ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E FUNDAÇÕES

PEF 125 - RESISTÊNCIA DOS MATEIRAIS E ESTA BILIDADE DAS CONSTRUÇÕES I.

TRAÇÃO E COMPRESSÃO SIMPLES.

Luiz Antonio Cortese Diogo

São Paulo

2000

TRAÇÃO E COMPRESSÃO SIMPLES.

O ENSAIO DE TRAÇÃO OU DE COMPRESSÃO SIMPLES.

Quando se submete uma barra prismática, como a que se mostra na fig., a ensaio de tração, as seções transversais que limitam o segmento de dimensão L permanecem planas e se afastam de ΔL, de modo que é possível definir a grandeza ε - denominada *deformação longitudinal* - da seguinte maneira:

$$\varepsilon = \frac{(L + \Delta L) - L}{L} = \frac{\Delta L}{L} \qquad (1)$$

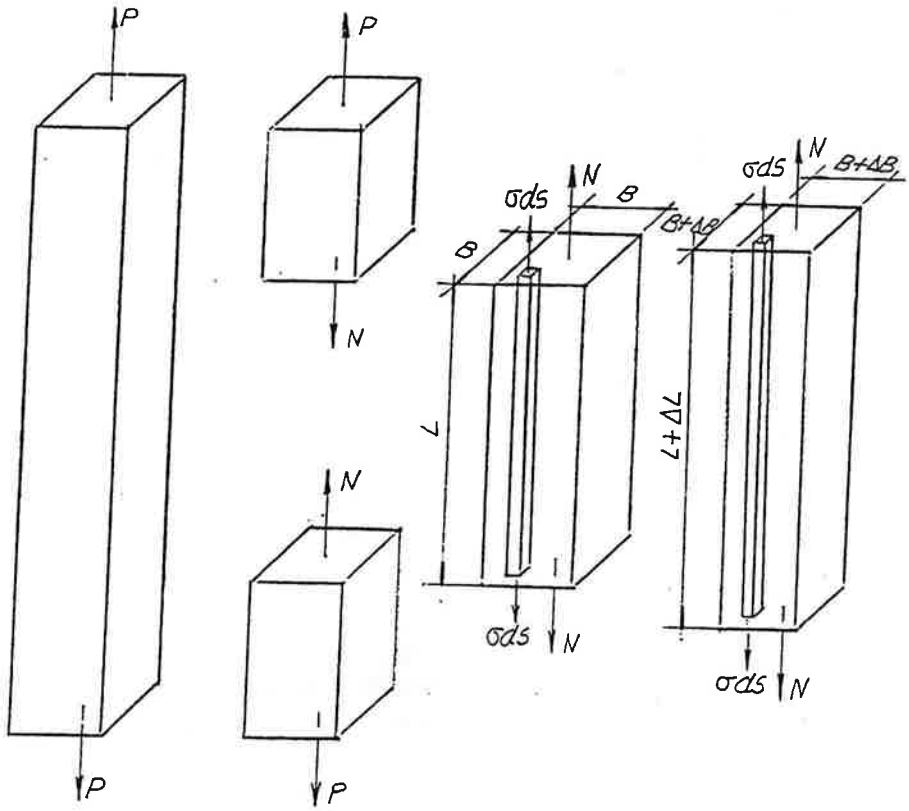
Ao mesmo tempo, a dimensão B da seção transversal varia ΔB, de modo que é possível definir a grandeza ε_T - denominada *deformação transversal* - da seguinte maneira:

$$\varepsilon_T = \frac{(B + \Delta B) - B}{B} = \frac{\Delta B}{B} \qquad (2)$$

Como se verá adiante, a um alongamento longitudinal corresponde um encurtamento transversal, e vice-versa.

A força normal N, responsável pelo equilíbrio dos segmentos externos, é dada por:

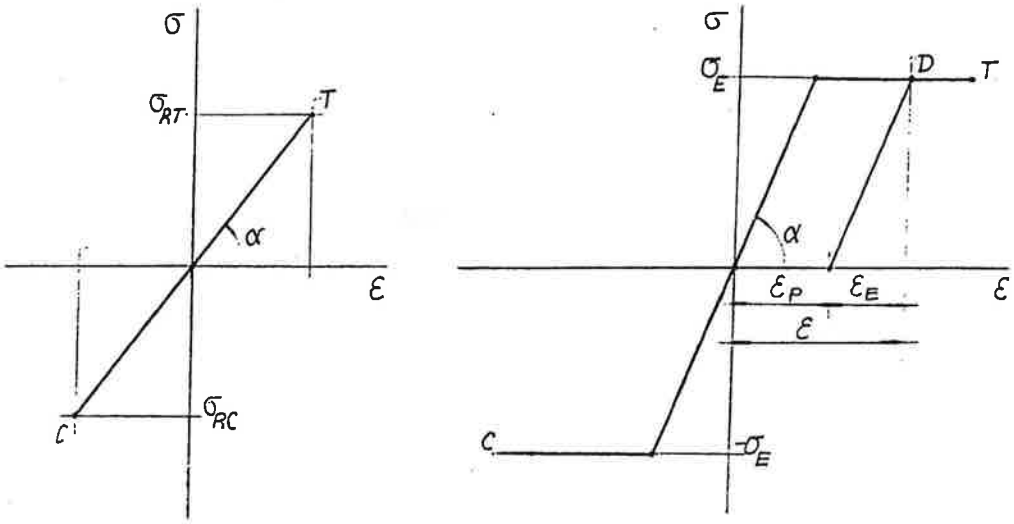
$$N = P \qquad (3)$$



Uma vez que as seções planas mantêm-se planas, as infinitas fibras que compõem o segmento de dimensão L , solicitadas por forças $dN = \sigma dS$ em suas extremidades, apresentam a mesma deformação ε. Em consequência, é possível admitir a constância de σ, de modo que:

$$N = \int \sigma dS = \sigma \int dS = \sigma S \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{N}{S} = \frac{P}{S} \tag{4}$$

Para cada valor de P pode-se determinar a deformação ε com a expressão (1) e a tensão σ com a expressão (4), e, assim, determinar o diagrama $\sigma \times \varepsilon$ para o material de que é composta a barra.



Dois tipos básicos de comportamento são apresentados na fig..

O comportamento elasto-frágil é caracterizado pela proporcionalidade entre tensões e deformações, isto é:

$$\sigma = \text{tg}\alpha \; \varepsilon = E\varepsilon \tag{5}$$

one E é o *módulo de elasticidade* do material.

A expressão anterior - denominada *lei de Hooke* - é válida até que se atinja, no ensaio de tração, a *tensão de ruptura à tração* σ_{RT}, e, no ensaio de compressão, a *tensão de ruptura à compressão* σ_{RC}.

Substituindo na expressão anterior os valores de σ e ε, dados pelas expressões (4) e (1), obtém-se:

$$\Delta L = \frac{PL}{ES} \tag{6}$$

A expressão anterior mostra que, para um mesmo valor de P, quanto maior for a grandeza ES - denominada *rigidez longitudinal* - tanto menor é a variação de comprimento ΔL.

Para cada material, a deformação transversal é dada por:

$$\varepsilon_T = -\nu\varepsilon \tag{7}$$

onde ν é o *coeficiente de Poisson.*

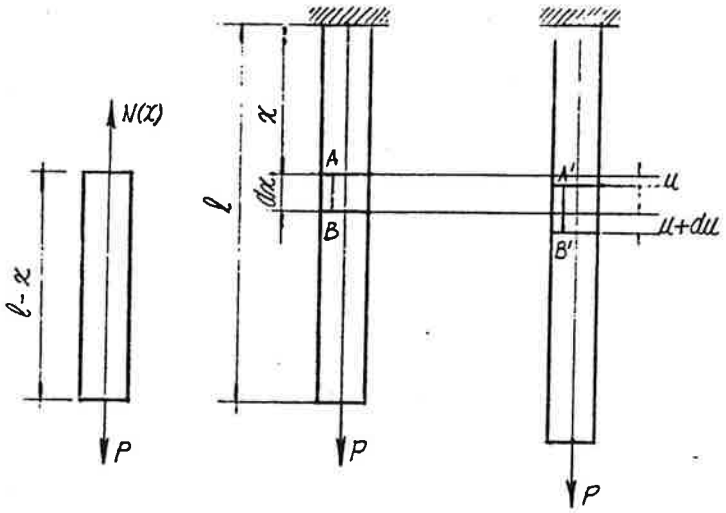
O comportamento elasto-plástico é caracterizado pela proporcionalidade entre tensões e deformações até que se atinja a *tensão de escoamento* σ_E, cujo valor absoluto é o mesmo tanto no ensaio de tração como no de compressão. Atingido o valor σ_E, dá-se o escoamento do material, isto é, o aumento progressivo de deformação sob tensão constante, até que sobrevenha a ruptura. Se, atingido o ponto D, se procede ao descarregamento, este se dá segundo uma reta paralela à reta correspondente ao carregamento, de modo que, quando $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_P$. Assim, a deformação total ε pode ser considerada como a soma da *deformação elástica* ε_E (recuperável no descarrega-mento) e da *deformação plástica* ε_P (não recuperável no descarregamento).

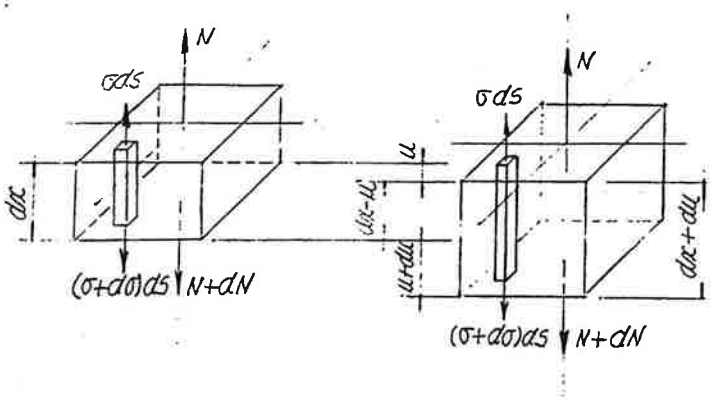
TENSÕES, DEFORMAÇÕES E DESLOCAMENTOS NA TRAÇÃO OU COMPRESSÃO SIMPLES.

Considere-se uma barra, como a que se mostra na fig., submetida à ação do peso próprio e da força P. A força normal em uma seção caracterizada pela coordenada x é responsável pelo equilíbrio do segmento de dimensão $(l - x)$, isto é,

$$N = P + \gamma S(l - x) \tag{1}$$

onde γ é o peso próprio do material.





Deve-se notar que os esforços solicitantes, normalmente indicados na configuração indeformada, são simultâneos à deformação e deveriam, a rigor, ser indicados na configuração deformada. Entretanto, visto que as deformações são pequenas, a configuração deformada pode ser confundida - quando se escrevem as equações de equilíbrio, mediante as quais se calculam os esforços solicitantes - com a configuração indeformada.

À força nornal N corresponde a tensão normal σ, dada por:

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{P}{S} + \gamma(l - x) \tag{2}$$

de modo que

$$\frac{d\sigma}{dx} = -\gamma \tag{3}$$

Considere-se, em seguida, um segmento de comprimento dx na *configuração indeformada* (anterior à aplicação do carregamento externo), e na *configuração deformada* (posterior à aplicação do carregamento externo), caracterizada pelo deslocamento longitudinal das seções transversais, as quais se mantêm planas.

A fibra genérica AB passa a ocupar a posição A'B', uma vez que os pontos da seção transversal caracterizada pela coordenada x têm deslocamento longitudinal u, enquanto os pontos da seção transversal caracterizada pela coordenada $x + dx$ têm deslocamento longitudinal $u + du$.

A deformação da fibra AB é dada por:

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} \tag{4}$$

onde:

$$AB = dx \qquad A'B' = dx + (u + du) - u = dx + du \tag{5}$$

de modo que:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \tag{6}$$

A fibra AB de seção transversal dS é solicitada nas extremidades pelas forças σdS e $(\sigma + d\sigma)dS$ que, juntamente com o peso próprio $\gamma dSdx$, satisfazem o equilíbrio, isto é,

$$(\sigma + d\sigma)dS + \gamma dSdx = \sigma dS \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{dx} = -\gamma \tag{7}$$

A tensão σ é dada, segundo a lei de Hooke, por:

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{du}{dx} \tag{8}$$

A força normal N na seção caracterizada pela coordenada x é dada por:

$$N = \int \sigma dS = \int E\frac{du}{dx}dS = E\frac{du}{dx}\int dS = ES\frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{N}{ES} \tag{9}$$

Integrando a expressão anterior, obtém-se:

$$u(x) = u_0 + \int \frac{N(x)}{ES} dx \tag{10}$$

onde u_0 é o deslocamento em $x = 0$.

A expressão anterior é válida para o caso de barras de seção variável, isto é, $ES = ES(x)$.

Considerando na expressão anterior a força normal N dada pela expressão (1), obtém-se:

$$u(x) = \frac{Px}{ES} + \frac{\gamma S}{ES}(lx - \tfrac{1}{2}x^2) \tag{11}$$

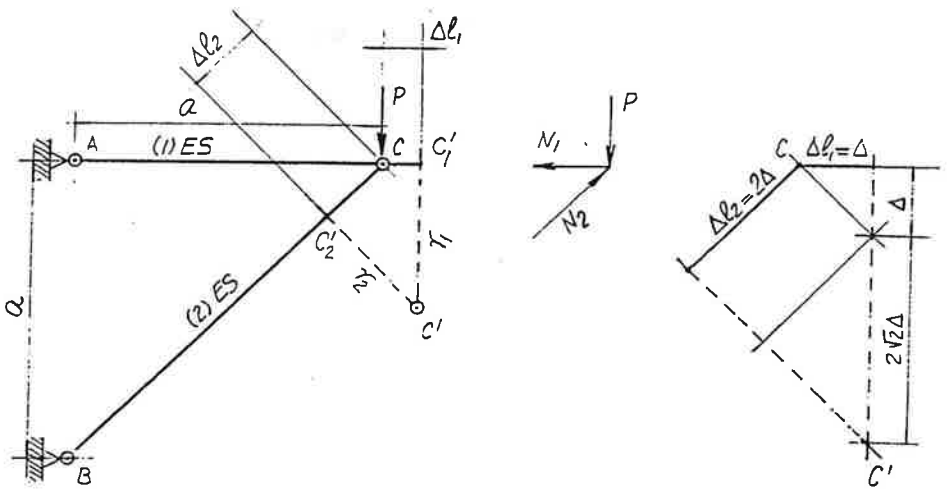
DESLOCAMENTOS DOS NÓS DE TRELIÇAS ISOSTÁTICAS.

