetores u_i e y_i são chamados vetores singulares à direita e à esquerda de H , respectivamente. Uma vez que U é unitária $u_i^* u_j = \delta_{ij}$ e segue que u_j é mapeado em $\sigma_j y_j$ por H

$$Hu_j = \left(\sum_{i=1}^r \sigma_i y_i u_i^* \right) u_j \quad (C.6)$$

$$= \sigma_j y_j \quad (C.7)$$

então, H rotaciona ($u_j \rightarrow y_j$) e escala ($y_j \rightarrow \sigma_j y_j$). Em R^2 pode-se visualizar graficamente o efeito de H em u na Figura C.1

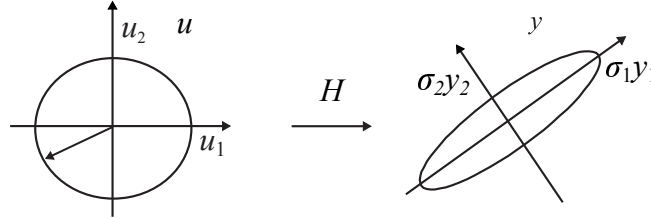


Figura C.1: Interpretação geométrica do valor singular.

Exercício C.1 Mostrar que o valor singular pode ser computado a partir do problema de autovalor, uma vez que σ_i^2 é um autovalor de H^*H , ou seja $H^*Hy_i = \sigma_i^2 y_i$. Sugestão. Utilizar a forma diádica de H e H^* .

O máximo valor singular $\sigma_{\max}(H)$ e o mínimo valor singular $\sigma_{\min}(H)$ desempenham um papel importante na análise e projeto de sistemas de controle multivariáveis.

Lema C.1 $\sigma_{\max}(H)$ e $\sigma_{\min}(H)$ são dados pelas identidades:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}(H) &= \max_{\|u\|=1} \|Hu\| \\ \sigma_{\min}(H) &= \min_{\|u\|=1} \|Hu\|. \end{aligned} \quad (C.8)$$

Para verificar o lema, H pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \|Hu\|^2 &= u^* U \sum Y^* Y \sum U^* u \\ &= x^* \sum^2 x \end{aligned} \tag{C.9}$$

com $x = U^*u$ e usando as propriedades: $\|x\| = \|U^*u\| = \|u\|$ e $\max_{\|u\|=1} \|Hu\| = \max_{\|x\|=1} \|\sum x\|$.

Agora $\|\sum x\|^2 = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 |x_i|^2$, sujeito a $\|x\|^2 = 1$, é maximizado com $x_1 = 1$ e $x_i = 0$ para todo $i \neq 1$ e é minimizado com $x_r = 1$ e $x_i = 0$ para todo $i \neq r$ e então $\sigma_{max}(H) = \max_{\|u\|=1} \|Hu\|$ e $\sigma_{min}(H) = \min_{\|u\|=1} \|Hu\|$.

O ganho do sistema para todas as entradas é menor do que o máximo valor singular $\frac{\|Hu\|}{\|u\|} \leq \sigma_1$. Uma maneira intuitiva de entender este resultado é notando que σ_1 é o máximo ganho sobre o conjunto ortogonal de direções da entrada definido pelos vetores singulares à direita. Assim, o ganho máximo pode ser obtido quando a entrada u é proporcional a u_1 . O cálculo do ganho da matriz para a entrada αu_1 fornece

$$\begin{aligned} \frac{\|H(\alpha u_1)\|}{\|\alpha u_1\|} &= \frac{\|\sum_{i=1}^r \alpha_i y_i u_i^* \alpha u_1\|}{\|\alpha u_1\|} \\ &= \frac{\|\alpha \sigma_1 y_1\|}{\|\alpha u_1\|} \\ &= \frac{|\alpha| \sigma_1 \|y_1\|}{|\alpha| \|u_1\|} \\ &= \frac{|\alpha| \sigma_1}{|\alpha|} = \sigma_1 \end{aligned}$$

uma vez que $\|y_i\| = \|u_i\| = 1$.

