Física para Engenharia II

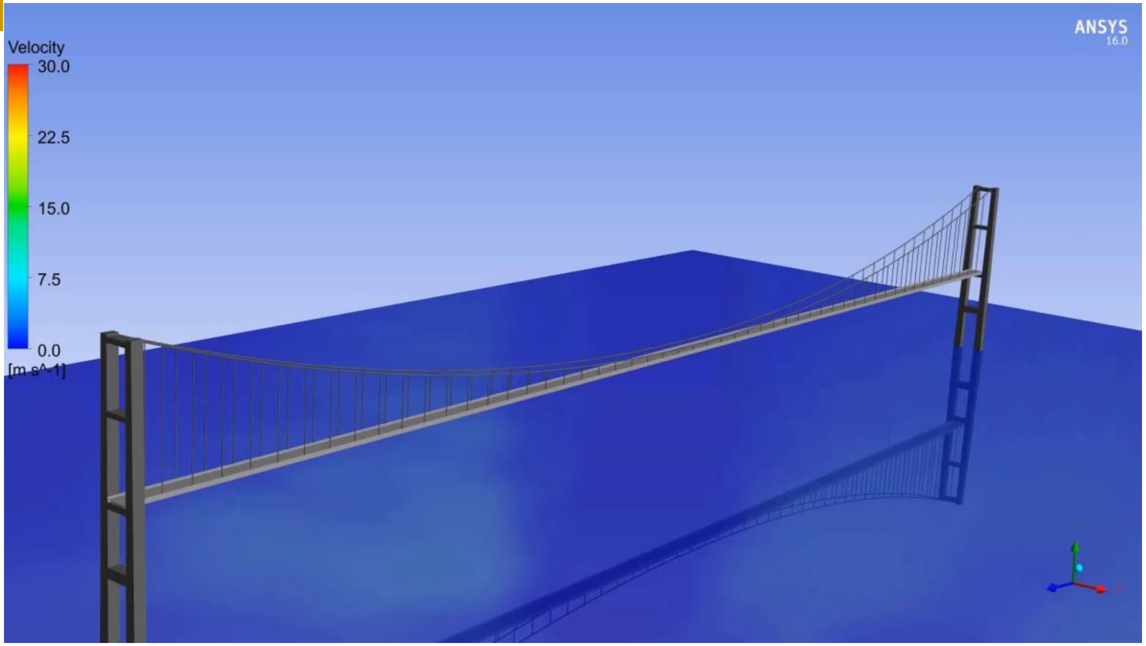
Profa. Márcia Regina Dias Rodrigues
Depto. Física Nuclear – IF – USP
Ed. Oscar Sala, sala 100
marciadr@if.usp.br


www.acoustics.salford.ac.uk


www.acoustics.salford.ac.uk

Tacoma Narrows Bridge – novembro 1940

by Stillman Fires Collection; Tacoma Fire Department (Video) - Castle Films (Sound)



Full scale, 2-way Fluid Structure Interaction (FSI) model of the Tacoma Narrows Bridge exhibiting aeroelastic flutter.

https://en.wikipedia.org/wiki/File:Tacoma_Bridge_Animation.ogv – autor Itravell

Duas hipóteses

Resonance (due to Von Kármán vortex street) hypothesis

Aeroelastic flutter

Oscilador Harmônico Amortecido

$$m\ddot{x} = -kx - \rho\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \gamma = \frac{\rho}{m}$$

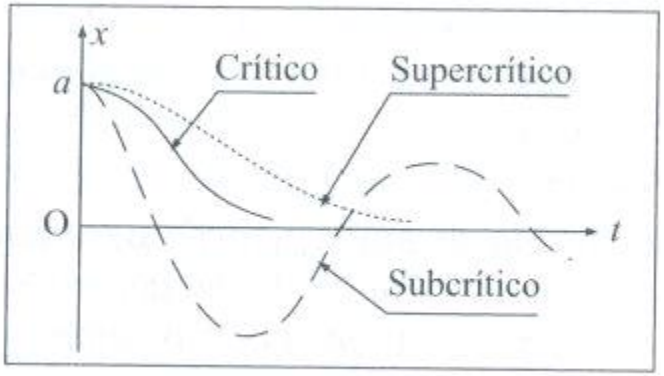


Figura 4.5 — *Comparação de amortecimentos*

$\boldsymbol{\frac{\gamma}{2} < \omega_0}$ **Amortecimento subcrítico**

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$\boldsymbol{\frac{\gamma}{2} > \omega_0}$ **Amortecimento supercrítico**