1. CONCEITOS FUNDAMENTAIS.

As três parcelas - translação, deformação e rotação - que compõem o movimento de uma barra genérica de uma treliça, e apartir das quais se calculam os deslocamentos nodais, são apresentadas nos dois exemplos seguintes.

EXEMPLO 1.

Determinar o deslocamento horizontal u_C e o deslocamento vertical v_C do ponto C da estrutura da figura.



O equilíbrio do nó C permite determinar as forças normais N_1 e N_2, isto é:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_1 = \sqrt{2}/2\, N_2 \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow \sqrt{2}/2\, N_2 = P\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} N_1 = P & (T) \\ N_2 = \sqrt{2}P & (C)\end{array}\right. \qquad (A)$$

O alongamento Δl_1 correspondente à força normal de tração N_1 e o encurtamento Δl_2 correspondente à força normal de compressão N_2, são dados por:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{ES_1} = \frac{Pa}{ES} = \Delta \quad (A) \qquad (B')$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{ES_2} = 2\frac{Pa}{ES} = 2\Delta \quad (E) \qquad (B'')$$

Por pertencer à barra 1, o ponto C, em decorrência do alongamento Δl_1, passa a ocupar a posição C_1'; em seguida, em decorrência da rotação da barra 1 em torno do ponto A, descreve o arco de círculo de raio $l_1 + \Delta l_1$, que pode ser confundido com a reta r_1, perpendicular ao raio AC_1'.

Por pertencer à barra 2, o ponto C, em decorrência do encurtamento Δl_2, passa a ocupar a posição C_2' ; em seguida, em decorrência da rotação da barra 2 em torno do ponto B, descreve o arco de círculo de raio $l_2 - \Delta l_2$, que pode ser confundido com a reta r_2, perpendicular ao raio BC_2'.

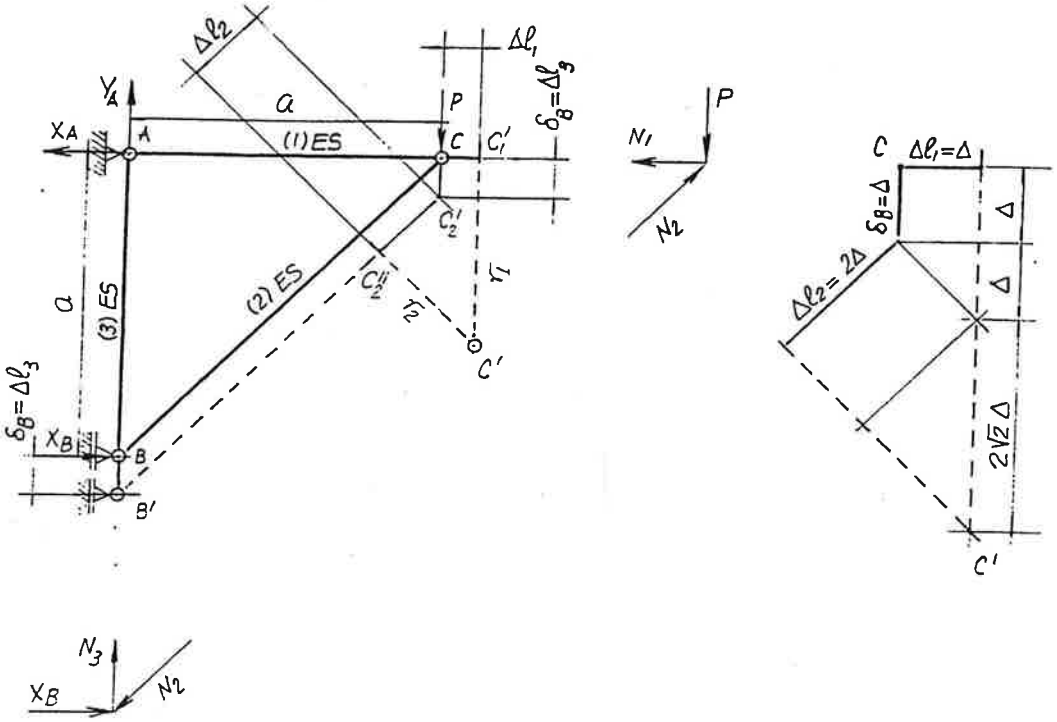
Como o ponto C pertence simultaneamente às barras 1 e 2 , segue-se que a posição final C' corresponde à interseção das retas r_1 e r_2.

De acordo com a fig., tem-se:

$$u_C = \Delta = \frac{Pa}{ES} \qquad v_C = (1+2\sqrt{2})\Delta = (1+2\sqrt{2})\frac{Pa}{ES} \qquad \text{(C)}$$

EXEMPLO 2.

Determinar o deslocamento horizontal u_C e o deslocamento vertical v_C do ponto C da estrutura da figura.



As forças normais N_1 e N_2 (obtidas mediante o equilíbrio do nó C), bem como a força normal N_3 (obtida mediante o equilíbrio do nó B), são dadas por:

$$N_1 = P \quad \text{(T)} \qquad N_2 = \sqrt{2}P \quad \text{(C)} \qquad N_3 = P \quad \text{(T)} \qquad \text{(A)}$$

O alongamento Δl_1, o encurtamento Δl_2 e o alongamento Δl_3 são dados por:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{ES_1} = \frac{Pa}{ES} = \Delta \quad \text{(A)} \qquad \text{(B')}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{ES_2} = 2\frac{Pa}{ES} = 2\Delta \quad (E) \qquad (B'')$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{ES_3} = \frac{Pa}{ES} = \Delta \quad (A) \qquad (B''')$$

Por pertencer à barra 1, a situação do ponto C é a mesma do caso anterior.

Por pertencer à barra 2, o ponto C, em decorrência do desdocamento $v_B = \Delta l_3$ do ponto B, passa a ocupar a posição C_2'; em seguida, em decorrência do encurtamento Δl_2, passa a ocupar a posição C_2''; finalmente, em decorrência da rotação da barra 2 em torno do ponto B', descreve o arco de círculo de raio $l_2 - \Delta l_2$, que pode ser confundido com a reta r_2, perpendicular ao raio $B'C_2''$.

Mais uma vez, como o ponto C pertence simultaneamente às barras 1 e 2, segue-se que a posição final C' corresponde à interseção das retas r_1 e r_2.

De acordo com a fig., tem-se:

$$u_C = \Delta = \frac{Pa}{ES} \qquad v_C = 2(1+\sqrt{2})\Delta = 2(1+\sqrt{2})\frac{Pa}{ES} \qquad (C)$$

2. O DIAGRAMA DE WILLIOT.

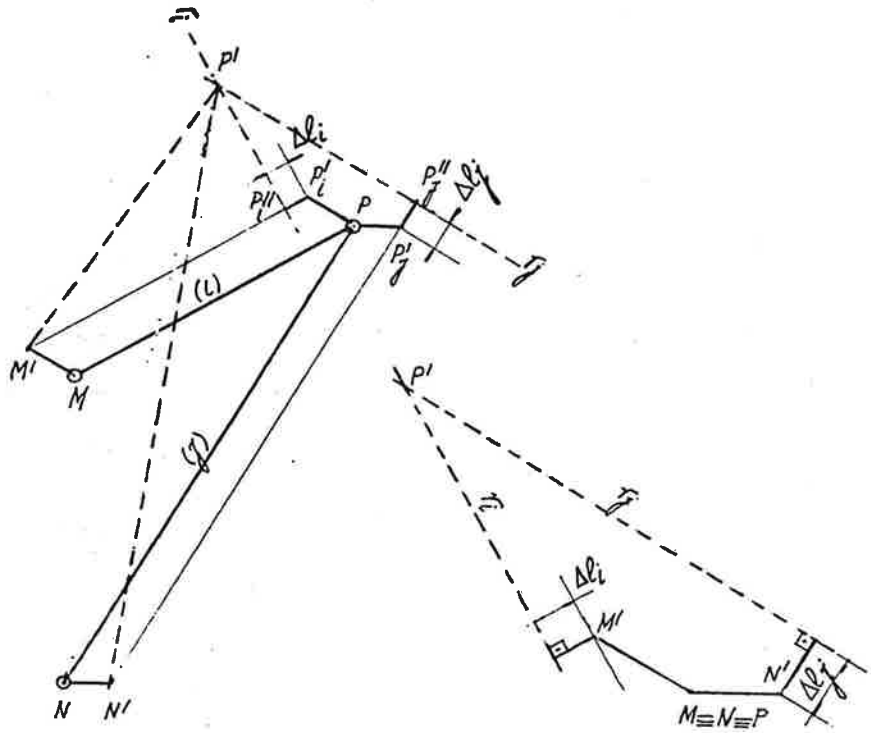
Os exemplos anteriores permitem estabelecer, como se mostra na fig., a seguinte generalização: dado um ponto P ligado pelas barras i e j aos pontos M e N, cujas posições na configuração deformada M'e N' tenham sido previamente determinadas, obtém-se a posição P', da seguinte maneira:

Por pertencer à barra i, o ponto P, em decorrência do desdocamento δ_M do ponto M, passa a ocupar a posição P_i'; em seguida, em decorrência do alongamento ou encurtamento Δl_i da barra i, passa a ocupar a posição P_i''; finalmente, em decorrência da rotação da barra i em torno do ponto M', descreve o arco de círculo de raio $l_i \pm \Delta l_i$, que pode ser confundido com a reta r_i, perpendicular ao raio $M'P_i''$.

Considerado como pertencente à barra j, o ponto P, em decorrência do desdocamento δ_N do ponto N, passa a ocupar a posição P_j'; em seguida, em decorrência do alongamento ou encurtamento Δl_j da barra j, passa a ocupar a posição P_j''; finalmente, em decorrência da rotação da barra j em torno do ponto N', descreve o arco de círculo de raio $l_j \pm \Delta l_j$, que pode ser confundido com a reta r_j, perpendicular ao raio $N'P_j''$.

Como o ponto P pertence simultaneamente às barras i e j, segue-se que a posição final P' corresponde à interseção das retas r_i e r_j.

No diagrama de Williot, a posição inicial de cada um dos nós é representada por um único ponto, isto é, A=B=...M=N=P=....

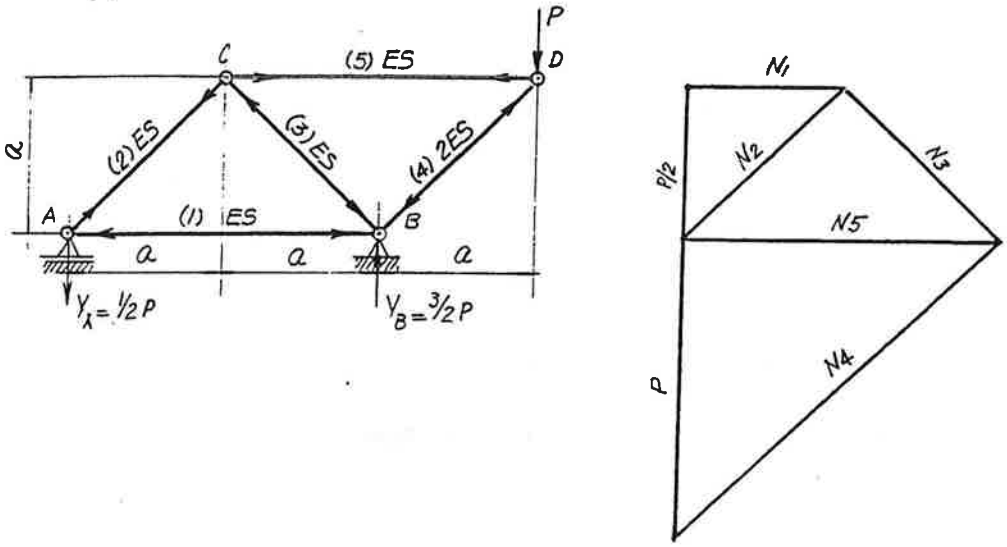


Suponha-se que tenham sido determinadas as posições finais M' e M'' dos pontos M e N. Como os segmentos PP_i' e MM' têm o mesmo tamanho e a mesma direção, basta considerar a partir de M' o alongamento ou encurtamento Δl_i segundo a direção da barra i ; da mesma forma, como o segmento PP_j' e NN' têm o mesmo tamanho e a mesma direção, basta considerar a partir de N' o alongamento ou encurtamento Δl_j segundo a direção da barra j.

No exemplo da fig., Δl_i é encurtamento e Δl_j é alongamento.

EXEMPLO 1.

Determinar o deslocamento horizontal u_D e o deslocamento vertical v_D do ponto D da treliça da fig.

