

PCS 3115 (PCS2215)

Sistemas Digitais I

Módulo 02 – Sistemas de Numeração

Prof. Dr. Marcos A. Simplicio Jr.

versão: 3.0 (Jan/2016)

Conteúdo

Sistemas de numeração

1. Base Decimal
2. Base Binária
3. Base Hexadecimal
4. Conversão entre Bases
5. Introdução à Aritmética das Bases Binária e Hexadecimal

Sistemas de Numeração – 1. Base Decimal

$$\begin{array}{cccc} 3 \times 10^3 & 6 \times 10^2 & 7 \times 10^1 & 2 \times 10^0 \\ \hline & | & | & | \\ & 3 & 6 & 7 & 2 \\ & & & & 2_{10} \end{array}$$

$$3672_{10} = 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

Base 10 utiliza 10 dígitos, com valores de 0 a 9

Notação Posicional: número inteiro

Base b utiliza b dígitos, com valores de 0 a $(b-1)$

$$(d_n d_{n-1} \dots d_1 d_0)_b = d_n \cdot b^n + d_{n-1} \cdot b^{n-1} + \dots + d_1 \cdot b^1 + d_0 \cdot b^0$$

1. Base Decimal

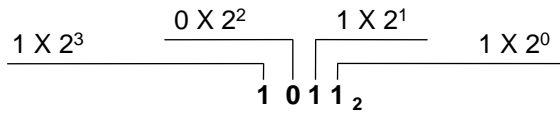
$$\begin{array}{cccc} & & 3 \times 10^{-1} & 5 \times 10^{-2} \\ & & | & | \\ & & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 7 & 2, & 3 & 5 \\ & & & & & 2_{10} \end{array}$$

$$3672,35_{10} = 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$$

Notação Posicional: número fracionário

$$(0, d_1 d_2 \dots d_{n-1} d_n)_b = d_1 \cdot b^{-1} + d_2 \cdot b^{-2} + \dots + d_{n-1} \cdot b^{-(n-1)} + d_n \cdot b^{-n}$$

2. Base Binária



$$1011_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Número em binário: 1 0 1 1 0 1, 0 1

Pesos (decimal): 32 16 8 4 2 1 1/2 1/4

$$101101,01_2 = 32 + 8 + 4 + 1 + 1/4 = 45,25_{10}$$

3. Base Hexadecimal

```

C:\Windows\system32\cmd.exe
Microsoft Windows [Version 6.1.7601]
Copyright (c) 2009 Microsoft Corporation. All rights reserved.

C:\Users\njunior>ipconfig

Windows IP Configuration

Ethernet adapter Local Area Connection:

    Connection-specific DNS Suffix  . : novalocal
    IPv6 Address . . . . . : fd53:8f98:1f0e:5:50cc:19ff:d109:e8af
    Link-local IPv6 Address . . . . . : fe80::50cc:19ff:09d1:e8af%12
    IPv4 Address. . . . . : 172.20.5.18
    Subnet Mask . . . . . : 255.255.254.0
    Default Gateway . . . . . : 172.20.4.1

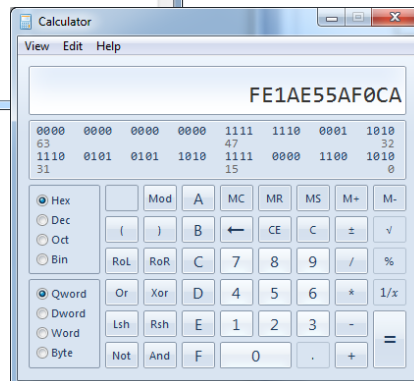
Wireless LAN adapter Wireless Network Connection:

    Media State . . . . . : Media disconnected
    Connection-specific DNS Suffix  . : novalocal

Tunnel adapter isatap.larc.intranet:

    Media State . . . . . : Media disconnected
    
```

