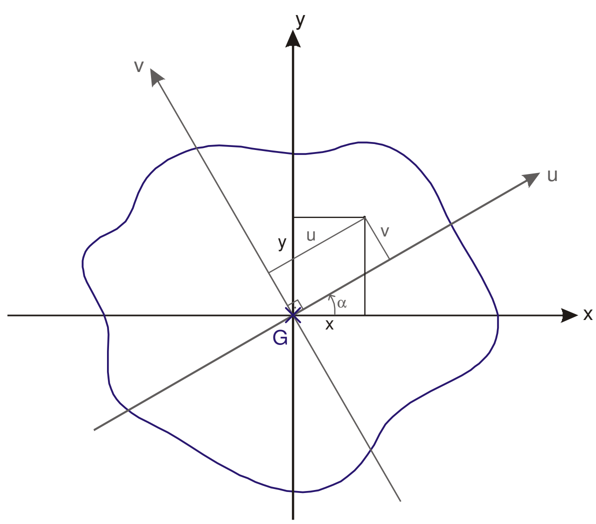
Dedução das expressões dos eixos centrais de inércia e momentos centrais de inércia

Se calcularmos os momentos de inércia para todos os eixos que passam pelo centro de gravidade de uma seção, notaremos que em relação a um destes eixos (eixo 1) o momento de inércia I_1 será máximo e que em relação a outro eixo (eixo 2, ortogonal a 1) o momento de inércia (I_2) será mínimo. Estes dois eixos, denominados eixos centrais de inércia, são os importantes para a Resistência dos Materiais, e os momentos de inércia relativos a eles (I_1 e I_2) são chamados momentos centrais de inércia.

O primeiro passo para determinar os eixos centrais de inércia é analisar a rotação de eixos em uma seção, como feito a seguir.

Rotação de eixos



São conhecidos:	São buscados:
• I_x	• I_u
• I_y	• I_v
• I_{xy}	• I_{uv}

Da figura, tiramos as relações:

$u = x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha$

$v = y \cos\alpha - x \operatorname{sen}\alpha$

Assim I_u, I_v e I_{uv} podem ser calculados:

$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (y\cos\alpha - x sen\alpha)^2 dA = \int_A \left(y^2\cos^2\alpha - 2xy\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha + x^2\mathrm{sen}^2\alpha\right)dA =$$

$$= \cos^2\alpha\int_A y^2 dA - 2\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha\int_A xy\, dA + \mathrm{sen}^2\alpha\int_A x^2 dA = I_x\cos^2\alpha + I_y\mathrm{sen}^2\alpha - 2\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha\, I_{xy}$$

$$\boxed{I_u = I_x\cos^2\alpha + I_y\,\mathrm{sen}^2\alpha - 2\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha\, I_{xy}}$$

Analogamente, para I_v teremos:

$$I_v = \int_A u^2 dA = \cos^2\alpha\, I_y + 2\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha\, I_{xy} + \mathrm{sen}^2\alpha\, I_x$$

$$\boxed{I_v = I_x\,\mathrm{sen}^2\alpha + I_y\cos^2\alpha + 2\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha\, I_{xy}}$$

O produto de inércia em relação aos novos eixos será:

$$I_{uv} = \int_A uv\, dA = \int_A (x\cos\alpha + y\, sen\alpha)(y\cos\alpha - x\, sen\alpha)\, dA =$$
$$= \int_A \left(xy\cos^2\alpha + y^2\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha - x^2\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha - xy\mathrm{sen}^2\alpha\right)dA = \left(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha\right)I_{xy} + \mathrm{sen}\alpha\cos\alpha\left(I_x - I_y\right)$$

$$\boxed{I_{uv} = \left(I_x - I_y\right)\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha + \left(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha\right)I_{xy}}$$

Assim, para determinar os eixos e momentos centrais de inércia, precisamos encontrar um valor do ângulo α que leve o momento de inércia a ser máximo ($I_u = I_1$) ou mínimo ($I_u = I_2$). Para isto, é necessário reescrever I_u, usando as seguintes identidades trigonométricas:

$$\mathrm{sen}\,2\alpha = 2\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$
$$\mathrm{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

Substituindo em $I_u = I_x\cos^2\alpha + I_y\,\mathrm{sen}^2\alpha - 2\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha\, I_{xy}$, teremos:

$$I_u = I_x\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right) + I_y\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right) - \mathrm{sen}2\alpha\, I_{xy} = \frac{I_x + I_y}{2} + \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)\cos 2\alpha - I_{xy}\mathrm{sen}2\alpha$$

Podemos ainda reescrever I_u como:

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + f(\alpha), \quad \text{onde:} \quad f(\alpha) = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)\cos 2\alpha - I_{xy}\text{sen}2\alpha$$

Como o primeiro termo de I_u é constante, basta encontrar o máximo e o mínimo de f(α) para se conhecer máx I_u e mín I_u. Devemos, portanto, analisar a variação da função f(α).