Observação C.3 A decomposição de valor singular tem a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} \sigma_{max}(H) &= \|H\| \\ &= \max_{\|u\|=1} \|Hu\| \\ &= \max_{u \neq 0} \frac{\|Hu\|}{\|u\|} \end{aligned}$$

ou seja $\sigma_{max}(H)$ é a norma do operador H induzida pela norma Euclidiana.

C.2 Ganhos de um Sistema Multivariável

Seja $y(t) = G(j\omega)u_0 e^{j\omega t}$. A decomposição de valores singulares da matriz de função de transferência é dada por $G(j\omega) = \sum_{i=1}^r \sigma_i y_i u_i^*$ para cada ω . Os valores singulares em função da frequência são chamados valores principais.

Exercício C.2 Dado o sistema (A, B, C, D) abaixo, obter a matriz de transferência $G(j\omega)$, os ganhos e a norma infinito. Utilizar os comandos:

```
G=ss(A, B, C, D); Gf=tf(G); sigma(G)
normhinf(G):
A=[0 1 0;0 0 1;-4040 -444 -14];
B=[ 1 2;0 1; 0 4]; C=[10 10 0;0 1 0]; D=eye(2);
```


Referências

- Alzate, R., Oliveira, V. A. e Bhattacharyya, S. P. (2015). Analysis and design of PI controllers using stability margins, <http://sistemas.sel.eesc.usp.br/comtec>. Comunicação Técnica, Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade de São Paulo.
- Astrom, K. J. e Hagglund, T. (2006). *Advanced PID Control*, ISA - Instruments, Systems, and Automation Society, Research Triangle Park.
- Astrom, K. e Hagglund, T. (1995). *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*, ISA - Instruments, Systems, and Automation Society, Research Triangle Park.
- Balas, G. J., Doyle, J. C., Glover, K., Packard, A. e Smith, R. (1995). *μ Analysis and Synthesis Toolbox User Guide*, The MathWorks, Inc., Natick, MA.
- Baratieri, C. L. (2011). *Controle de velocidade sensorless de motores brushless de submetidos a variações periódicas de carga*, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Maria.
- Bhattacharyya, S. P., Datta, A. e Keel, L. H. (2009). *Linear Control Theory: Structure, Robustness, and Optimization*, CRC Press, Boca Raton, FL.
- Burl, J. (1999). *Linear Optimal Control: \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Methods*, Addison Wesley Longman, Inc., Menlo Park.
- Castrucci, P. L., Bittar, A. e Sales, R. M. (2011). *Controle Automático*, LTC-livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., Rio de Janeiro.
- Chen, C. T. (1984). *Linear System Theory and Design*, 2a. edn, Oxford University Press, New York.
- Chen, C. T. (1999). *Linear System Theory and Design*, 3a. edn, Oxford University Press, New York.
- Chiang, R. Y. e Safonov, M. G. (1996). *Robust Control Toolbox User Guide*.
- Chong, E. K. P. e Zak, S. H. (1996). *An introduction to optimization*, Wiley-Interscience Publication, New York.
- Cohen, G. H. e Coon, G. H. (1953). Theoretical consideration of retarded control, *Transactions of the ASME* **75**(1): 827–834.
- Cossi, L. (2011). *Introduction to Stability of Quasipolynomials*, IntTech Open Science, Capítulo 1, pp. 1–14. <http://www.intechopen.com/books/time-delay-systems/introduction-to-stability-of-quasipolynomials>.