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(ae^{\beta t} + be^{-\beta t}\right) \quad \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

$\boldsymbol{\frac{\gamma}{2} = \omega_0}$ **Amortecimento crítico**

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt)$$

Oscilador Harmônico Forçado

Força externa periódica $\Rightarrow$ **Supre continuamente energia ao oscilador**

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

$$m\ddot{x} + kx = F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

$\omega_0 \longrightarrow$ Frequência própria natural

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\boxed{\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)}$$

Equação diferencial de 2ª ordem inomogênea

Não vale o princípio da superposição para $x_1(t)$ e $x_2(t)$ como na equação diferencial homogênea

Oscilador Harmônico Forçado

Princípio da superposição para equações diferenciais lineares inomogêneas

Se

$x_1(t)$ é solução para o 2º membro (termo inomogêneo) $F_1(t)$ e

$x_2(t)$ é solução para o 2º membro $F_2(t)$

Então

$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ é solução para $F(t) = aF_1(t) + bF_2(t)$

$F_2(t) = 0 \rightarrow$ solução homogênea

2 constantes arbitrárias → condições iniciais

Solução geral da equação diferencial inomogênea → Solução geral da equação homogênea + Solução particular da equação inomogênea

Oscilador Harmônico Forçado

Solução geral da equação diferencial inomogênea $\longrightarrow$ Solução geral da equação homogênea $+$ Solução particular da equação inomogênea

Solução geral da equação homogênea	Solução particular da equação inomogênea
$\Downarrow$	$\Downarrow$
Oscilações livres	Oscilações forçadas
Dissipação amortecimento	Continua suprindo energia
Tendem a zero $t \to \infty$	Persistem $t \gg \tau_{d_2}(t)$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
Efeito transitório	$\boxed{\text{Solução estacionária}}$
	Solução de interesse

Oscilador Harmônico Forçado

Solução particular da equação inomogênea → solução estacionária

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t}$$ Solução particular

$$\dot{z} = i\omega z_0 e^{i\omega t} = i\omega z(t)$$ $$\ddot{z} = -1\omega^2 z_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 z(t)$$

$$-\omega^2 z + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$z(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}$$

Oscilador Harmônico Forçado

Solução particular da equação inomogênea → solução estacionária

$$z(t) = \underbrace{\boxed{\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}}}_{Ae^{i\varphi}} e^{i\omega t}$$

$$\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = Ae^{i\varphi}$$

$$A = \frac{F_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|}$$

$$\begin{cases} \varphi = 0 \rightarrow \omega < \omega_0 \\ \varphi = -\pi \rightarrow \omega > \omega_0 \end{cases}$$

$$z(t) = Ae^{i\varphi}e^{i\omega t} = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$\mathrm{z}(t) = A[cos(\omega t + \varphi) + isen(\omega t + \varphi)]$$

Parte real

$$x(t) = \mathrm{A}\cos(\omega t + \varphi)$$

Oscilador Harmônico Forçado

Interpretação Física

$\omega \ll \omega_0$ Limite de baixas frequências

$$x(t) = \mathrm{A}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad \ll \quad \omega_0^2 x$$

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad \rightarrow \omega_0^2 x \approx \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

$$x \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2}\cos(\omega t) \qquad \omega \ll \omega_0$$

Deslocamento no mesmo sentido da força externa $\varphi = 0$

Equilibra força restauradora

$$-kx + F(t) \approx 0$$

Movimento dominado pela Força restauradora → limite de equilíbrio estático $\omega \rightarrow 0$

Oscilador Harmônico Forçado

Interpretação Física

$\omega \gg \omega_0$ Limite de altas frequências

$$-\omega_0^2 x \ll \ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad \rightarrow -\omega^2 x \approx \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

$$x \approx -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos(\omega t) \qquad \omega \gg \omega_0$$