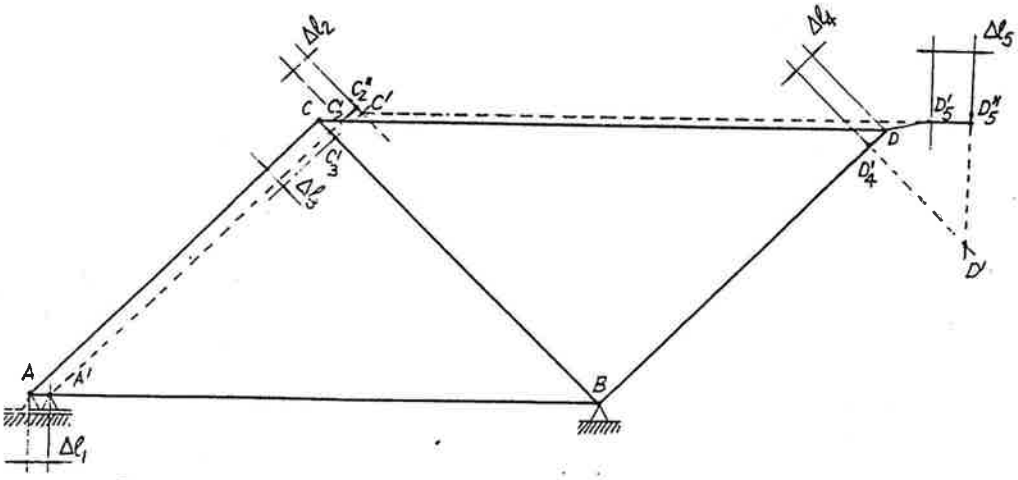


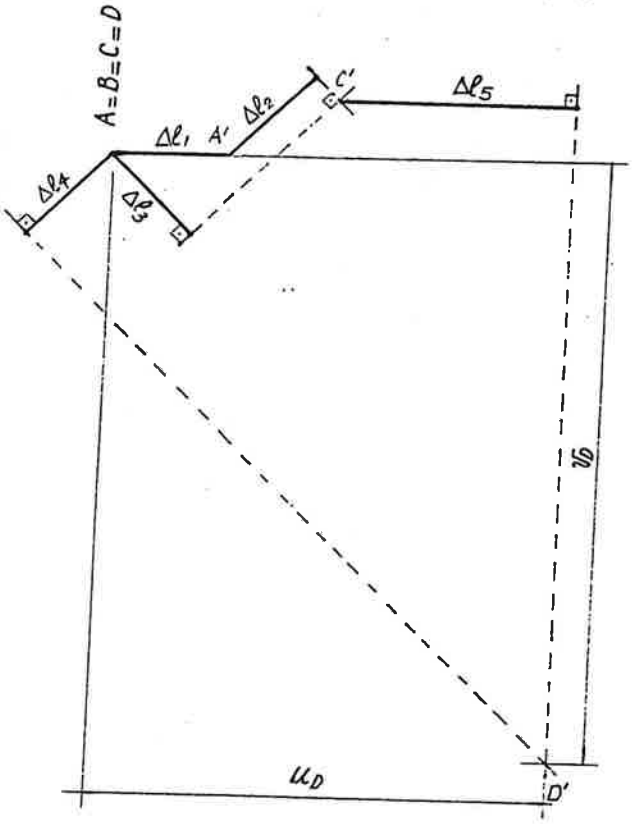
Determinadas as forças normais (por exemplo, mediante o diagrama de Cremona que se mostra na fig.), determinam-se os alongamentos e encurtamentos da tabela seguinte, a partir dos quais se constrói o diagrama de Williot.

BARRA	l_i	ES_i	N_i	$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{ES_i}$
1	2a	ES	$\frac{1}{2}P$ (C)	$\frac{Pa}{ES} = \Delta$ (E)
2	$\sqrt{2}a$	ES	$\frac{\sqrt{2}}{2}P$ (T)	$\frac{Pa}{ES} = \Delta$ (A)
3	$\sqrt{2}a$	ES	$\frac{\sqrt{2}}{2}P$ (C)	$\frac{Pa}{ES} = \Delta$ (E)
4	$\sqrt{2}a$	2ES	$\sqrt{2}P$ (C)	$\frac{Pa}{ES} = \Delta$ (E)
5	2a	ES	P(T)	$2\frac{Pa}{ES} = 2\Delta$ (A)

Do diagrama de Williot, indicado na fig., resulta:

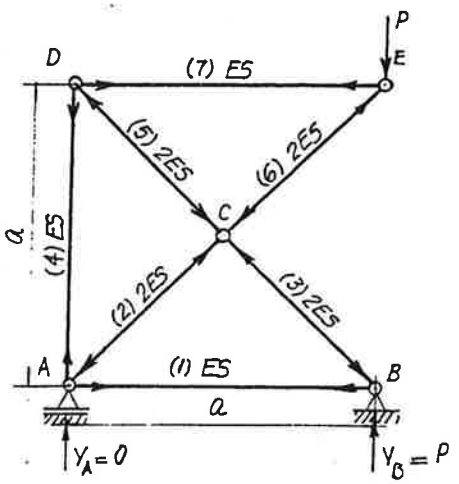
$$u_C = 3.9\Delta = 3.9\frac{Pa}{ES} \qquad v_C = 5.3\Delta = 5.3\frac{Pa}{ES}$$

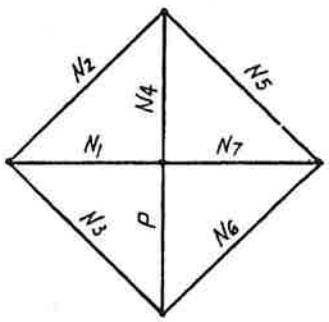

Δl2
C
C2
C2*
C'
C'3
Δl3
Δl4
Δl5
D
D'5
D5*
D'4
D'
A
A'
B
Δl1


A=B=C=D
Δl1
A'
Δl2
C'
Δl5
Δl4
Δl3
vD
uD
D'

EXEMPLO 2.

Determinar o deslocamento horizontal u_E e o deslocamento vertical v_E do ponto E da treliça da fig.



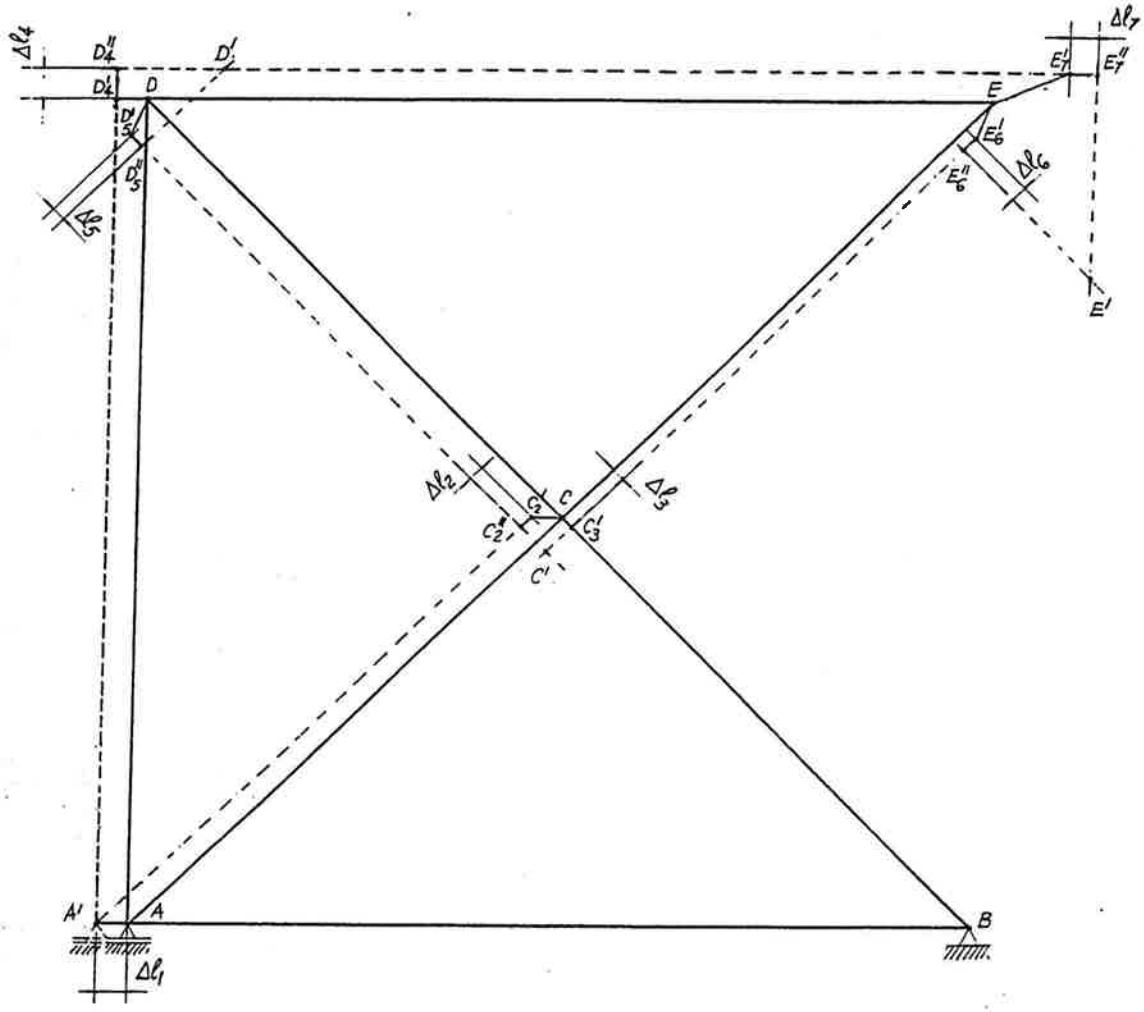


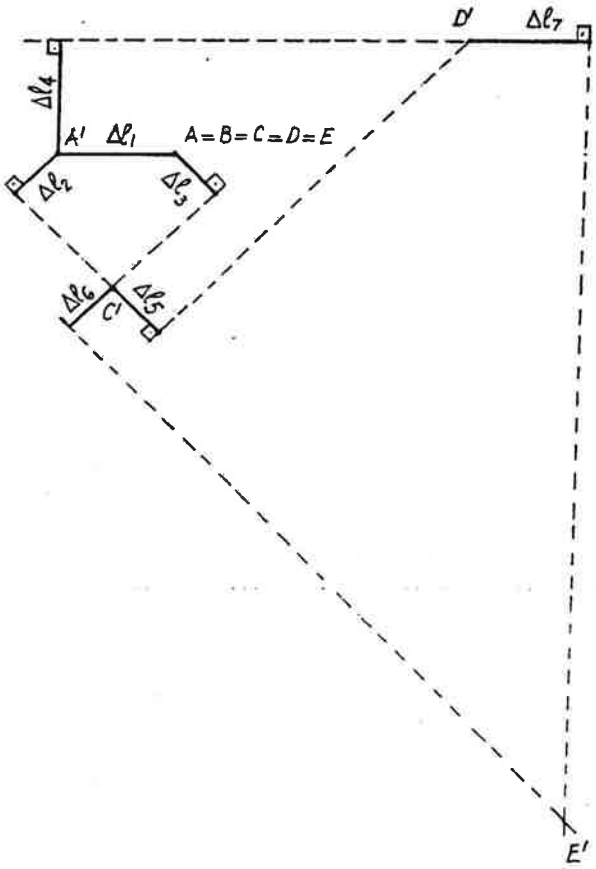
Determinadas as forças normais (por exemplo, mediante o diagrama de Cremona que se mostra na fig.), determinam-se os alongamentos e encurtamentos da tabela seguinte, a partir dos quais se constrói o diagrama de Williot.

BARRA	l_i	ES_i	N_i	$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{ES_i}$
1	a	ES	P (T)	$\frac{Pa}{ES} = \Delta$ (A)
2	$\sqrt{2}/2$ a	2ES	$\sqrt{2}$P (C)	$\frac{1}{2}\frac{Pa}{ES} = \frac{\Delta}{2}$ (E)
3	$\sqrt{2}/2$ a	2ES	$\sqrt{2}$P (C)	$\frac{1}{2}\frac{Pa}{ES} = \frac{\Delta}{2}$ (E)
4	a	ES	P (T)	$\frac{Pa}{ES} = \Delta$ (A)
5	$\sqrt{2}/2$ a	2ES	$\sqrt{2}$P (C)	$\frac{1}{2}\frac{Pa}{ES} = \frac{\Delta}{2}$ (E)
6	$\sqrt{2}/2$ a	2ES	$\sqrt{2}$P (C)	$\frac{1}{2}\frac{Pa}{ES} = \frac{\Delta}{2}$ (E)
7	a	ES	P (T)	$\frac{Pa}{ES} = \Delta$ (A)

Do diagrama de Williot, indicado na fig, resulta:

$$u_C = 3.5\Delta = 3.5\frac{Pa}{ES} \qquad v_C = 5.8\Delta = 5.8\frac{Pa}{ES}$$

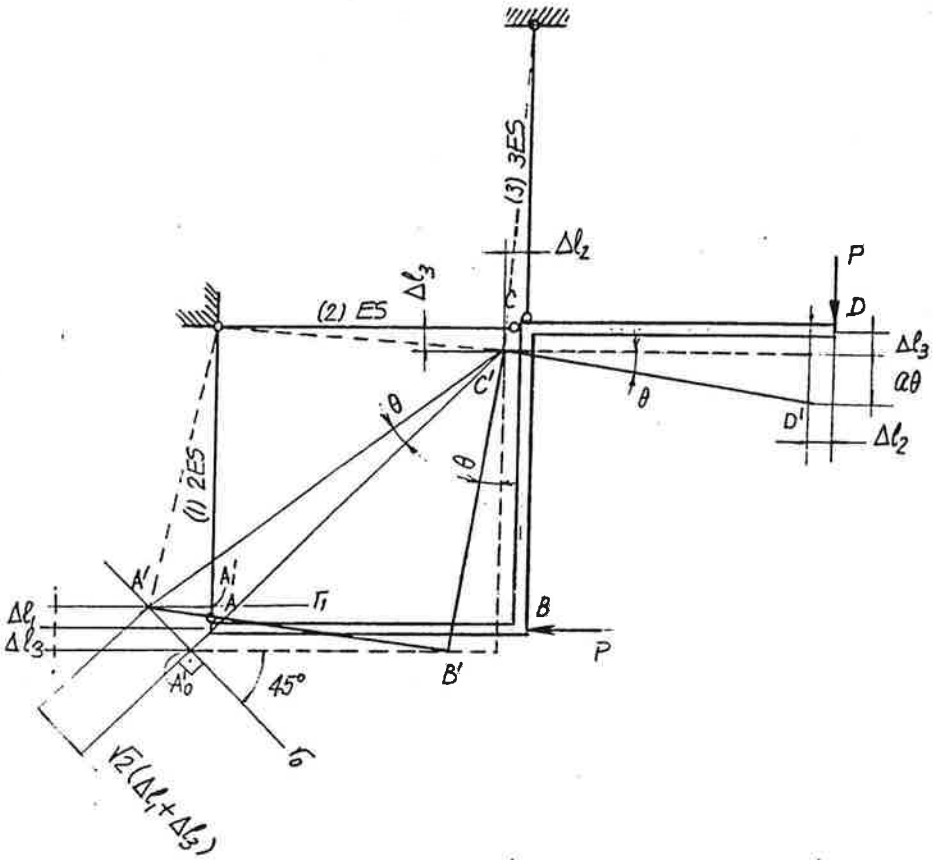

Δl4
D4''
D4'
D'
D
D5'
D5''
Δl5
Δl7
E7'
E7''
E
E6'
E6''
Δl6
E'
Δl2
C2
C
C2'
C3'
Δl3
C'
A'
A
B
Δl1