Endereços IPv6



Calculadora do Windows:
View -> Programmer

3. Base Hexadecimal

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 10 \times 16^2 & & 5 \times 16^1 & & 11 \times 16^0 \\
 & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \\
 3 \times 16^3 & & & & & & \\
 \hline
 & & 3 & A & 5 & B & \\
 & & & & & & 16
 \end{array}$$

$$3A5B_{16} = 3 \cdot 16^3 + 10 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0$$

Dígitos Hexadecimais:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

- Por que usar hexa?
→ Representação "compacta"
- Mas então por que não usar decimal de uma vez?
→ Conversão para binário é fácil com hexa, nem tanto para decimal

4. Conversão Entre Bases

A) Base qualquer para base 10: Basta aplicar a definição.

$$\text{Ex.: } 3A5B_{16} = 3 \cdot 16^3 + 10 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 14939_{10}$$

B) Base 10 p/ base qualquer: divisões sucessivas pela base.

Intuição ("base 10 p/ base 10"): $14939/10 \rightarrow 1493 \cdot 10 + 9$

$$1493/10 \rightarrow 149 \cdot 10 + 3$$

(obs.: $14939 = 149 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$)

$$149/10 \rightarrow 14 \cdot 10 + 9$$

(obs.: $14939 = 14 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$)

$$14/10 \rightarrow 1 \cdot 10 + 4$$

...

$$1/10 \rightarrow 0 \cdot 10 + 1$$

$$\rightarrow 14939 = 1 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$$

4. Conversão Entre Bases

A) Base qualquer para base 10: Basta aplicar a definição.

$$\text{Ex.: } 3A5B_{16} = 3 \cdot 16^3 + 10 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 14939_{10}$$

B) Base 10 p/ base qualquer: divisões sucessivas pela base.

Exemplo: $14939_{10} \div 16$

Conversão para base 16

14939	16	
11	933	16
5	58	16
3	3	16
3	0	pare

[-signif.] B ← A ←

[+signif.]

$14939_{10} = 3A5B_{16}$

4. Conversão Entre Bases

C) Base 10 p/ base qualquer (parte fracionária): multiplicações sucessivas pela base.

Ex.: $0,6875_{10}$ para a base 2

$0,6875 \times 2 =$	↓	1	,375
$0,375 \times 2 =$	↓	0	,75
$0,75 \times 2 =$	↓	1	,5
$0,5 \times 2 =$	↓	1	,0

$0,6875_{10} = 0,1011_2$

→

4. Conversão Entre Bases

- Demonstração – Tomemos a expressão:

$$(0, d_1 d_2 \dots d_{n-1} d_n)_b = \underbrace{d_1 \cdot b^{-1} + d_2 \cdot b^{-2} + \dots + d_{n-1} \cdot b^{-(n-1)} + d_n \cdot b^{-n}}_{\text{representação na base 10}}$$

- Vamos multiplicar o segundo membro (base 10) por b:

$$d_1 \cdot b^{-1} \cdot b + d_2 \cdot b^{-2} \cdot b + \dots + d_{n-1} \cdot b^{-(n-1)} \cdot b + d_n \cdot b^{-n} \cdot b =$$

$$\boxed{d_1} + d_2 \cdot b^{-1} + \dots + d_{n-1} \cdot b^{-n} \cdot b + d_n \cdot b^{-(n+1)}$$

- Com isto conseguimos isolar o dígito d_1 . Se multiplicarmos novamente por b isolamos o dígito d_2 , e assim sucessivamente; em outras palavras, multiplica-se pela base b e isola-se a parte inteira.