- Cruz, J. J. (1996). *Controle Robusto Multivariável*, EDUSP, São Paulo.
- Datasheet-6N137 (consulta em 2015). http://www.onsemi.com/pub_link/Collateral/MC33039-D.PDF.
- Datta, A., Ho, M. e Bhattacharyya, S. P. (2000). *Structure and Synthesis of PID Controllers*, Springer Verlag, London.
- Desoer, C. A. (1979). *Teoria Básica de Circuitos*, Guanabara Dois, Rio de Janeiro.
- Dorato, P., Abdallah, C. e Cerone, V. K. J. (1995). *Linear-Quadratic Control: An Introduction*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Dorf, R. C. e Bishop, R. H. (2000). *Modern Control Systems*, Prentice Hall, Menlo Park.
- El'sgol'ts, L. E. e Norkin, S. B. (1973). *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*, Vol. 105 of *Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, London.
- ExtremeToys (consulta em 2015). <http://www.extremetoys.com.br/>.
- Franklin, G. F., Powell, J. D. e Emami-Naeini, A. (1994). *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison Wesley, New York.
- Franklin, G. F., Powell, J. D. e Worman, M. L. (1990). *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison Wesley, New York.
- Gantmacher, F. R. (1959). *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, New York.
- Gantmacher, F. R. (2000). *The Theory of Matrices*, Vol. 2, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- Garcia, C. (2005). *Modelagem e Simulação de Processos Industriais e de Sistemas Eletromecânicos*, 2 edn, EDUSP, São Paulo, Brasil.
- Gayakwad, R. e Sokoloff, L. (1988). *Analog and Digital Control Systems*, Prentice Hall International.
- Geromel, J. C. e Palhares, A. G. B. (2004). *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaio Práticos e Exercícios*, Edgard Blücher Ltda, São Paulo.
- Hang, C., Astrom, K. J. e Ho, W. K. (1991). Refinements of the Ziegler-Nichols formula, *IEE Proceedings-D* **138**(2): 111–117.
- Hermely, E. M. (1996). *Controle por Computador de Sistemas Dinâmicos*, Edgard Blücher, São Paulo.
- Isermann, R. (1989). *Digital Control Systems*, Springer Verlag, Heidelberg.
- Kalman, R. E. (1960). Contributions to the theory of optimal control, *Bol. Soc. Matem. Mexicana* pp. 102–119.
- Khan, B. Z. e Lehman, B. (1996). Setpoint PI controllers for systems with large normalized time, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **4**(4): 459–466.

- Kharitonov, V. L. e Zhabko, A. P. (1994). Robust stability of time delay systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **12**(39): 2388–2397.
- Kilian, C. (1996). *Modern Control Technology: Components and Systems*, West Publishing Co.
- Millman, J. e Halkias, C. (1996). *Eletrônica - Dispositivos e Circuitos*, McGraw Hill do Brasil, São Paulo.
- Moraes, R. N. (2015). Aplicação de dsPIC no acionamento e controle de um motor brushless CC de um carro elétrico, *Trabalho de Conclusão de Curso*. Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade de São Paulo.
- Ogata, K. (1995). *Discrete Time Control Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River.
- Ogata, K. (1997). *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, Upper Saddle River.
- Oguchi, K. e Tomigashi, Y. (1990). Digital control for a magnetic suspension system as an undergraduate project, *International Journal of Electrical Engineering Education* **27**(3): 226–236.
- Oliveira, V. A., Costa, E. F. e Vargas, J. B. (1999). Digital implementation of a magnetic suspension control system for laboratory experiments, *IEEE Transactions on Education* **42**(4): 315–322.
- Paraskevopoulos, P. N. (2002). *Modern Control Engineering*, Marcel Dekker, Basel.
- Pereira, F. (2003). *Microcontroladores PIC Programação em C*, 2a. edn, Erica Ltda, São Paulo, SP.
- Pontryagin, L. (1955). On the zeros of some elementary transcendental functions (English Translation), *American Mathematical Society* **2**: 95–110.
- Safonov, M. (1982). Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems, *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D* **129**(6): 251–256.
- Sakai, K. (2001). *Nonlinear Dynamics and Chaos in Agricultural Systems*, Developments in Agricultural Engineering 12, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands.
- Slotine, J. J. E. e Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Taniguchi, T., Tanaka, K., Ohtake, H. e Wang, H. O. (2001). Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of takagi-sugeno fuzzy systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **9**(4): 525–537.
- Teixeira, M. C. M. e Žak, S. H. (1999). Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models, *IEEE Transactions Fuzzy Systems* **15**(1): 116–132.
- W. Lord, W. e Jackson H, H. (1977). DC servomotors-modeling and parameter determination, *IEEE Transactions on Industry Applications* **IA-13**(3): 234–243.
- Wong, T. H. (1986). Design of a magnetic levitation control system-an undergraduate project, *IEEE Transactions on Education* **29**(4): 196–200.
- Xu, H., Datta, A. e Bhatthacharyya, S. P. (2003). PID stabilization of LTI plants with time-delay, *42nd IEEE Conference on Decision and Control*, Hawaii, USA, pp. 4038–4043.