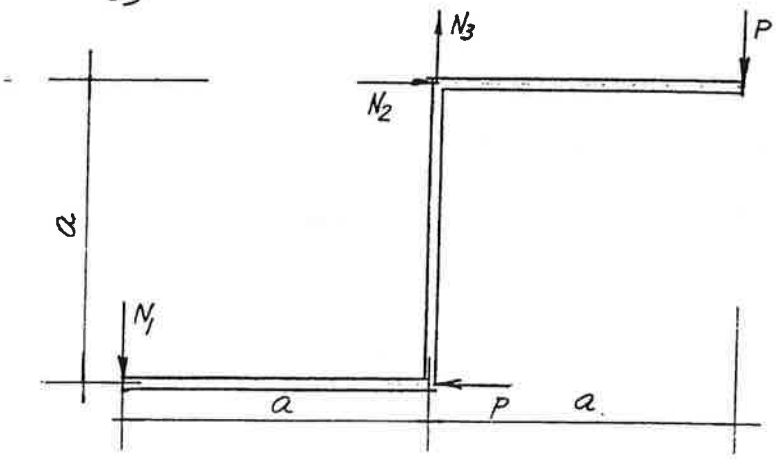

D'
Δl7
Δl4
A'
Δl1
A=B=C=D=E
Δl2
Δl3
Δl6
C'
Δl5
E'

3. ESTRUTURAS COM BARRA RÍGIDA.

EXEMPLO.

Determinar o deslocamento horizontal u_D e o deslocamento vertical v_D do ponto D da estrutura da fig.





Considerando o equilíbrio da barra rígida, determinam-se as forças normais de compressão N_1 e N_2, bem como a força normal de tração N_3, dadas por:

$$N_1 = 2P \qquad N_2 = P \qquad N_3 = 3P \qquad \text{(A)}$$

às quais correspondem os encurtamentos Δl_1 e Δl_2, bem como o alongamento Δl_3, dados por:

$$\Delta l_1 = \frac{Pa}{ES} \qquad \Delta l_2 = \frac{Pa}{ES} \qquad \Delta l_3 = \frac{Pa}{ES} \tag{B}$$

A translação da barra rígida é caracterizada pelo deslocamento do ponto C, que se obtém considerando o ponto C como pertencente simultaneamente às barras 2 e 3.

De acordo com a fig.,

$$u_C = \Delta l_2 = \frac{Pa}{ES} \qquad v_C = \Delta l_3 = \frac{Pa}{ES} \tag{C}$$

A rotação da barra rígida em torno do ponto C' é caracterizada pelo ângulo θ, determinado a partir do deslocamento do ponto A, que se obtém considerando o ponto A como pertencente simultaneamente à barra rígida e à barra 1.

Por pertencer à barra rígida , o ponto A, em consequência da translação, passa a ocupar a posição A_0'; em seguida, em decorrência da rotação em torno do ponto C', descreve um círculo de raio $A_0'C'$, que se confunde com a reta r_0.

Por pertencer à barra 1, o ponto A, em consequência do encurtamento Δl_1, passa a ocupar a posição A_1'; em seguida, em decorrência da rotação da barra 1, descreve um círculo de raio $l_1 - \Delta l_1$, que se confunde com a reta r_1.

A interseção das retas r_0 e r_1 determina o ponto A'.

De acordo com a fig.,

$$\theta = \frac{A_0'A'}{A_0'C'} = \frac{\sqrt{2}(\Delta l_1 + \Delta l_3)}{\sqrt{2}a} = \frac{2P}{ES} \tag{D}$$

de modo que:

$$u_D = u_C = \frac{Pa}{ES} \qquad v_D = v_C + a\theta = 3\frac{Pa}{ES} \tag{E}$$

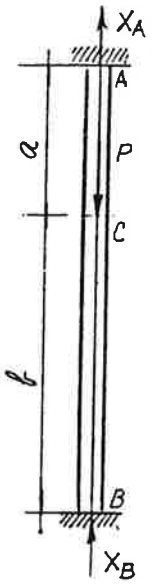
ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS.

1.CONCEITOS FUNDAMENTAIS.

Os conceitos fundamentais relativos à análise de estruturas hiperestáticas submetidas à tração ou compressão simples, bem como alguns aspectos importantes do comportamento de estruturas hiperestáticas são apresentados nos três exemplos seguintes.

EXEMPLO 1.

Dada a estrutura da fig., determinar as reações de apoio X_A e X_B bem como o deslocamento longitudinal u_C do ponto C.



ALTERNATIVA 1.

A única equação de equilíbrio de que se dispõe - equilíbrio de forças segundo a direção x - fornece:

$$X_A + X_B = P \qquad \text{(A)}$$

Para obter uma segunda relação entre X_A e X_B, considera-se a expressão que fornece o deslocamento longitudinal em um ponto do eixo caracterizado pela coordenada x, dada por:

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \frac{N}{ES} dx \quad (0 \le x \le a) \qquad \text{(B')}$$

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \frac{N}{ES} dx = u_0 + \int_0^a \frac{N}{ES} dx + \int_a^x \frac{N}{ES} dx \quad (a \le x \le a+b) \qquad (B'')$$

onde:

$$u_0 = u_A = 0 \qquad (C')$$

$$N(x) = +X_A \qquad ES = ES_{AC} \qquad (0 \le x \le a) \qquad (C'')$$

$$N(x) = -X_B \qquad ES = ES_{BC} \qquad (a \le x \le a+b) \qquad (C''')$$

de modo que:

$$u(x) = \frac{X_A x}{ES_{AC}} \qquad (0 \le x \le a) \qquad (D')$$

$$u(x) = \frac{X_A a}{ES_{AC}} - \frac{X_B (x-a)}{ES_{BC}} \qquad (a \le x \le a+b) \qquad (D'')$$

Uma vez que o deslocamento longitudinal no ponto B é nulo, resulta da expressão (D''):

$$X_B = \frac{ES_{BC}}{b} \frac{a}{ES_{AC}} X_A \qquad (E)$$

As expressões (A) e (E) fornecem:

$$X_A = \frac{\frac{ES_{AC}}{a}}{\frac{ES_{AC}}{a} + \frac{ES_{BC}}{b}} P \qquad X_B = \frac{\frac{ES_{BC}}{b}}{\frac{ES_{AC}}{a} + \frac{ES_{BC}}{b}} P \qquad (F)$$

As grandezas $\frac{ES_{AC}}{a}$ e $\frac{ES_{BC}}{b}$ são os *coeficientes de rigidez à deformação longitudinal* dos trechos AC e BC.

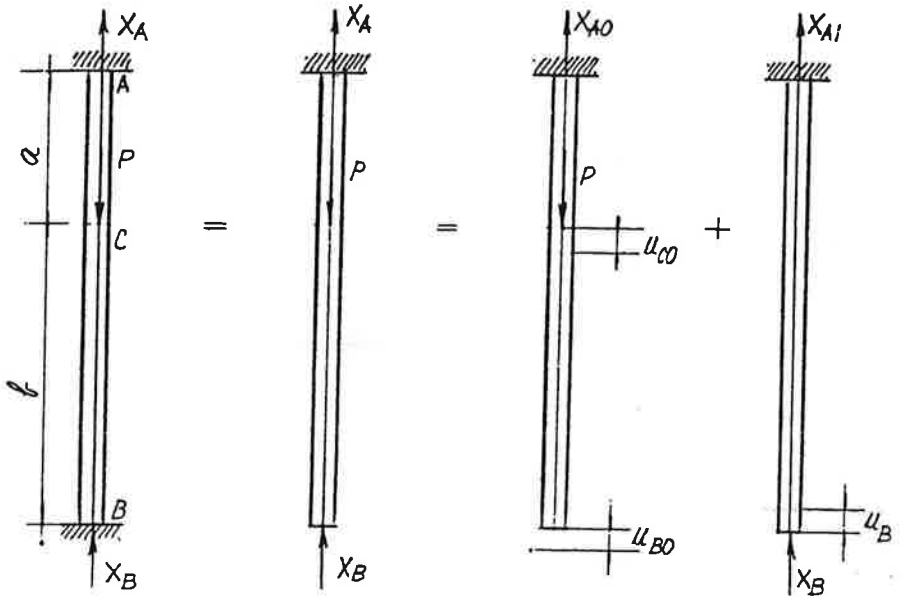
Os resultados anteriores mostram que em uma estrutura hiperestática as reações de apoio e os esforços solicitantes dependem da rigidez relativa dos elementos que compõem a estrutura.

Considerando na expressão (D') o valor de X_A dado pela expressão (F), obtém-se:

$$u_C = \frac{\frac{ES_{AC}}{a}}{\frac{ES_{AC}}{a} + \frac{ES_{BC}}{b}} \frac{Pa}{ES_{AC}} \qquad (G)$$

ALTERNATIVA 2.

O comportamento da estrutura hiperestática dada é idêntico ao comportamento da estrutura isostática que se mostra na fig. - denominada *estrutura isostática fundamental* - submetida ao carregamento externo (no caso, a força P), bem como à reação de apoio X_B - denominada *incógnita hiperestática* -, por enquanto desconhecida



Determinado o valor de X_B, a equação de equilíbrio de forças segundo a direção x fornece:

$$X_A = P - X_B \qquad \text{(A)}$$

Em consequência do princípio da superposição de efeitos, pode-se considerar isoladamente os efeitos do carregamento externo e da incógnita hiperestática.

O deslocamento longitudinal u_{B0} no ponto B devido à força P é igual, uma vez que o trecho BC está descarregado, ao deslocamento longitudinal u_{C0} no ponto C, isto é:

$$u_{B0} = u_{C0} = \frac{N^0_{AC} l_{AC}}{ES_{AC}} = \frac{Pa}{ES_{AC}} \qquad \text{(B)}$$

O deslocamento longitudinal u_{B1} no ponto B devido à força X_B é igual ao encurtamento do trecho AC mais o encurtamento do trecho BC, isto é:

$$u_{B1} = \Delta l^1_{AC} + \Delta l^1_{BC} = \frac{N^1_{AC} l_{AC}}{ES_{AC}} + \frac{N^1_{BC} l_{BC}}{ES_{BC}} = \frac{X_B a}{ES_{AC}} + \frac{X_B b}{ES_{BC}} \qquad \text{(C)}$$

Uma vez que o deslocamento longitudinal no ponto B é nulo, segue-se que o deslocamento longitudinal u_{B1} deve anular o deslocamento longitudinal u_{B0}, isto é:

$$u_{B1} = u_{B0} \quad \Rightarrow \quad X_B = \frac{\dfrac{ES_{BC}}{b}}{\dfrac{ES_{AC}}{a} + \dfrac{ES_{BC}}{b}} P \qquad \text{(D)}$$

de modo que, retornando à expressão (A), obtém-se:

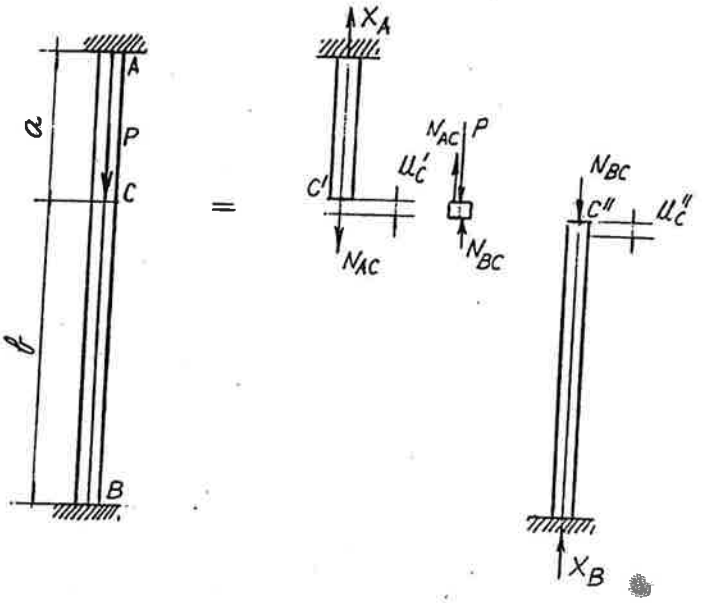
$$X_A = \frac{\dfrac{ES_{AC}}{a}}{\dfrac{ES_{AC}}{a} + \dfrac{ES_{BC}}{b}} P \qquad \text{(E)}$$

O deslocamento longitudinal no ponto C é dado por:

$$u_C = u_{C0} - u_{C1} = \frac{N^0_{AC} l_{AC}}{ES_{AC}} - \frac{N^1_{AC} l_{AC}}{ES_{AC}} = \frac{Pa}{ES_{AC}} - \frac{X_B a}{ES_{AC}} =$$

$$= \frac{\dfrac{ES_{AC}}{a}}{\dfrac{ES_{AC}}{a} + \dfrac{ES_{BC}}{b}} \frac{Pa}{ES_{AC}} \qquad \text{(F)}$$

ALTERNATIVA 3.