4. Conversão Entre Bases

Métodos Práticos

- Número em binário para decimal

Número em binário: **1 0 1 1 0 1, 0 1**

Pesos: **32 16 8 4 2 1 1/2 1/4** = 45,25

- Número inteiro decimal para binário

$237_{10} = ?_2 \rightarrow$ maior potência de $2 = 2^7 = 128 \rightarrow$ sobra 109

109 contém 64 \rightarrow sobra 45

45 contém 32 \rightarrow sobra 13

13 não c. 16 \rightarrow sobra 13

13 contém 8 \rightarrow sobra 5

5 contém 4 \rightarrow sobra 1

1 não c. 2 \rightarrow sobra 1

1 contém 1 \rightarrow sobra 0

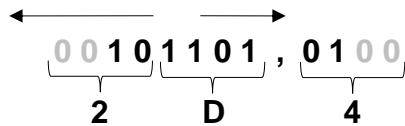
$237_{10} = 11101101_2$

1
1
1
0
1
1
0
1

4. Conversão Entre Bases

Métodos Práticos

- Número em binário para hexadecimal



$$101101,01_2 = 2D,4_{16}$$

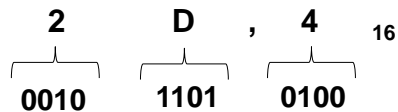
Regra:

Agrupa-se de 4 em 4 bits para a esquerda e para a direita a partir da vírgula, substituindo-se cada conjunto de 4 bits pelo dígito hexadecimal correspondente.

4. Conversão Entre Bases

Métodos Práticos

- Número em hexadecimal para binário



$$2D,4_{16} = 101101,01_2$$

Regra:

Substitui-se cada dígito Hexadecimal por 4 bits que possuam, em binário, o mesmo valor que o dígito hexadecimal substituído.

4. Conversão Entre Bases

Exercícios

4.1. Converta para as bases 2, 4, 8 e 16:

- a) $347, 125_{10}$ b) $189, 375_{10}$
c) $347, 125_8$ d) 1234_5

4.2. Coloque os números a seguir em ordem crescente.

233_{10} , EA_{16} , 11100111_2 , 177_8

4.2. Converta $FFFF_{16}$ para a base 10

5. Introdução à Aritmética nas Bases Binária e Hexadecimal

Operações aritméticas: Mesmos princípios de funcionamento, qualquer que seja a base.



**Sabemos realizar operações aritméticas.
Podemos realizar operações em qualquer base!**

5. Introdução à Aritmética nas Bases Binária e Hexadecimal

Exercícios

Ex. 5.1. Efetue as seguintes operações nas bases indicadas:

a) $11101,1_2 + 1110,01_2$ b) $11101,1_2 - 1110,01_2$

c) $11101,1_2 \times 10,1_2$ d) $11101,1_2 : 10,1_2$

Dica: em subtrações, represente o “empresta 1” como “empresta o valor da base”:

$$\begin{array}{r} +10 \\ \swarrow \downarrow \\ 13 \quad - \\ \hline 5 \\ \hline 8 \end{array}_{10}$$

$$\begin{array}{r} +8 \\ \swarrow \downarrow \\ 13 \quad - \\ \hline 5 \\ \hline 6 \end{array}_8$$

5. Introdução à Aritmética nas Bases Binária e Hexadecimal

Exercícios

Ex. 5.2. Efetue as seguintes operações nas bases indicadas:

a) $73,26_8 + 14,53_8$ b) $124,53_8 - 76,56_8$

5. Introdução à Aritmética nas Bases Binária e Hexadecimal

Exercícios

Ex. 5.2. Efetue as seguintes operações nas bases indicadas (continuação):

c) $C2B0_{16} + A9E5_{16}$

d) $C2B0_{16} - A9E5_{16}$

6. Aritmética com números sem sinal

Multiplicação

		Ex. Base 10
	A Multiplicando	9,6
×	B Multiplicador	× 0,57
-----		-----
	C Produto	672
		+ 480

		5,472

6. Aritmética com números sem sinal

Ex. Base 5

$$\begin{array}{r}
 23 \\
 \times 41 \\
 \hline
 23 \\
 + 202 \\
 \hline
 2043
 \end{array}$$

Ex. Base 16

$$\begin{array}{r}
 D \\
 \times 15 \\
 \hline
 41 \\
 + D \\
 \hline
 111
 \end{array}$$