- Yedamale, P. (2003). An885 - brushless DC (BLDC) motor fundamentals, <http://ww1.microchip.com/downloads/en/AppNotes/00885a.pdf>.
- Zames, G. (1981). Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverse, *IEEE Transactions on Automatic Control* **26**(2): 301–320.
- Zhang, L., Chang, X. e Karimi, H. R. (2014). Fuzzy modeling and control for a class of inverted pendulum system, *Abstract and Applied Analysis* **2014**, **Article ID 936868**.
- Zhou, K. (1998). *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River.
- Zhou, K., Doyle, J. C. e Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River.
- Ziegler, J. G. e Nichols, N. B. (1942). Optimum settings for automatic controllers, *ASME Transactions* **64**: 759–768.

Índice

- Brushless*
 - modelo linear*, 60
- , 11
- Amplificadores operacionais
 - controlador PI, 44
- Amplificador operacionais
 - configuração inversora, 40
 - configuração não inversora, 42
 - controlador avanço e atrasos, 45
 - isolador de efeito de carga, 43
- Amplificadores operacionais, 40
 - controlador PID, 44
 - integradores, 42
- Análise μ , 255, 269
- Aproximação discreta, 167
- Aproximação trapezoidal, 166
- Ação integral, 125

- Constante de tempo, 92
- Controlador avanço e atraso, 190
- Controlador de tempo mínimo, 228, 247
- Controlador PI
 - conjuntos estabilizantes, 79
 - margens de ganho e fase, 187
 - rotina *brushless*, 295
- Controlador PID, 177, 246
 - ajuste manual, 182
 - discreto, 226
 - filtro passa-baixa, 179
 - método Cohen e Coon, 182
 - remoção *windup*, 186
 - resposta em frequência, 180
 - Ziegler-Nichols
 - ensaio degrau, 179
- Controladores Digitais
 - síntese, 226
- Controladores digitais, 225
 - ganhos, 227
- Controle H_∞ com realimentação da saída,
 - 275
- Controle H_∞ com realimentação estado,
 - 275
- Controle com dsPIC, 248
- Controle com PIC, 248
- Controle digital, 157
- Controle motor CC
 - velocidade, 203
- Controle Robusto, 255
- Convolução, 11
- Critério de Nyquist, 142, 145
 - sistemas com atraso, 144
- Critério de Routh-Hurwitz
 - arranjo de Routh, 77

- Descrição entrada-saída, 7
- Diagrama de Nyquist
 - Matlab, 148
- Discretização, 157, 280
- Discretização espaço de estado, 170

- Efeito de perturbações, 125
- Encoder óptico, 206
- Equação característica, 133
- Equação diferencial de ordem n, 8
- Equações a diferença, 10
- Equações a diferença:exemplo, 10
- Equações diferencial-diferença, 36
- Erro de regime, 125
- Erros de regime permanente, 123
- Escolha de matrizes de ponderação, 281
- Espaço de estado, 22
 - equação discreta, 34
 - Sistemas equivalentes, 35
 - transição de estado, 33
- Estabilidade
 - polinômios, 77
 - Routh-Hurwitz, 77
- Estabilização sistema de suspensão, 221
 - componentes de realimentação, 221
- Exemplo circuito RC, 8
- Exemplo de projeto H_∞ , 281

