Física para Engenharia II

Profa. Márcia Regina Dias Rodrigues
Depto. Física Nuclear – IF – USP
Ed. Oscar Sala, sala 100
marciadr@if.usp.br

Oscilador Harmônico Amortecido

Força de amortecimento proporcional à velocidade

$$m\ddot{x} = -kx - \rho\dot{x} \qquad \rho > 0$$

Resistência dissipativa → Sentido oposto à velocidade

$$\ddot{x} = -\underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}x - \underbrace{\frac{\rho}{m}}_{\gamma}\dot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Equação diferencial linear homogênea

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \gamma = \frac{\rho}{m} > 0$$

Oscilador Harmônico Amortecido

Força de amortecimento proporcional à velocidade

Solução usando notação complexa

$$z(t) = e^{pt} \qquad \dot{z} = pe^{pt} = pz \qquad \ddot{z} = p^2 e^{pt} = p^2 z$$

$$p^2 z + \gamma p z + \omega_0^2 z = 0$$

$$\boxed{p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0} \rightarrow$$

Equação característica

Solução equação de segundo grau

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

raízes

$$\boxed{p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}}$$

$$p_{\pm} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

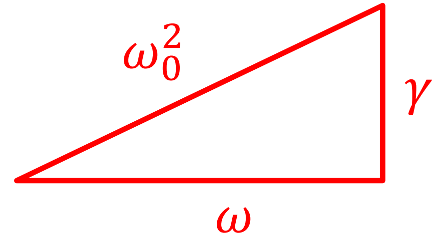
Oscilador Harmônico Amortecido

Força de amortecimento proporcional à velocidade

$$\boxed{p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\gamma}{2} < \omega_0}$$

Amortecimento subcrítico



Raiz quadrada de um número negativo

$$p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$z(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} C e^{i\omega t} \qquad C = Ae^{i\varphi}$$

$$z(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} A e^{i\varphi} e^{i\omega t} = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$= Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}[cos(\omega t + \varphi) + isen(\omega t + \varphi)]$$

Parte real

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} cos(\omega t + \varphi)}$$

Oscilador Harmônico Amortecido

Força de amortecimento proporcional à velocidade

$\frac{\gamma}{2} < \omega_0$ **Amortecimento subcrítico**

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{\gamma}{2}x(t) - A\omega e^{-\frac{\gamma}{2}t}sen(\omega t + \varphi)$$

Ajuste das condições iniciais

$$x(0) = x_0 = Acos(\varphi)$$

$$cos(\varphi) = \frac{x_0}{A}$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = -\frac{\gamma}{2}Acos(\varphi) - A\omega\, sen(\varphi)$$

$$sen(\varphi) = \sqrt{1 - cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{{x_0}^2}{A^2}}$$

$$v_0 = -\frac{\gamma}{2}A\frac{x_0}{A} - A\omega\sqrt{1 - \frac{{x_0}^2}{A^2}}$$

Oscilador Harmônico Amortecido

Força de amortecimento proporcional à velocidade

$\boldsymbol{\frac{\gamma}{2} < \omega_0}$ **Amortecimento subcrítico**

$$v_0 = -\frac{\gamma}{2} A \frac{x_0}{A} - A\omega \sqrt{1 - \frac{{x_0}^2}{A^2}}$$

$$cos(\varphi) = \frac{x_0}{A}$$

$$\frac{1}{\omega}\left(v_0 + \frac{\gamma}{2} x_0\right) = \sqrt{A^2 - {x_0}^2}$$

$$A^2 = \frac{1}{\omega^2}\left(v_0 + \frac{\gamma}{2} x_0\right)^2 + {x_0}^2$$

Oscilador Harmônico Amortecido

Força de amortecimento proporcional à velocidade

$\frac{\gamma}{2} < \omega_0$ **Amortecimento subcrítico**

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}cos(\omega t + \varphi)$$

$$\varphi = 0$$

Amortecimento fraco $\gamma \ll \omega_0$

$Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \longrightarrow$ Varia lentamente envoltória

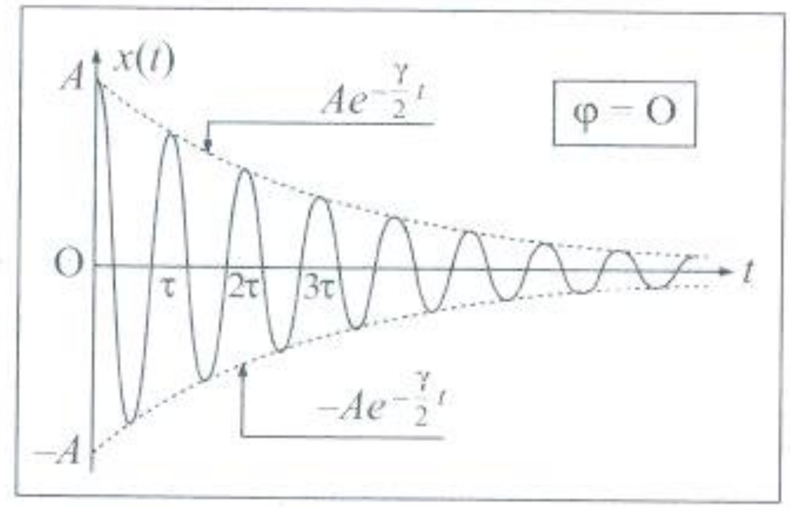


Figura 4.1 — Oscilações amortecidas

Movimento não é mais periódico

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \qquad \omega < \omega_0$$

Oscilador Harmônico Amortecido

Força de amortecimento proporcional à velocidade

$\boldsymbol{\frac{\gamma}{2} < \omega_0}$ **Amortecimento subcrítico**

Energia $E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t)$ Não se conserva