Considerando o equilíbrio no ponto C, tem-se:

$$N_{AC} + N_{BC} = P \qquad \text{(A)}$$

onde, em vista do equilíbrio das barras AC e BC, tem-se:

$$N_{AC} = X_A \qquad N_{BC} = X_B \qquad \text{(B)}$$

de modo que:

$$X_A + X_B = P \qquad \text{(C)}$$

Os deslocamentos longitudinais nos pontos C' e C" são dadas por:

$$u_C' = \frac{N_{AC} l_{AC}}{ES_{AC}} = \frac{X_A a}{ES_{TAC}} \qquad u_C'' = \frac{N_{BC} l_{BC}}{ES_{BC}} = \frac{X_B b}{ES_{BC}} \qquad \text{(D)}$$

Uma vez que esses deslocamentos são iguais, tem-se:

$$u_C' = u_C'' \quad \Rightarrow \quad X_B = \frac{ES_{BC}}{b}\frac{a}{ES_{AC}} X_A \qquad \text{(E)}$$

As expressões (C) e (E) fornecem:

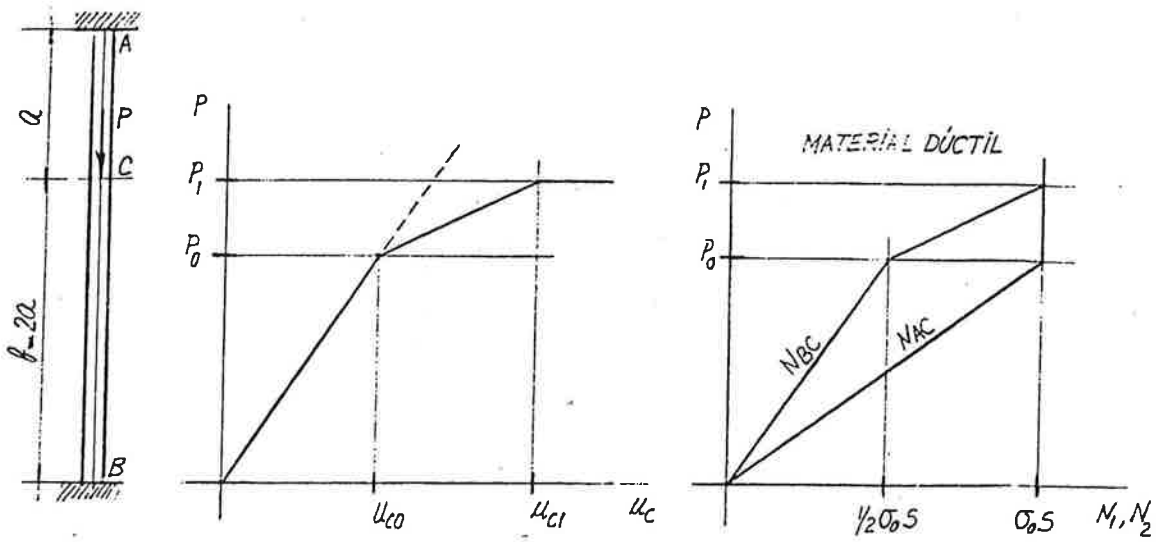
$$X_A = \frac{\dfrac{ES_{AC}}{a}}{\dfrac{ES_{AC}}{a} + \dfrac{ES_{BC}}{b}} P \qquad X_B = \frac{\dfrac{ES_{BC}}{b}}{\dfrac{ES_{AC}}{a} + \dfrac{ES_{BC}}{b}} P \qquad \text{(F)}$$

Considerando nas expressões (D) os valores de M_A^* e M_B^* dados pelas expressões (F), obtém-se:

$$u_C = u_C' = u_C'' = \frac{\dfrac{ES_{AC}}{a}}{\dfrac{ES_{AC}}{a} + \dfrac{ES_{BC}}{b}} \frac{Pa}{ES_{AC}} \qquad \text{(G)}$$

EXEMPLO 2.

Comparar o comportamento da estrutura da fig., considerando dois materiais: um elasto-frágil com $\sigma_{RT} = -\sigma_{RC} = \sigma_0$, o outro elasto-plástico com $\sigma_E = \sigma_0$.



As forças normais e as correspondentes tensões normais, para um determinado valor de P, são dadas, de acordo com os resultados do exemplo 1, por:

$$N_{AC} = \frac{2}{3}P \quad (T) \quad \Rightarrow \quad \sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{S_{AC}} = \frac{2}{3}\frac{P}{S} \quad (T) \qquad (A')$$

$$N_{BC} = \frac{1}{3}P \quad (C) \quad \Rightarrow \quad \sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{S_{BC}} = \frac{1}{3}\frac{P}{S} \quad (C) \qquad (A'')$$

O deslocamento do ponto C é determinado considerando indiferentemente o alongamento do trecho AC ou o encurtamento do trecho BC, isto é,

$$u_C = \Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} l_{AC}}{ES_{AC}} = \frac{2}{3}\frac{Pa}{ES} \qquad (B')$$

$$u_C = \Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} l_{BC}}{ES_{BC}} = \frac{2}{3}\frac{Pa}{ES} \qquad (B'')$$

O valor P_0 de P para o qual se dá a ruptura por tração do material elasto-frágil no trecho AC é dado por:

$$\sigma_{AC} = \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad P = P_0 = \frac{3}{2}\sigma_0 S \qquad (C)$$

Tendo ocorrido a ruptura por tração do trecho AC a tensão no trecho BC é dada por:

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{S_{BC}} = \frac{P_0}{S} = \frac{3}{2}\sigma_0 \qquad (D)$$

isto é, o valor P_0 corresponde ao colapso da estrutura devido à ruptura por tração do trecho AC, seguido de ruptura por compressão do trecho BC.

Considerando as expressões (B), obtém-se:

$$P = P_0 \quad \Rightarrow \quad u_C = u_{C0} = \frac{2}{3}\frac{P_0 a}{ES} \qquad (E)$$

O valor P_0 de P para o qual se dá o escoamento do material elasto-plástico no trecho AC é dado por:

$$\sigma_{AC} = \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad P = P_0 = \frac{3}{2}\sigma_0 S \qquad (F)$$

Contrariamente ao que acontece com o material elasto-frágil, não há colapso da estrutura. Para um valor de P superior ao valor P_0, a estrutura, anteriormente hiperestática, passa a se comportar como uma estrutura isostática. De fato, consideran-do o equilíbrio no ponto C, pode-se determinar a força normal N_{BC} e a correspondente tensão normal σ_{BC}, uma vez que no trecho AC a tensão normal σ_{AC} permanece igual a σ_0. Assim:

$$N_{BC} = P - \sigma_0 S \quad \Rightarrow \quad \sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{S_{BC}} = \frac{P}{S} - \sigma_0 \qquad (G)$$

O valor P_1 de P para o qual se dá o escoamento do material no trecho BC, e o consequente colapso da estrutura, é dado por:

$$\sigma_{BC} = \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad P = P_1 = 2\sigma_0 S = \frac{4}{3}P_0 \tag{H}$$

Para $P \leq P_0$, o deslocamento do ponto C é dado, de acordo com as expressões (B), por:

$$u_C = \frac{2}{3}\frac{Pa}{ES} \tag{I}$$

Para $P_0 \leq P \leq P_1$, o deslocamento do ponto C deve ser calculado exclusivamente pelo encurtamento do trecho BC, visto que só esse trecho se mantém em regime elástico, para o qual é válido a expressão $\Delta l = Nl/ES$. Assim:

$$u_C = \Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} l_{BC}}{ES_{BC}} = \frac{(P - \sigma_0 S)2a}{ES} = \frac{(P - 2/3\,P_0)2a}{ES} \tag{J}$$

Considerando as expressões (I) e (J), tem-se:

$$P = P_0 \quad \Rightarrow \quad u_C = u_{C0} = \frac{2}{3}\frac{P_0 a}{ES} \tag{K'}$$

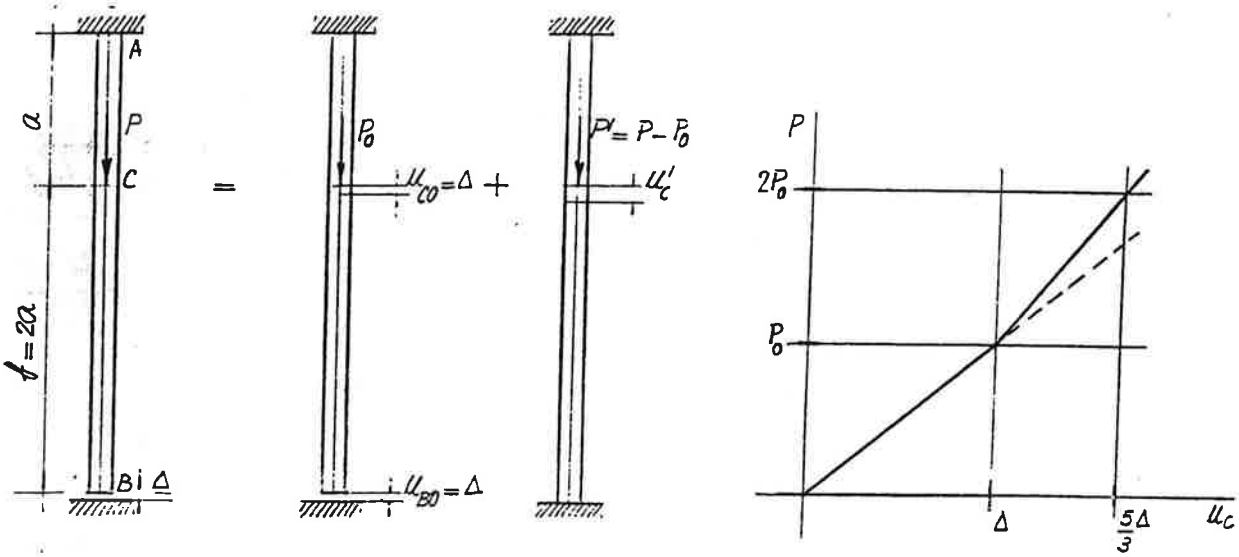
$$P = P_1 = \frac{4}{3}P_0 \quad \Rightarrow \quad u_C = u_{C1} = \frac{4}{3}\frac{P_0 a}{ES} \tag{K''}$$

Os resultados anteriores permitem obter os diagramas que se mostram na fig.

O diagrama $P \times u_C$ permite concluir que, quando a estrutura deixa de ser hiperestática, há perda de rigidez, isto é, para $P_0 < P \leq P_1$, o deslocamento de um ponto qualquer (em particular o deslocamento do ponto C) é maior do que o correspondente ao comportamento hiperestático anterior.

EXEMPLO 3.

Dada a estrutura da fig., determinar o diagrama $P \times u_C$, onde u_C é o deslocamento longitudinal do ponto C.



Até que seja anulada a folga Δ, o deslocamento do ponto C, bem como de qualquer ponto do trecho BC, é igual ao alongamento do trecho AC, isto é,

$$u_C = \Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} l_{AC}}{ES_{AC}} = \frac{Pa}{ES} \qquad \text{(A)}$$

O valor P_0 de P que anula a folga Δ é dado por:

$$u_B = u_C = \Delta \quad \Rightarrow \quad P_0 = \frac{ES}{a}\Delta \qquad \text{(B)}$$

Para um valor de P superior a P_0, pode-se decompor, como se mostra na fig.,a força P nas parcelas P_0 e $P_1 = P - P_0$. À parcela P_0 corresponde o deslocamento u_{C0}, dado por:

$$u_{C0} = \Delta = \frac{P_0 a}{ES} \qquad \text{(C)}$$

enquanto à parcela P_1 que solicita, agora, uma estrutura hiperestática (já analisada no exemplo 1) corresponde o deslocamento u_{C1}, dado por:

$$u_{C1} = \frac{2}{3}\frac{P_1 a}{ES} = \frac{2}{3}\frac{(P - P_0)a}{ES} \qquad \text{(D)}$$

de modo que o deslocamento total u_C é dado por:

$$u_C = u_{C0} + u_{C1} = \frac{1}{3}\frac{P_0 a}{ES} + \frac{2}{3}\frac{Pa}{ES} \qquad \text{(E)}$$

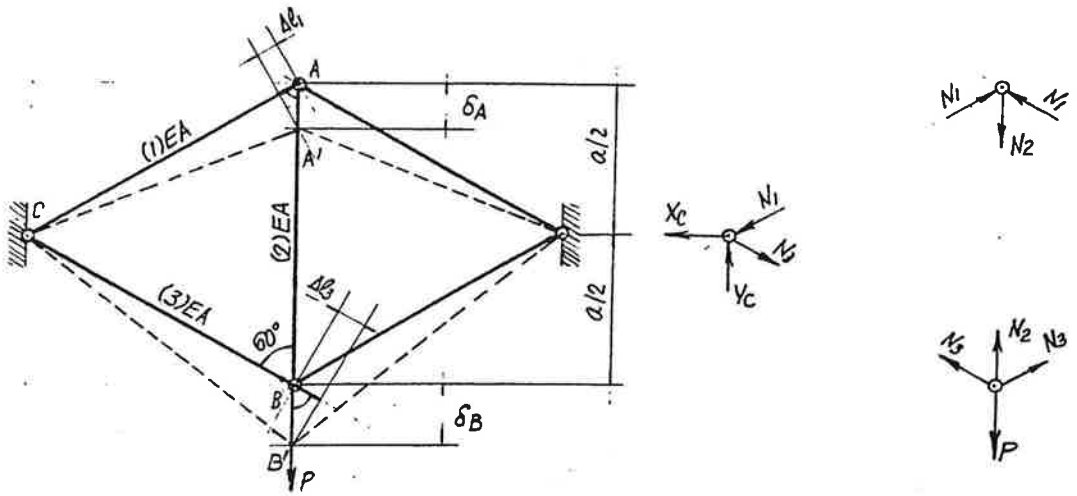
As expressões (A) e (E) permitem obter o diagrama $P \times u_C$ que se mostra na fig., do qual se pode concluir que quando a estrutura passa a ser hiperestática há ganho de

rigidez, isto é, para $P > P_0$, o deslocamento de um ponto qualquer da estrutura (em particular o deslocamento do ponto C) é menor do que o correspondente ao comportamento isostático anterior.

