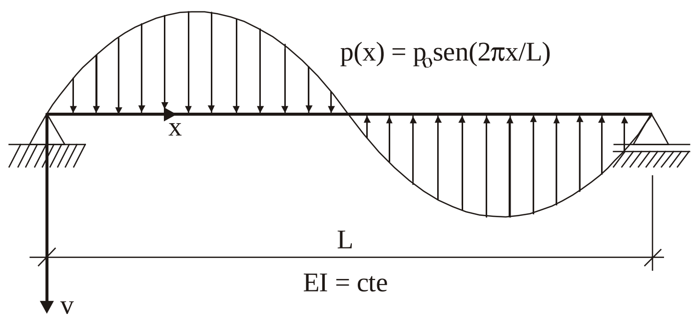
# Exercícios sobre Deformações por Momento Fletor

1. Escrever as expressões genéricas para os deslocamentos angulares φ(x) e transversais v(x) para a viga da figura.

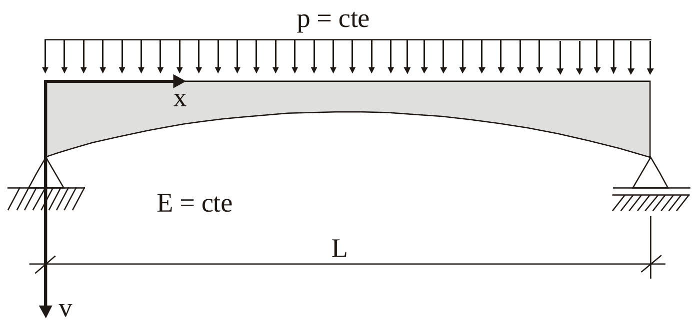



Resp: $$\varphi(x) = \frac{L^3}{8\pi^3 EI} \cos\frac{2\pi x}{L}$$

$$v(x) = \frac{L^4}{16\pi^4 EI} \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{L}$$

2. Para a viga da figura, com I variável, determinar as expressões de φ(x) e v(x).

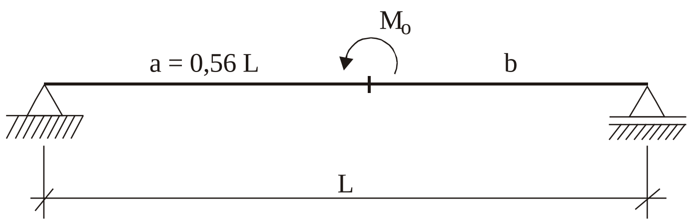
Dado: $$\frac{1}{I} = \frac{1}{I_0}\left(1 + \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2}\right)$$




Resp: $$\varphi(x) = \frac{p}{120 L^2 EI_0}\left(120 Lx^4 - 30 L^3 x^2 - 60 L^2 x^3 - 48x^5 + 9L^5\right)$$

$$v(x) = \frac{p}{120 L^2 EI_0}\left(24 Lx^5 - 10 L^3 x^3 - 15 L^2 x^4 - 8x^6 + 9L^5 x\right)$$

3. Para a viga da figura, com EI constante, determinar $v_{máx}$ e $v_{mín}$.




Resp: $$v_{máx} = \frac{M_0 (0{,}374\,L)^3}{3EIL}$$

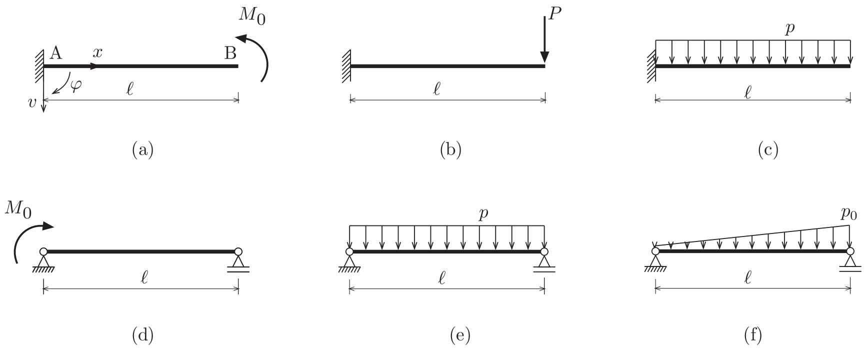
$$v_{mín} = -\frac{M_0 (0{,}140\,L)^3}{3EIL}$$

# PEF-2301 – Resistência dos Materiais e Estática das Construções II

Lista de Exercícios 1 – Deformações Transversais na Flexão.