- Figura de Lissajous, 102
- Frequência de cruzamento de fase, 146
- Frequência de cruzamento de ganho, 146
- Frequência do ruído, 216
- Função de transferência, 14
 - discreta, 19
- Função impulso, 11
- Função sensibilidade, 120
- Funções de ponderação, 265

- Implementação LabView, 243
- Integrador *windup*, 186
- Integral de superposição, 12
- Invariância no tempo, 12

- LabView
 - arquivo.vi, 243
- Labview, 2
- Linearização local, 24, 64
 - aproximação de Taylor, 24
 - modelos locais, 29
 - Teixeira Zák, 25
- Lugar das raízes
 - rlocus, 139
- Lugar das raízes, 133
 - Matlab, 138
 - regras de construção, 134

- Mapeamento polos e zeros, 168
- Margem de fase, 145, 146
- Margem de ganho, 145, 146
- Margens de estabilidade
 - condição crítica, 146
- Margens de estabilidade, 145
 - Matlab, 147
- Matlab
 - bode, 110
 - margin, 146
 - nyquist, 149
 - pzmap, 138
 - rlocfind, 139
 - rlocus, 139
- Modelagem de perturbações, 258
- Modelos
 - estufa elétrica, 39
- Modos
 - sistemas contínuos, 17
 - sistemas discretos, 20
- Motor *brushless*, 57
 - acionamento, 208
- Motor CC, 47
 - acionamento, 195
 - acionamento PWM, 196
 - amplificadores chaveados, 196
 - equações, 8
 - modelos, 50
 - parâmetros, 52
- Métodos de discretização, 163

- Observador de estado, 239
 - place, acker*, 241
 - projeto, 240
- ontrole H_2 , 280

- PID
 - ajuste, 179
 - básico discreto, 226
 - sintonia Ziegler-Nichols, 179
 - Ziegler-Nichols
 - resposta ao degrau, 179
 - resposta oscilatória, 180
- Planta aumentada, 265
- Polinômio característico, 15, 133
- Polos e autovalores, 75
- Polos e zeros, 16
- Projeto H_∞ , 274
- PWM, 197
 - operação, 199
- Pêndulo invertido, 27
 - equações, 27
- Pêndulo simples
 - equações, 23
- Pólos, 34
- Pólos e zeros, 138

- Realimentação, 119
- Realimentação de estado, 232
- Regulador quadrático discreto, 235
- Resposta em frequência, 101
- Resposta impulsional, 13, 32
- Resposta invariante ao degrau, 168
- Robustez, 267
- Robustez de desempenho, 267, 271
- Robustez de estabilidade, 269
- Robusto
 - estabilidade, 255
 - funções de ponderação, 264
 - modellagem incerteza, 258
 - rejeição de ruído, 258
 - requisitos de desempenho, 257
 - transformação linear fracionária, 261
- Routh-Hurwitz, 75

- Sensor
 - corrente, 213
 - encoder óptico, 206
 - Hall, 58
 - posição, 213
- Servomecanismo, 241
- Sistema criticamente amortecido, 96
- Sistema de fase não mínima, 149
- Sistema sobreamortecido, 95
- Sistema subamortecido, 96
- Sistemas amostrados, 157
- Sistemas com atraso
 - equação diferencial-diferença, 37
 - neutral, 37
 - quasi-polinômio, 38
 - retardo, 37, 39
- Sistemas de fase não mínima, 149
- Sistemas de segunda ordem, 94
- Sistemas relaxados, 11
- Suspensão magnética, 61, 150, 211, 252
 - modelo, 62
 - parâmetros, 65
 - testes de robustez, 284
- Síntese μ , 278
- Síntese controladores digitais, 225

- Teorema de Hermite-Biehler, 81
- Teorema do valor final, 18
- Teorema do valor inicial, 18
- Teorema dos pequenos ganhos, 270
- Transformada Z, 293
- Transformação de Tustin, 280

- Valor singular, 297

- Zeros, 34

- Índice de desempenho
 - frequência, 106
 - tempo, 97