2. TRELIÇAS HIPERESTÁTICAS.

EXEMPLO 1.

Determinar as forças normais N_1, N_2 e N_3, e os deslocamentos v_A e v_B na estrutura da fig.



O número de incógnitas n_I do problema é dado por:

$$n_I = n_B + n_R = 5 + 4 = 9$$

onde n_B é o número de barras , ou seja, o número de forças normais, e n_R é o número de reações de apoio.

O número de equações de equilíbrio n_E é dado por:

$$n_E = 2n_N = 2x4 = 8$$

onde n_N é o número de nós, para os quais se pode escrever duas equações de equilíbrio.

A configuração deformada - caracterizada, em consequência da simetria da estrutura e do carregamento, pelo deslocamento vertical v_A do ponto A e pelo deslocamento vertical v_B do ponto B - sugere que a força normal N_1 é de compressão e que as forças normais N_2 e N_3 são de tração.

As únicas equações de equilíbrio úteis, por enquanto, são as relativas ao equilíbrio dos nós A e B segundo a direção vertical, já que as referentes ao equilíbrio segundo a direção horizontal são automaticamente satisfeitas em vista da simetria da estrutura e do carregamento, e as referentes ao equilíbrio do nó C permitem determinar as reações X_C e Y_C, a partir das forças normais N_1 e N_3. Assim, tem-se:

$$\text{nó A} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2N_1 \cos 60^0 = N_2 \Rightarrow N_1 = N_2 \qquad (A')$$

$$\text{nó B} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 + 2N_3 \cos 60^0 = P \Rightarrow N_2 + N_3 = P \qquad (A'')$$

O encurtamento Δl_1 correspondente à força normal de compressão N_1, o alongamento Δl_2 correspondente à força normal de tração N_2, e o alongamento Δl_3 correspondente à força normal de tração N_3 são dados por:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{ES_1} = \frac{N_1 a}{ES} \qquad (B')$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{ES_2} = \frac{N_2 a}{ES} \qquad (B'')$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{ES_3} = \frac{N_3 a}{ES} \qquad (B''')$$

A partir da configuração deformada, pode-se relacionar $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 com os deslocamentos v_A e v_B, da seguinte maneira:

$$\Delta l_1 = v_A \cos 60^0 = \tfrac{1}{2} v_A \qquad (C')$$

$$\Delta l_2 = v_B - v_A \qquad (C'')$$

$$\Delta l_3 = v_B \cos 60^0 = \tfrac{1}{2} v_B \qquad (C''')$$

As expressões (C) permitem escrever:

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_3 - 2\Delta l_1 \quad \Rightarrow \quad 2\Delta l_1 + \Delta l_2 - 2\Delta l_3 = 0 \qquad (D)$$

A equação acima - denominada *equação de compatibilidade* - estabelece a relação entre $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 de modo que seja possível a configuração deformada adotada.

Considerando na equação de compatibilidade os valores de $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 dados pelas expressões (B), obtém-se:

$$2N_1 + N_2 - 2N_3 = 0 \qquad (E)$$

Com as equações de equilíbrio (A) e a equação de compatibilidade (E), obtém-se:

$$N_1 = \frac{2}{5}P \qquad N_2 = \frac{2}{5}P \qquad N_3 = \frac{3}{5}P \qquad (F)$$

Os valores positivos de N_1, N_2 e N_3 indicam que, efetivamente, a força normal N_1 é de compressão, e que as forças N_2 e N_3 são de tração.

Considerando os valores de N_1, N_2 e N_3 nas expressões (B), obtém-se:

$$\Delta l_1 = \frac{2}{5}\frac{Pa}{ES} \qquad \Delta l_2 = \frac{2}{5}\frac{Pa}{ES} \qquad \Delta l_3 = \frac{3}{5}\frac{Pa}{ES} \qquad (G)$$

Os valores positivos de $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 indicam que, efetivamente, Δl_1 é encurtamento, e que Δl_2 e Δl_3 são alongamentos.

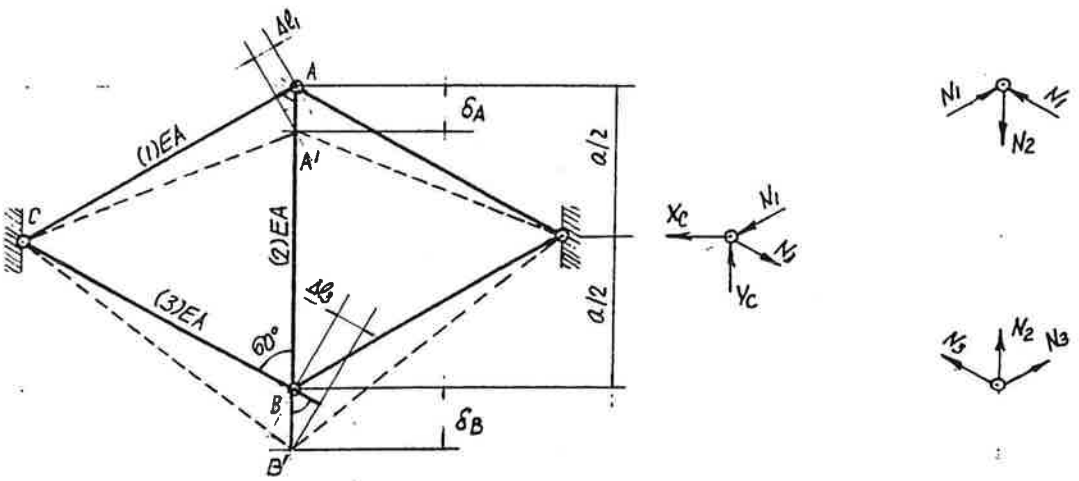
Considerando os valores de $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 nas expressões (C), obtém-se:

$$v_A = \frac{4}{5}\frac{Pa}{ES} \qquad v_B = \frac{6}{5}\frac{Pa}{ES} \tag{H}$$

Os valores positivos de v_A e v_B indicam que, efetivamente, os pontos A e B deslocam-se para baixo.

EXEMPLO 2.

Determinar as forças normais $N_1, N_2 e N_3$, e os deslocamentos $v_A e v_B$, decorrentes do aquecimento Δt^* da estrutura do exemplo 1.



Pode-se adotar a configuração deformada do exemplo 1, embora seja claro que o deslocamento vertical do ponto A é para cima.

As equações de equilíbrio (A) passam a ser :

$$N_1 = N_2 \tag{A'}$$

$$N_2 + N_3 = 0 \tag{A''}$$

As expressões (B) passam a se escritas da seguinte maneira:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{ES_1} - \alpha \Delta t_1 l_1 = \frac{N_1 a}{ES} - \alpha \Delta t^* a \tag{B'}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{ES_2} + \alpha \Delta t_2 l_2 = \frac{N_2 a}{ES} + \alpha \Delta t^* a \tag{B''}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{ES_3} + \alpha \Delta t_3 l_3 = \frac{N_3 a}{ES} + \alpha \Delta t^* a \tag{B'''}$$

que devem ser lidas da seguinte maneira: o encurtamento Δl_1 corresponde ao efeito da força normal de compressão N_1, minorado pelo efeito do aquecimento Δt^*; o alongamento Δl_2 corres-ponde ao efeito da força normal de tração N_2, majorado pelo efeito do

aquecimento Δt^*; o alongamento Δl_3 corresponde ao efeito da força normal de tração N_3, majorado pelo efeito do aquecimento Δt^*.

As expressões (C) permanecem validas, isto é:

$$\Delta l_1 = v_A \cos 60^0 = \tfrac{1}{2} v_A \qquad (C')$$

$$\Delta l_2 = v_B - v_A \qquad (C'')$$

$$\Delta l_3 = v_B \cos 60^0 = \tfrac{1}{2} v_B \qquad (C''')$$

O mesmo acontece com a equação de compatibilidade:

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_3 - 2\Delta l_1 \quad \Rightarrow \quad 2\Delta l_1 + \Delta l_2 - 2\Delta l_3 = 0 \qquad (D)$$

Considerando na equação de compatibilidade os valores de $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 dados pelas expressões (B), obtém-se:

$$2N_1 + N_2 - 2N_3 = 3ES\alpha\Delta t^* \qquad (E)$$

Com as equações de equilíbrio (A) e a equação de compatibilidade (E), obtém-se:

$$N_1 = \frac{3}{5}ES\alpha\Delta t^* \qquad N_2 = \frac{3}{5}ES\alpha\Delta t^* \qquad N_3 = -\frac{3}{5}ES\alpha\Delta t^* \qquad (F)$$

Os sinais positivos de N_1 e N_2 indicam que as forças normais N_1 e N_2 são , como se supôs, de compressão e de tração, respectivamente; o sinal negativo de N_3 indica que a força normal N_3, que se supôs ser de tração, é, na verdade, de compressão.

Considerando os valores de N_1, N_2 e N_3 nas expressões (B), obtém-se:

$$\Delta l_1 = -\frac{2}{5}\alpha\Delta t^* a \qquad \Delta l_2 = \frac{8}{5}\alpha\Delta t^* a \qquad \Delta l_3 = \frac{2}{5}\alpha\Delta t^* a \qquad (G)$$

O sinal negativo de Δl_1 indica que Δl_1, que se supôs ser encurtamento, é, na verdade, alongamento; os sinais positivos de Δl_2 e Δl_3 indicam que Δl_2 e Δl_3 são, como se supôs, alongamentos.

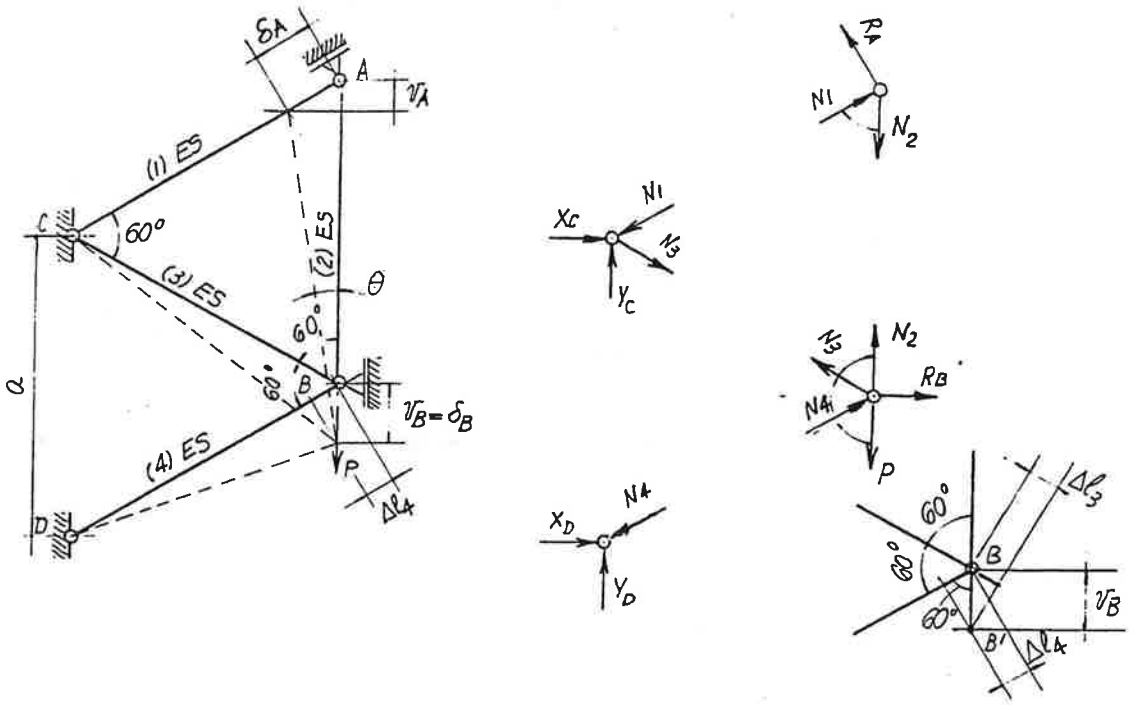
Considerando os valores de $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 nas expressões (C), obtém-se:

$$v_A = -\frac{4}{5}\alpha\Delta t^* a \qquad v_B = \frac{4}{5}\alpha\Delta t^* a \qquad (H)$$

O sinal negativo de v_A indica que o ponto A, contrariamente ao que se supôs, sobe; o sinal positivo de v_B indica que o ponto B, como se supôs, desce.

EXEMPLO 3.

Determinar as forças normais N_1, N_2, N_3 e N_4 e os deslocamentos v_A e v_B na treliça da fig.



Como se viu no exemplo1, o número de incógnitas n_I é dado por:

$$n_I = n_B + n_R = 4 + 6 = 10$$

enquanto o número de equações de equilíbrio n_E é dado por:

$$n_E = 2n_N = 2x4 = 8$$

A configuração deformada - caracterizada pelo deslocamento $\delta_A = v_A / \cos 60^0$ do ponto A e pelo deslocamento $\delta_B = v_B$ do ponto B - sugere que as forças normais N_1 e N_4 são de compressão e que as forças normais N_2 e N_3 são de tração.