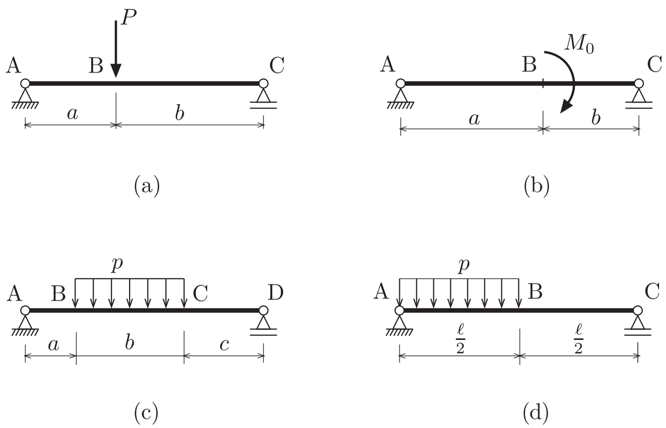
## 1 Vigas Simples Isostáticas

1. Determine as expressões dos deslocamentos transversais $v(x)$ e das rotações $\varphi(x)$ ao longo do eixo da barra, fornecendo a flecha (deslocamento máximo) e as rotações nas extremidades ($EI = \text{const.}$).




(a) (b) (c) (d) (e) (f)

2. Obtenha, por integração da linha elástica, o deslocamento transversal $v_B$ e a rotação $\varphi_B$ das vigas da figura ($EI = \text{const.}$) [Britto Costa].

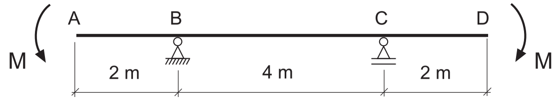



(a) (b) (c) (d)

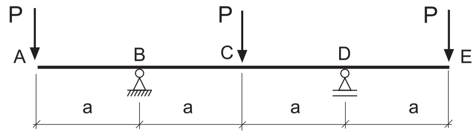


## 2 Sistema de Barras

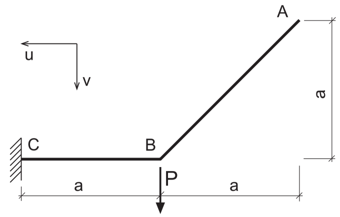
3. (1º semestre de 1975) Para a estrutura da figura, determine o valor da flecha em A, sendo $EI = 6{,}0 \times 10^7\,\mathrm{N\,m^2}$ e $M = 40\,\mathrm{kN\,m}$.



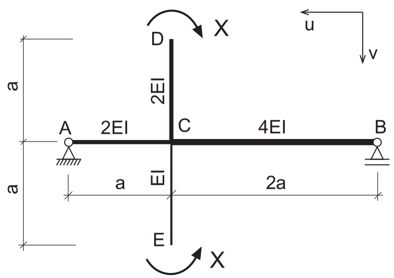

4. (1º semestre de 1980) Determine o deslocamento vertical do ponto A da figura ao lado para $EI$ constante.



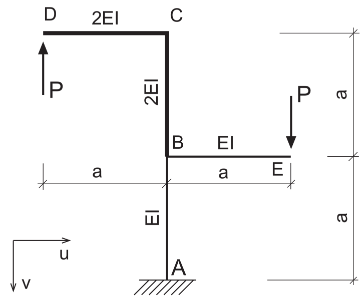

5. (2º semestre de 1973) Para a estrutura da figura, calcule os deslocamentos horizontal e vertical do ponto A. Considere $EI$ constante para as duas barras.



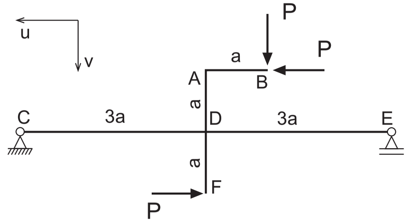

6. Para a estrutura da figura, determine o deslocamento horizontal do ponto E e o vertical do ponto C.



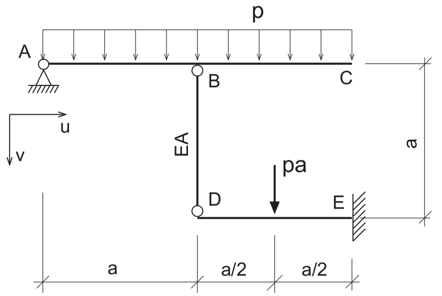

7. Na estrutura da figura, indique os deslocamentos horizontal e vertical, bem como a rotação do ponto E. Nas barras AB e BE considere o produto de inércia $EI$ e nas barras BC e CD o produto $2EI$.



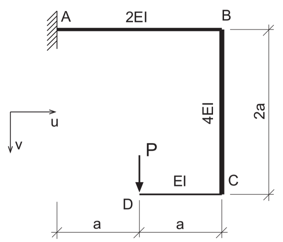
8. (2º semestre de 1980) Determinar os deslocamentos horizontal e vertical dos pontos B e F da estrutura da figura. Adotar $EI$ constante.




9. Para a estrutura da figura, calcule o deslocamento vertical do ponto C. A barra BD tem característica $EA = 96E_0I/a^2$ onde $E_0I$ é o produto de inércia das barras ABC e DE.