6. Aritmética com números sem sinal

$$\begin{array}{r}
 1011 \quad \text{multiplicando} \\
 \times 1101 \quad \text{multiplicador} \\
 \hline
 1011 \\
 0000 \\
 1011 \\
 + 1011 \\
 \hline
 10001111
 \end{array}$$

Inconveniente: número de registradores é tão grande quanto número de bits do multiplicador

6. Aritmética com números sem sinal

```
      1011 Multiplicando
×   1101 Multiplicador
-----
      0000 Produto parcial inicial
x 1 + 1011 Multiplicando deslocado p/ esquerda de 0 posições
-----
      01011 Produto parcial
x 0 + 0000 Multiplicando deslocado p/ esquerda de 1 posição
-----
      001011 Produto parcial
x 1 + 1011 Multiplicando deslocado p/ esquerda de 2 posições
-----
      0110111 Produto parcial
x 1 + 1011 Multiplicando deslocado p/ esquerda de 3 posições
-----
      10001111 Produto
```

Algoritmo "shift-and-add":
apenas dois registradores
para dados parciais

6. Aritmética com números sem sinal

Exercícios

Ex. 6.1. Efetue as seguintes operações nas bases indicadas:

a) $A2_{16} * 352_{16}$

b) $1101_2 * 1101_2$

c) $250_{16} * 21_{16}$

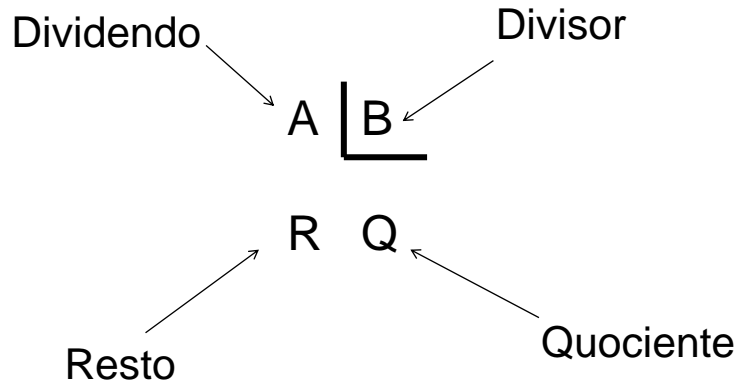
d) $250_8 * 21_8$

e) $111_{16} * 100_{16}$

f) $111_2 * 100_2$

6. Aritmética com números sem sinal

Divisão



6. Aritmética com números sem sinal

Ex. Base 10

$$\begin{array}{r} 5480 \overline{)57} \\ - 513 \\ \hline 350 \\ - 342 \\ \hline 8 \end{array}$$

Ex. Base 5

$$\begin{array}{r} 2044 \overline{)41} \\ - 132 \\ \hline 224 \\ - 223 \\ \hline 1 \end{array}$$

Ex. Base 16

$$\begin{array}{r} 113 \overline{)15} \\ - 111 \\ \hline 2 \end{array}$$

6. Aritmética com números sem sinal

base 2	base 10
$\begin{array}{r} 11011001 \\ - 1011 \\ \hline 00101 \\ - 0000 \\ \hline 1010 \\ - 0000 \\ \hline 10100 \\ - 1011 \\ \hline 10011 \\ - 1011 \\ \hline 1000 \end{array}$	$\begin{array}{r} 217 \\ - 11 \\ \hline 107 \\ - 99 \\ \hline 8 \end{array}$

Algoritmo "Shift-and-subtract":
Mesmo processo comumente usado com lápis e papel

6. Aritmética com números sem sinal

Exercícios

Ex. 6.2. Efetue as seguintes operações nas bases indicadas:

- a) $1010_2 / 11_2$
- b) $1010_2 / 10_2$
- c) $1010_{16} / 10_{16}$

Lição de Casa

- **Leitura Obrigatória:**
 - **Capítulo 2 do Livro Texto.**
- **Exercícios Obrigatórios:**
 - **Capítulo 2 do Livro Texto;**
 - **Lista de Exercícios do Módulo 2.**