Deslocamento está em oposição de fase com a força externa $\varphi = -\pi$

Aceleração quase totalmente fornecida pela força externa

$$-kx \approx 0$$

$\boxed{\text{Movimento dominado pela Inércia}}$

$|x|$ é muito menor para $\omega \gg \omega_0$ que para $\omega \ll \omega_0$

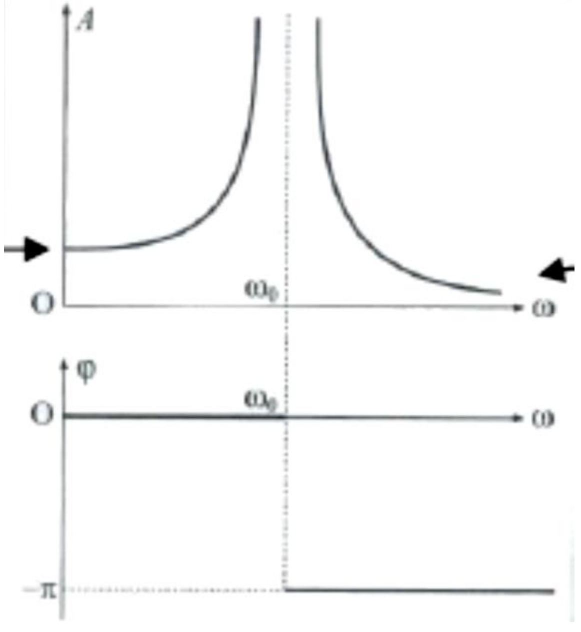
$x \rightarrow 0 \quad \omega \rightarrow \infty$ A inércia do oscilador não permite acompanhar oscilações excessivamente rápidas da força externa. Amplitude de resposta é muito pequena

Oscilador Harmônico Forçado

Interpretação Física

$\omega = \omega_0$ Ressonância

$$A = \frac{F_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|}$$



$\omega \to \omega_0$ $\quad A \to \infty$

Frequência da força externa

Frequência oscilação livre

- Dissipação por menor que seja não pode ser desprezada $\omega \approx \omega_0$ (elimina a divergência e descontinuidade)
- Se a amplitude cresce suficiente a aproximação de pequenas oscilação não é válida e ocorrem efeitos não lineares

Oscilador Harmônico Forçado

Solução geral → Solução particular + Solução geral Problema das oscilações livres

Solução geral $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega t) + Bcos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

B e φ_0 são constantes determinadas pelas condições iniciais

$$\dot{x}(t) = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\omega\text{sen}(\omega t) - B\omega_0 sen(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Condições iniciais $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

$$x(0) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + Bcos\varphi_0 = 0$$

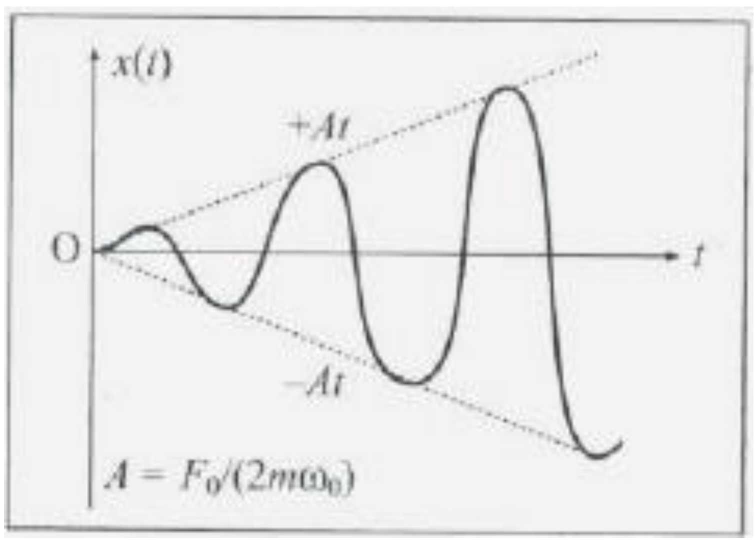
$$\dot{x}(0) = -B\omega_0 sen(\varphi_0) = 0 \qquad \varphi_0 = 0 \qquad B = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Oscilador Harmônico Forçado

$$x(t) = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\left[\frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)}{\omega_0 - \omega}\right]$$

Superposição de MHS de frequências diferentes (livre e forçada) podendo levar a batimentos $\omega \approx \omega_0$

$$\lim_{\omega\to\omega_0}\left[\frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega - \omega_0}\right] = \left[\frac{d}{d\omega}\cos(\omega t)\right]_{\omega=\omega_0} = -t sen(\omega_0 t)$$



$$x(t) = -\frac{F_0}{2m\omega_0} t sen(\omega_0 t) \qquad \boldsymbol{\omega = \omega_0}$$

Crescimento linear com o tempo da Amplitude até que seja estabilizada por outros efeitos (dissipativos ou não-lineares)