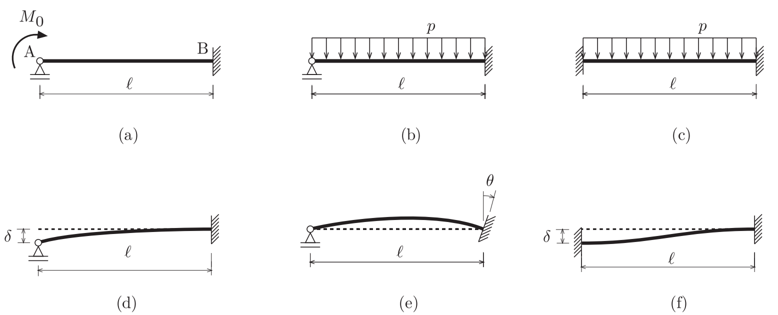



10. Para a estrutura da figura, calcule o deslocamento vertical do ponto D.




# 3 Vigas Simples Hiperestáticas

11. Traçar os diagramas de esforços solicitantes para as vigas hiperestáticas da figura. Todas as vigas são prismáticas com $EI = \text{const.}$ e comprimento $\ell$.






**Respostas Parciais**

Quando não explicitados, os sentidos positivos do deslocamento vertical e da rotação seguem os indicados na figura do Ex. 1.

1.

(a) $v_B = -\frac{M_0\ell^2}{2EI}$, $\varphi_B = -\frac{M_0\ell}{EI}$ (b) $v_B = \frac{P\ell^3}{3EI}$, $\varphi_B = \frac{P\ell^2}{2EI}$. (c) $v_B = \frac{p\ell^4}{8EI}$, $\varphi_B = \frac{p\ell^3}{6EI}$.

(d) $\varphi_A = \frac{M_0\ell}{3EI}$, $\varphi_B = -\frac{M_0\ell}{6EI}$, $v(x) = \frac{M_0}{6\ell EI}(2\ell^2x - 3\ell x^2 + x^3)$, $f = v(\frac{3-\sqrt{3}}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{27}\frac{M_0\ell^2}{EI}$.

(e) $\varphi_A = -\varphi_B = \frac{p_0\ell^3}{24EI}$ $f = v(\ell/2) = \frac{5}{384}\frac{p\ell^4}{EI}$

(f) $\varphi_A = \frac{7}{360}\frac{p_0\ell^3}{EI}$, $\varphi_B = -\frac{8}{360}\frac{p_0\ell^3}{EI}$, $v(x) = \frac{p_0\ell^3}{360EI}\left(\frac{3x^5}{\ell^4} - \frac{10x^3}{\ell^2} + 7x\right)$,
$f = v(0{,}51933\ell) = 0{,}00652\frac{p_0\ell^4}{EI}$

2.

(a) $v_B = \frac{Pa^2b^2}{3EI\ell}$, $\varphi_B = \frac{Pab(b-a)}{3EI\ell}$ (b) $v_B = \frac{M_0ab(b-a)}{3EI\ell}$, $\varphi_B = \frac{M_0(a^2+b^2-ab)}{3EI\ell}$

(c) $v_B = \frac{pab}{24EI\ell}(b^3 + 4bc^2 + 12abc + 8ac^2 + 4ab^2 + 4b^2c)$,
$\varphi_B = \frac{pb}{24EI\ell}(b^3 + 12abc - 8a^2c + 4b^2c + 8ac^2 + 4bc^2 - 4a^2b + 4ab^2)$

(d) $v_B = \frac{5}{768}\frac{p\ell^4}{EI}$ $\varphi_B = -\frac{p\ell^3}{384EI}$

3. $v_A = 4\,\text{mm}$ 4. $v_A = \frac{13}{12}\frac{Pa^3}{EI}$ 5. $v_A = \frac{5}{6}\frac{Pa^3}{EI}$, $u_A = -\frac{1}{2}\frac{Pa^3}{EI}$

6. $v_C = 0$, $u_E = -\frac{1}{2}\frac{Xa^2}{EI}$ 7. $\phi_E = \frac{5}{2}\frac{Pa^2}{EI}$, $u_E = \frac{Pa^3}{EI}$, $v_E = \frac{7}{3}\frac{Pa^3}{EI}$

8. $u_B = \frac{1}{3}\frac{Pa^3}{EI}$, $v_B = \frac{29}{6}\frac{Pa^3}{EI}$, $u_F = -\frac{5}{6}\frac{Pa^3}{EI}$, $v_F = \frac{9}{2}\frac{Pa^3}{EI}$ 9. $v_C = \frac{11}{6}\frac{pa^4}{EI}$ 10. $v_D = \frac{7}{6}\frac{Pa^3}{EI}$

11.

(a) $M_A = M_0$, $M_B = -\frac{M_0}{2}$, $V_A = V_B = -\frac{3M_0}{2\ell}$ (b) $M_B = -\frac{p\ell^2}{8}$, $V_A = \frac{3p\ell}{8}$, $V_B = -\frac{5p\ell}{8}$

(c) $M_A = M_B = -\frac{p\ell^2}{12}$, $V_A = -V_B = \frac{p\ell}{2}$ (d) $M_B = -\frac{3EI}{\ell^2}\delta$, $V_A = V_B = -\frac{3EI}{\ell^3}\delta$

(e) $M_B = -\frac{3EI}{\ell}\varphi$, $V_A = V_B = -\frac{3EI}{\ell^2}\varphi$ (f) $M_A = -M_B = \frac{6EI}{\ell^2}\delta$, $V_A = V_B = \frac{12EI}{\ell^3}\delta$