Estudo da variação do binômio: A senφ + B cosφ

O binômio Asenφ + Bcosφ pode ser reescrito como:

$$\boxed{A\text{sen}\varphi + B\cos\varphi = \sqrt{A^2 + B^2}\,\cos(\varphi - \theta)}$$

$$\text{onde:} \quad \left.\begin{aligned} \text{sen}\theta &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ \cos\theta &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}\right\} \quad \text{tg}\theta = \frac{A}{B}$$

De fato, podemos comprovar que a relação é verdadeira substituindo A e B:

$$A = \sqrt{A^2 + B^2}\,\text{sen}\theta \qquad B = \sqrt{A^2 + B^2}\,\cos\theta$$

$$A\text{sen}\varphi + B\cos\varphi = \sqrt{A^2 + B^2}\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi + \sqrt{A^2 + B^2}\,\cos\theta\cos\varphi = \sqrt{A^2 + B^2}\,\cos(\varphi - \theta)$$

Dividindo a última equação por $\sqrt{A^2 + B^2}$, temos:

$\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi + \cos\theta\cos\varphi = \cos(\varphi - \theta)$, o que, da Trigonometria, comprova a validade da escrita alternativa do binômio.

Já provado que podemos escrever o binômio como $\sqrt{A^2 + B^2}\,\cos(\varphi - \theta)$, voltemos à busca pelos máximos e mínimos.

Se $\cos(\varphi - \theta) = 1$, então: $\text{máx}\,(A\text{sen}\varphi + B\cos\varphi) = \sqrt{A^2 + B^2}$

$\varphi - \theta = 0 \Rightarrow \varphi = \theta$

Agora, se $\cos(\varphi - \theta) = -1$, então: $\text{mín}\,(A\text{sen}\varphi + B\cos\varphi) = -\sqrt{A^2 + B^2}$

$\varphi - \theta = 180º \Rightarrow \varphi = \theta + 180º$

Determinação dos eixos e momentos centrais de inércia

Se notarmos que a função f(α) é um binômio do tipo Asenφ + Bcosφ, podemos usar os resultados da análise do binômio para obter o máximo e o mínimo de f(α) e, consequentemente, I_1 e I_2.

Busquemos, primeiramente, o máximo momento de inércia (I_1).

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + f(\alpha) \qquad\qquad f(\alpha) = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)\cos 2\alpha - I_{xy}\mathrm{sen}2\alpha = A\mathrm{sen}\varphi + B\cos\varphi$$

$$\left.\begin{aligned} A &= -I_{xy} \\ B &= \frac{I_x - I_y}{2} \\ \varphi &= 2\alpha \end{aligned}\right\} \text{ máx } f(\alpha) = \sqrt{{I_{xy}}^2 + \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2}$$

$$\therefore \text{ máx } I_u = I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + {I_{xy}}^2}$$

$$\alpha_1 = \frac{\varphi}{2} \Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha_1 = \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} = \mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}$$

Usamos, então, as seguintes identidades trigonométricas:

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2} = 1 - 2\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

$$\mathrm{sen}\,\theta = 2\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{1-\cos\theta}{\mathrm{sen}\theta} = \frac{2\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}}{2\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \mathrm{tg}\frac{\theta}{2} \quad \therefore \ \mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\mathrm{sen}\theta}$$

Assim: $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \mathrm{tg}\,\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{\mathrm{sen}\theta} = \dfrac{1-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}} = \dfrac{\sqrt{A^2+B^2} - B}{A}$

Substituindo A e B, teremos:

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + {I_{xy}}^2} - \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)}{-I_{xy}} = \frac{I_x - I_1}{I_{xy}}$$

$$\boxed{I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \qquad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{I_x - I_1}{I_{xy}}}$$

Agora, finalmente, determinemos o mínimo momento de inércia (I_2).

Através de raciocínio análogo, concluímos que:

$$\text{mín } I_u = I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} + \text{mín } f(\alpha) = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{\varphi}{2} = \frac{\theta + 180^\circ}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\frac{\theta + 180^\circ}{2} = \frac{\operatorname{sen}\left(\theta/2 + 90^\circ\right)}{\cos\left(\theta/2 + 90^\circ\right)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(\theta/2\right)\cos(90^\circ) + \operatorname{sen}(90^\circ)\cos\left(\theta/2\right)}{\cos\left(\theta/2\right)\cos(90^\circ) - \operatorname{sen}\left(\theta/2\right)\operatorname{sen}(90^\circ)} = \frac{\cos\left(\theta/2\right)}{-\operatorname{sen}\left(\theta/2\right)} = -\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2} \quad \therefore \operatorname{tg}\alpha_2 = -\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}$$

Da determinação de tg α_1, sabemos que:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Fazemos, então, algumas manipulações algébricas, como segue.

$$-\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} = -\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}\right) = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}\frac{(1 + \cos\theta)}{(1 + \cos\theta)} = \frac{-\operatorname{sen}\theta\,(1 + \cos\theta)}{1 - \cos^2\theta} = \frac{-\operatorname{sen}\theta\,(1 + \cos\theta)}{\operatorname{sen}^2\theta} =$$

$$= \frac{-(1 + \cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta} \quad \therefore \; -\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2} = -\left(\frac{1 + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = -\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2} = -\left(\frac{1 + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right) = -\left(\frac{\sqrt{A^2 + B^2} + B}{A}\right) = -\left[\frac{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} + \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)}{-I_{xy}}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} + \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)}{I_{xy}} = \frac{I_x - I_2}{I_{xy}}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{I_x - I_2}{I_{xy}}}$$

Observação:

O momento de inércia é positivo em relação a qualquer eixo, e dentre os eixos que passam pelo centro de gravidade de uma seção é mínimo para o eixo 2. Assim, I_x é sempre maior ou igual a I_2. Portanto, o sinal do produto de inércia I_{xy} da seção (positivo ou negativo) determina em que quadrantes estão as direções dos eixos 1 e 2, conforme ilustrado na figura abaixo.