As únicas equações de equilíbrio úteis, por enquanto, são as referentes ao equilíbrio do nó A segundo a direção da barra 1 e do nó B segundo a direção vertical; as demais permitem determinar as reações de apoio a partir das forças normais N_1, N_2, N_3 e N_4. Assim, tem-se:

$$\text{nó A:} \quad N_1 = N_2 \cos 60^0 \quad \Rightarrow \quad 2N_1 = N_2 \qquad \text{(A')}$$

$$\text{nó B:} \quad N_2 + N_3 \cos 60^0 + N_4 \cos 60^0 = P \quad \Rightarrow$$

$$2N_2 + N_3 + N_4 = 2P \qquad \text{(A")}$$

Os encurtamentos Δl_1 e Δl_4 correspondentes às forças normais de compressão N_1 e N_4, bem como os alongamentos Δl_2 e Δl_3 correspondentes às forças normais de tração N_2 e N_3 são dadas por:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{ES_1} = \frac{N_1 a}{ES} \qquad \Delta l_4 = \frac{N_4 l_4}{ES_4} = \frac{N_4 a}{ES} \tag{B'}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{ES_2} = \frac{N_2 a}{ES} \qquad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{ES_3} = \frac{N_3 a}{ES} \tag{B''}$$

A partir da configuração deformada, pode-se relacionar $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$ e Δl_4 com os deslocamentos $v_A = \delta_A \cos 60^0$ e v_B, da seguinte maneira:

$$\Delta l_1 = \delta_A = v_A / \cos 60^0 \tag{C'}$$

$$\Delta l_2 = v_B - v_A \tag{C''}$$

$$\Delta l_3 = v_B \cos 60^0 \tag{C'''}$$

$$\Delta l_4 = v_B \cos 60^0 \tag{C''''}$$

A expressão (C'') é obtida, considerando que o ângulo θ é muito pequeno, da seguinte maneira:

$$AB + v_B = A'B' \cos\theta + v_A \quad \Rightarrow$$

$$l_2 + v_B = (l_2 + \Delta l_2)\cos\theta + v_A = l_2 + \Delta l_2 + v_A$$

As expressões (C) permitem obter as seguintes equações de compatibilidade:

$$\Delta l_1 + 2\Delta l_2 - 4\Delta l_3 = 0 \tag{D'}$$

$$\Delta l_3 = \Delta l_4 \tag{D''}$$

Considerando nas equações de compatibilidade (D) os valores de $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$ e Δl_4 dados pelas expressões (B), obtém-se:

$$N_1 + 2N_2 - 4N_3 = 0 \tag{E'}$$

$$N_3 = N_4 \tag{E''}$$

Com as equações de equilíbrio (A) e as equações de compatibilidade (E), obtém-se:

$$N_1 = \frac{4}{13}P \quad N_2 = \frac{8}{13}P \quad N_3 = \frac{5}{13}P \quad N_4 = \frac{5}{13}P \tag{F}$$

Os sinais positivos de N_1, N_2, N_3 e N_4 indicam que as forças normais N_1 e N_4 são, como se supôs, de compressão, e que as forças normais N_2 e N_3 são de tração.

Considerando-se nas expressões (B) os valores de N_1, N_2, N_3 e N_4, obtém-se:

$$\Delta l_1 = \frac{4}{13}\frac{Pa}{ES} \quad \Delta l_2 = \frac{8}{13}\frac{Pa}{ES} \quad \Delta l_3 = \frac{5}{13}\frac{Pa}{ES} \quad \Delta l_4 = \frac{5}{13}\frac{Pa}{ES} \tag{G}$$

Os sinais positivos de $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$ e Δl_4 indicam que Δl_1 e Δl_4 são, como se supôs, encurtamentos, e que Δl_2 e Δl_3 são alongamentos.

Considerando nas expressões (C) os valores de $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$ e Δl_4, obtém-se:

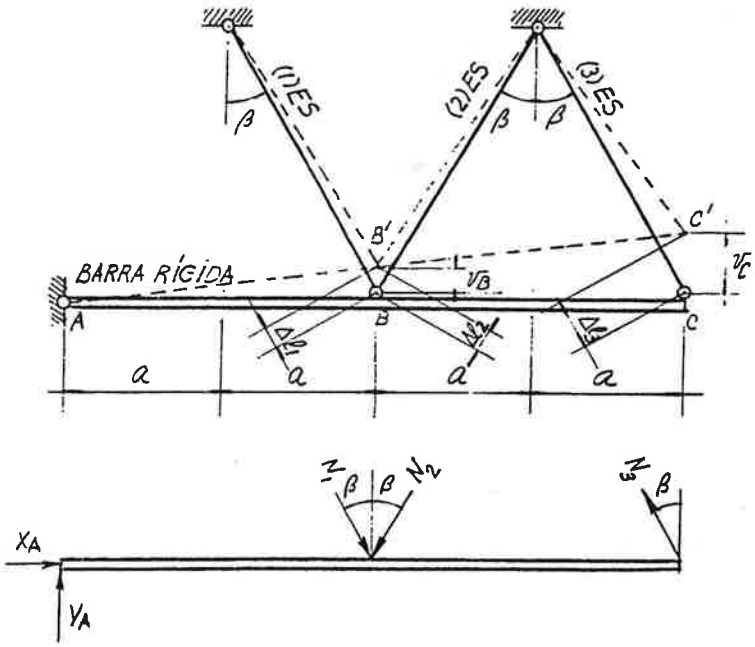
$$v_A = \frac{8}{13}\frac{Pa}{ES} \qquad v_B = \frac{10}{13}\frac{Pa}{ES} \tag{H}$$

Os valores positivos de v_A e v_B indicam que a configuração deformada adotada é correta.

3.ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS COM BARRA RÍGIDA.

EXEMPLO.

Determinar as forças normais N_1, N_2 e N_3, e os deslocamentos v_B e v_C, decorrentes do esfriamento Δt^* da barra 3 da estrutura da fig.



Considerando o equíbrio da barra rígida, o número de incógnitas é dado por:

$$n_I = n_B + n_R = 3 + 2 = 5$$

onde n_B é o número de barras ligadas à barra rígida e n_R é o número de reações de apoio.

O número de equações de equilíbrio é dados por:

$$n_I = 3$$

a saber: duas equações de equilíbrio de forças (as quais permitem determinar as reações de apoio a partir das forças normais $N_1, N_2, e N_3$) e a equação de equilíbrio de momentos:

$$\begin{aligned} (\Sigma M)_A = 0 \quad &\Rightarrow \quad N_1 2a\cos\beta + N_2 2a\cos\beta = N_3 4a\cos\beta \\ &\Rightarrow \quad N_1 + N_2 = 2N_3 \end{aligned} \qquad (A)$$

A configuração deformada, caracterizada pela rotação θ, sugere que as forças normais N_1 e N_2 são de compressão e que a força normal N_3 - que representa a ação do

restante da estrutura sobre a barra 3 no sentido de impedir o encurtamento devido ao esfriamento Δt^* - é de tração.

Os encurtamentos $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 são dados por:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{ES_1} = \frac{N_1}{ES}\frac{a}{\operatorname{sen}\beta} \qquad (B')$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{ES_2} = \frac{N_2}{ES}\frac{a}{\operatorname{sen}\beta} \qquad (B'')$$

$$\Delta l_3 = \alpha \Delta t_3 l_3 - \frac{N_3 l_3}{ES_3} = \alpha \Delta t^* \frac{a}{\operatorname{sen}\beta} - \frac{N_3}{ES}\frac{a}{\operatorname{sen}\beta} \qquad (B''')$$

A expressão (B''') mostra claramente que o encurtamento Δl_3 é igual ao encurtamento que a barra 3 apresentaria se não estivesse ligada ao resto da estrutura minorado pelo alongamento devido à força normal de tração N_3.

A partir da configuração deformada, pode-se relacionar $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 com os deslocamentos v_B e v_C, e estes com a rotação θ, da seguinte maneira:

$$\Delta l_1 = v_B \cos\beta = 2a\theta\cos\beta \qquad (C')$$

$$\Delta l_2 = v_B \cos\beta = 2a\theta\cos\beta \qquad (C'')$$

$$\Delta l_3 = v_C \cos\beta = 4a\theta\cos\beta \qquad (C''')$$

As expressões (C) permitem obter as seguintes equações de compatibilidade:

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \qquad (D')$$

$$\Delta l_3 = 2\Delta l_1 \qquad (D'')$$

Considerando nas equações de compatibilidade os valores de $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 dados pelas expressões (B), obtém-se:

$$N_2 = N_1 \qquad (E')$$

$$N_3 = ES\alpha\Delta t^* - 2N_1 \qquad (E'')$$

Com as equações de equilíbrio (A) e as equações de compatibilidade (E), obtém-se:

$$N_1 = \frac{1}{3}ES\alpha\Delta t^* \quad N_2 = \frac{1}{3}ES\alpha\Delta t^* \quad N_3 = \frac{1}{3}ES\alpha\Delta t^* \qquad (F)$$

Os sinais positivos de N_1, N_2 e N_3 indicam que as forças normais N_1 e N_2 são, como se supôs, de compressão, e que a força normal N_3 é de tração.

Considerando-se nas expressões (B) os valores de N_1, N_2 e N_3, obtém-se:

$$\Delta l_1 = \frac{1}{3}\frac{\alpha a \Delta t^*}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \Delta l_2 = \frac{1}{3}\frac{\alpha a \Delta t^*}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \Delta l_3 = \frac{2}{3}\frac{\alpha a \Delta t^*}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad (G)$$

Os sinais positivos de $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 indicam que $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 são, como se supôs, encurtamentos.

Considerando nas expressões (C) os valores de $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3, obtém-se:

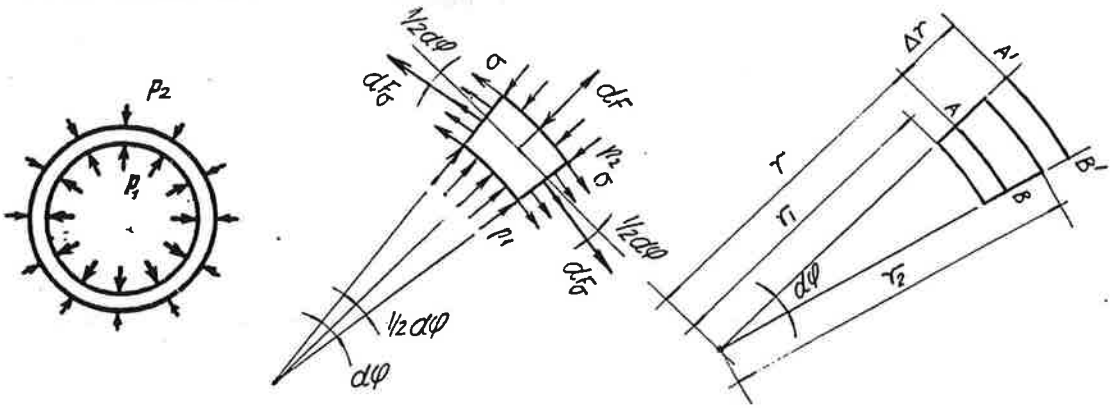
$$v_B = \frac{1}{3}\frac{\alpha a \Delta t^*}{\operatorname{sen}\beta\cos\beta} \qquad v_C = \frac{2}{3}\frac{\alpha a \Delta t^*}{\operatorname{sen}\beta\cos\beta} \tag{H}$$

Os valores positivos de v_B e v_C indicam que a configuração deformada adotada é correta.

TUBO DE PAREDE FINA.

Em um tubo de parede fina, como o que se mostra na fig., de raio interno r_1 e raio externo r_2, submetido a pressão interna p_1 e a pressão externa p_2, a tensão normal σ pode ser considerada constante ao longo da espessura $\delta = r_2 - r_1$.

Considere-se o elemento, que se extrai de um segmento de dimensão dx, limitado pelo ângulo $d\theta$.



A resultante dF_r das pressões p_1 e p_2 e a resultante dF_θ das tensões normais σ são dadas por:

$$dF_r = p_1 r_1 d\theta\, dx - p_2 r_2 d\theta\, dx = (p_1 r_1 - p_2 r_2)\, d\theta\, dx \tag{1'}$$

$$dF_\theta = \sigma \delta\, dx \tag{1''}$$

de modo que se pode escrever a seguinte equação de equilíbrio segundo a direção radial:

$$dF_r = 2\, dF_\theta \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2} d\theta) = 2\, dF_\theta (\tfrac{1}{2} d\theta) = dF_\theta\, d\theta \tag{2}$$

ou seja:

$$\sigma = \frac{p_1 r_1 - p_2 r_2}{\delta} \tag{3}$$

Sendo r_0 o raio médio, é lícito considerar $r_1 \approx r_2 \approx r_0$, de modo que:

$$\sigma = \frac{(p_1 - p_2) r_0}{\delta} \tag{4}$$

Aplicado o carregamento, os pontos A e B, caracterizados pela coordenada r, têm deslocamento radial $u = \Delta r$

A deformação do segmento AB é dada por:

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} \tag{5}$$

onde:

$$AB = r\,d\theta \qquad A'B' = (r + u)\,d\theta = (r + \Delta r)\,d\theta \tag{6}$$

de modo que:

$$\varepsilon = \frac{u}{r} = \frac{\Delta r}{r} \tag{7}$$

Considerando a relação entre tensões e deformações expressa pela lei de Hooke, tem-se:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{p_1 r_1 - p_2 r_2}{E\delta} \tag{8}$$

Considerando as expressões (7) e (8), obtém-se:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{p_1 r_1 - p_2 r_2}{E\delta} \tag{9}$$

No caso de variação de temperatura Δt, sendo α o coeficiente de dilatação linear do material, tem-se:

$$AB = r\,d\varphi \qquad A'B' = r\,d\varphi + \alpha \Delta t\, r\,d\varphi \tag{10}$$

de modo que, segundo a expressão (5),

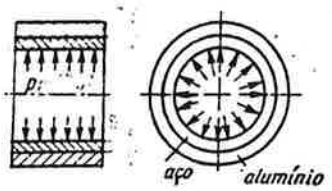
$$\varepsilon = \alpha \Delta t \tag{11}$$

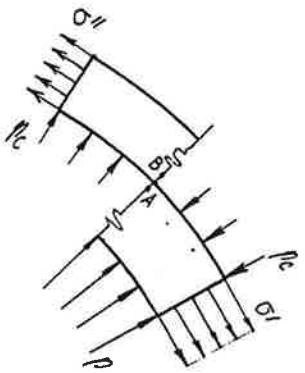
Considerando as expressões (7) e (11), obtém-se:

$$\frac{\Delta r}{r} = \alpha \Delta t \tag{12}$$

EXEMPLO 1.

Determinar as tensões normais no tubo interno e no tubo externo da fig., decorrentes da aplicação da pressão p.





As tensões normais no tubo interno e no tubo externo, são dadas por:

$$\sigma' = \frac{p_1' r_1' - p_2' r_2'}{\delta'} = \frac{p r_1' - p_C r_2'}{\delta'} \qquad \text{(A')}$$

$$\sigma'' = \frac{p_1'' r_1'' - p_2'' r_2''}{\delta''} = \frac{p_C r_1''}{\delta''} \qquad \text{(A'')}$$

enquanto as variações radiais são dadas por:

$$\frac{\Delta r'}{r'} = \frac{\sigma'}{E'} = \frac{p r_1' - p_C r_2'}{E'\delta'} \qquad r_1' \le r' \le r_2' \qquad \text{(B')}$$

$$\frac{\Delta r''}{r''} = \frac{\sigma''}{E''} = \frac{p_C r_1''}{E''\delta''} \qquad r_1'' \le r'' \le r_2'' \qquad \text{(B'')}$$

Considerando que o deslocamento radial do ponto A - numericamente igual à variação do raio externo do tubo interno - deve ser igual ao deslocamento radial do ponto B - numericamente igual à variação do raio interno do tubo externo -, obtém-se:

$$\Delta r_2' = \Delta r_1'' \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma'}{E'} r_2' = \frac{\sigma''}{E''} r_1'' \qquad \text{(C)}$$

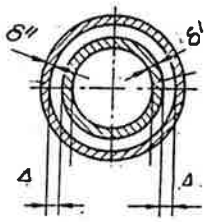
Dado que $r_2' = r_1''$, resulta:

$$\frac{\sigma'}{E'} = \frac{\sigma''}{E''} \quad \Rightarrow \quad \frac{p r_1' - p_C r_2'}{E'\delta'} = \frac{p_C r_1''}{E''\delta''} \quad \Rightarrow \quad p_C = \frac{r_1'}{r_2'} \frac{p}{1 + \dfrac{E'\delta'}{E''\delta''}} \qquad \text{(D)}$$

Retornando às expressões (A), obtêm-se as tensões normais σ' e σ''.

EXEMPLO 2.

Determinar as tensões normais no tubo interno e no tubo externo da fig., decorrentes do esfriamento Δt^* no tubo externo.



Até que seja anulada a folga Δ, tem-se:

$$\frac{\Delta r''}{r''} = \alpha'' \Delta t'' \qquad r_1'' \le r'' \le r_2'' \tag{A}$$

O valor Δt_0 de Δt^* que anula a folga Δ é dado por:

$$\Delta r_1'' = \Delta \quad \Rightarrow \quad \Delta t_0 = \frac{1}{\alpha''}\frac{\Delta}{r_1''} \tag{B}$$

Em decorrência do esfriamento adicional $\Delta t_1 = \Delta t^* - \Delta t_0$, há interação entre os tubos, de modo que as tensões normais no tubo interno e no externo, são dadas por:

$$\sigma' = \frac{p_1' r_1' - p_2' r_2'}{\delta'} = -\frac{p_C r_2'}{\delta'} \tag{C'}$$

$$\sigma'' = \frac{p_1'' r_1'' - p_2'' r_2''}{\delta''} = \frac{p_C r_1''}{\delta''} \tag{C''}$$

enquanto as variações radiais são dadas por:

$$\frac{\Delta r'}{r'} = \frac{\sigma'}{E'} = -\frac{p_C r_2'}{E'\delta'} \qquad r_1' \le r' \le r_2' \tag{D'}$$

$$\frac{\Delta r''}{r''} = \frac{\sigma''}{E''} - \alpha'' \Delta t_1 = \frac{p_C r_1''}{E''\delta''} - \alpha'' \Delta t_1 \qquad r_1'' \le r'' \le r_2'' \tag{D''}$$

Mais uma vez, igualando a variação do raio externo do tubo interno à variação do raio interno do tubo externo obtém-se:

$$\Delta r_2' = \Delta r_1'' \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma'}{E'} r_2' = \frac{\sigma''}{E''} r_1'' \tag{E}$$

Dado que $r_2' = r_1''$, resulta:

$$\frac{\sigma'}{E'} = \frac{\sigma''}{E''} \quad \Rightarrow \quad -\frac{p_C r_2'}{E'\delta'} = \frac{p_C r_1''}{E''\delta''} - \alpha'' \Delta t_1 \quad \Rightarrow \quad p_C = \frac{\alpha'' \Delta t_1}{\dfrac{r_2'}{E'\delta'} + \dfrac{r_1''}{E''\delta''}} \tag{F}$$

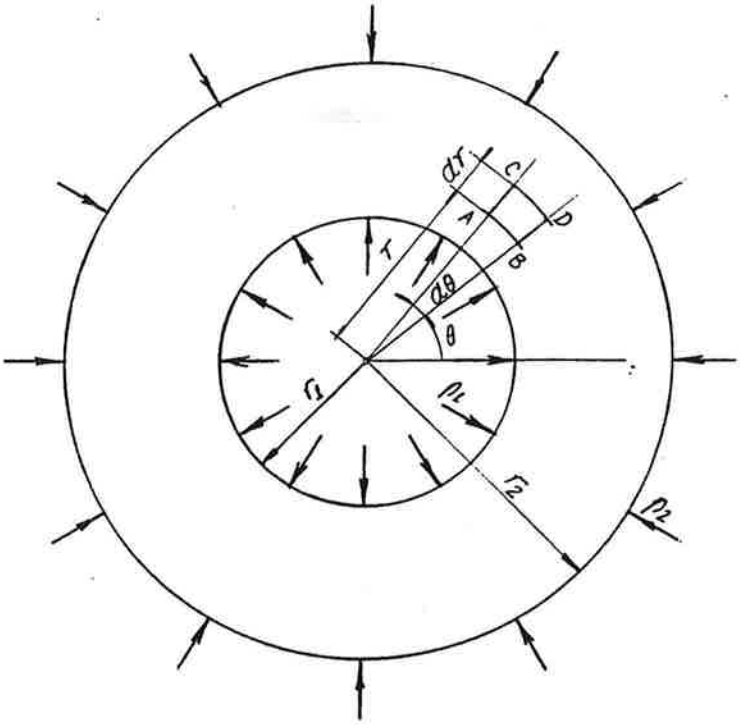
Retornando às expressões (A), obtêm-se as tensões normais σ' e σ''.

TUBO DE PAREDE ESPESSA.

A análise de estruturas que não pertencem à categoria das barras é feita pela teoria da elasticidade.

O problema do tubo de parede espessa permite ilustrar o procedimento normalmente utilizado (semelhante em linhas gerais ao utilizado na solução de treliças hiperestáticas), que consiste basicamente na solução de equações diferenciais de equilíbrio e equações diferenciais de compatibilidade

Em um tubo de parede espessa, como o que se mostra na fig., de raio interno r_1 e raio externo r_2, submetido a pressão interna p_1 e pressão externa p_2, as tensões normais σ_r e σ_θ variam ao longo da espessura $\delta = r_2 - r_1$.



Considere-se o elemento $ABCD$, que se extrai de um segmento de dimensão dx, limitado pelos raios r e $r + dr$ bem como pelo ângulo $d\theta$.

Na face AB, caracterizada pela coordenada r, tem-se tensão normal σ_r, enquanto na face CD, caracterizada pela coordenada $r + dr$, tem-se tensão normal $\sigma_r + d\sigma_r$; nas faces AC e BD tem-se, em decorrência da simetria axial, a mesma tensão normal σ_θ.

As resultantes dF_r e dF_θ das tensões normais σ_r e σ_θ são dadas por:

$$dF_r = (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)\,d\theta\,dx - \sigma_r r\,d\theta\,dx = (\sigma_r dr + d\sigma_r r)\,d\theta\,dx \qquad (1')$$

$$dF_\theta = \sigma_\theta\,dr\,dx \qquad (1'')$$

de modo que se pode escrever a seguinte *equação de equilíbrio* segundo a direção radial:

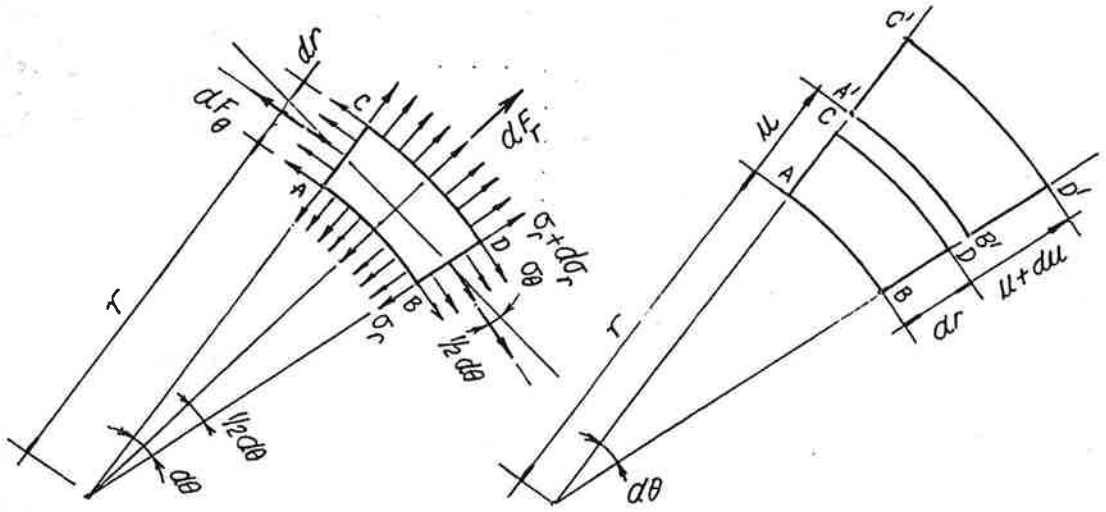
$$dF_r = 2\,dF_\theta\,\mathrm{sen}(\tfrac{1}{2}d\theta) = 2\,dF_\theta(\tfrac{1}{2}d\theta) = dF_\theta\,d\theta \tag{2}$$

ou, em vista das expressões (1),

$$\sigma_r + r\frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_\theta \tag{3}$$

onde as *condições de contorno* são dadas por:

$$\sigma_r(r_1) = -p_1 \qquad \sigma_r(r_2) = -p_2 \tag{4}$$



Trata-se de uma estrutura internamente hiperestática, uma vez que se tem duas incógnitas (σ_r e σ_θ) e uma única equação de equilíbrio.

Aplicado o carregamento, os pontos A e B, caracterizados pela coordenada r, têm deslocamento radial u, enquanto os pontos C e D, caracterizados pela coordenada $r + dr$, têm deslocamento radial $u + du$.

A deformação radial ε_r é dada por:

$$\varepsilon_r = \frac{A'C' - AC}{AC} \tag{5}$$

onde:

$$AC = dr \qquad A'C' = AC + CC' - AA' = dr + (u + du) - u = dr + du \tag{6}$$

de modo que:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \tag{7}$$

A deformação tangencial ε_θ é dada por:

$$\varepsilon_\theta = \frac{A'B' - AB}{AB} \tag{8}$$

onde:

$$AB = r\,d\theta \qquad A'B' = (r+u)\,d\theta = (r+\Delta r)\,d\theta \tag{9}$$

de modo que:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{\Delta r}{r} \tag{10}$$

Considerando as expressões (7) e (10), pode-se escrever a seguinte *equação de compatibilidade*:

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{1}{r}\left[\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right] \Rightarrow \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{1}{r}(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) \tag{11}$$

que expressa a relação entre as deformações ε_r e ε_θ, a fim de que a configuração deformada A'B'C'D' seja possível.

À tensão σ_r estão associadas as deformações ε_r' e ε_θ', dadas por:

$$\varepsilon_r' = \frac{\sigma_r}{E} \qquad \varepsilon_\theta' = -\nu\frac{\sigma_r}{E} \tag{12}$$

enquanto à tensão σ_θ estão associadas as deformações ε_r'' e ε_θ'', dadas por:

$$\varepsilon_\theta'' = \frac{\sigma_\theta}{E} \qquad \varepsilon_r'' = -\nu\frac{\sigma_\theta}{E} \tag{13}$$

de modo que são válidas as seguintes *relações entre tensões e deformações*:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r' + \varepsilon_r'' = \tfrac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \tag{14'}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta' + \varepsilon_\theta'' = \tfrac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \tag{14''}$$

Considerando na expressão (11) as expressões (14), pode-se escrever a seguinte equação de compatibilidade em termos de tensões:

$$\frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_r - \sigma_\theta) \tag{15}$$

Considerando a equação de equilíbrio e a equação de compatibilidade, dadas pelas expressões (3) e (15), bem como as condições de contorno, dadas pela expressão (4), obtêm-se as tensões normais σ_r e σ_θ, dadas por:

$$\sigma_r = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{p_1 - p_2}{r_2^2 - r_1^2}\frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \tag{16'}$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{p_1 - p_2}{r_2^2 - r_1^2}\frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \tag{16''}$$

Retornando às expressões (14), obtêm-se as deformações ε_r e ε_θ, que, consideradas na expressão (7) ou na expressão (10), fornecem o deslocamento radial u.

Sendo r_0 o raio médio, tem-se:

$$r_1 = r_0 - \tfrac{1}{2}\delta \qquad r_2 = r_0 + \tfrac{1}{2}\delta \tag{17'}$$

$$r_2 + r_1 = 2r_0 \qquad r_2 - r_1 = \delta \tag{17''}$$

de modo que o denominador das expressões (16) é dado por:

$$r_2^2 - r_1^2 = 2r_0\delta \tag{18}$$

Em um tubo de parede fina, é lícito considerar $r_1 \approx r_2 \approx r_0$, de modo que, retornando às expressões (16), obtém-se:

$$\sigma_r = 0 \qquad \sigma_\theta = \frac{(p_1 - p_2)r_0}{\delta} \tag{19}$$

como se viu no item precedente.