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx)$$

$-\rho\dot{x}$

Força de resistência

$$m\ddot{x} = -kx - \rho\dot{x}$$

$$\frac{dE}{dt} = -\rho\dot{x}^2 = -m\gamma\dot{x}^2 \leq 0$$

$$\gamma = \frac{\rho}{m}$$

Oscilador Harmônico Amortecido

Força de amortecimento proporcional à velocidade

$\frac{\gamma}{2} < \omega_0$ **Amortecimento subcrítico**

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}cos(\omega t + \varphi)$$

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t)$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{\gamma}{2}x(t) - A\omega e^{-\frac{\gamma}{2}t}sen(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2}mA^2e^{-\gamma t}\left[\frac{\gamma^2}{4}cos^2(\omega t + \varphi) + \omega^2 sen^2(\omega t + \varphi)\right.$$

$$\left. + \boxed{2}\frac{\gamma}{2}\omega \boxed{cos(\omega t + \varphi)sen(\omega t + \varphi)} + \boxed{\frac{k}{m}}cos^2(\omega t + \varphi)\right]$$

$$\mathrm{sen}(2\theta) = 2sen\theta cos\theta$$

$$\omega_0^2$$

Oscilador Harmônico Amortecido

Força de amortecimento proporcional à velocidade

$\boldsymbol{\frac{\gamma}{2} < \omega_0}$ **Amortecimento subcrítico**

Varia pouco

$$E(t) = \frac{1}{2} m A^2 \boxed{e^{-\gamma t}} \left[\left(\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right) cos^2(\omega t + \varphi) + \omega^2 sen^2(\omega t + \varphi) + \frac{\gamma}{2} \omega sen[2(\omega t + \varphi)] \right]$$

Amortecimento fraco $\gamma \ll \omega_0$

Valor médio em um período

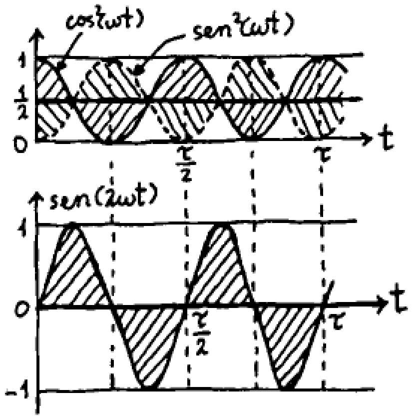
$$\bar{E}(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} E(t') dt' \qquad e^{-\gamma t'} \approx e^{-\gamma t} \approx constante$$

Oscilador Harmônico Amortecido

Força de amortecimento proporcional à velocidade

$\frac{\gamma}{2} < \omega_0$ **Amortecimento subcrítico**

Amortecimento fraco $\gamma \ll \omega_0$



$$e^{-\gamma t'} \approx e^{-\gamma t} \approx constante$$

$$\overline{cos^2(\omega t + \varphi)} = \overline{sen^2(\omega t + \varphi)} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} E(t')dt'$$

$$\overline{sen^2[2(\omega t + \varphi)]} = 0$$

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{2}mA^2 e^{-\gamma t}\left[\left(\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right)\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}mA^2 e^{-\gamma t}\left[\left(\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}mA^2 e^{-\gamma t}\omega_0^2$$

Oscilador Harmônico Amortecido

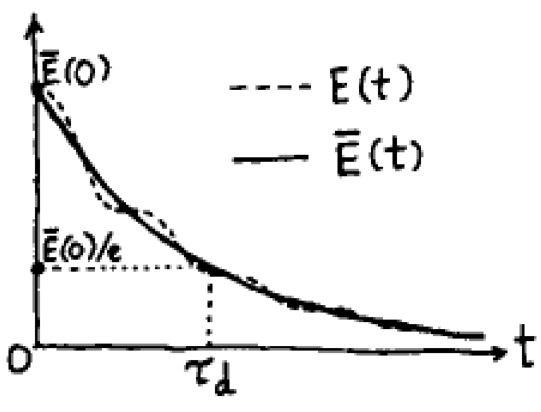
Força de amortecimento proporcional à velocidade

$\boldsymbol{\frac{\gamma}{2} < \omega_0}$ **Amortecimento subcrítico**

Amortecimento fraco $\gamma \ll \omega_0$

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 e^{-\gamma t} = \bar{E}(0)e^{-\gamma t}$$

Energia decai exponencialmente



Tempo de decaimento

$$\bar{E}(0) \rightarrow \frac{\bar{E}(0)}{e}$$

$$\frac{\bar{E}(0)}{e} = \bar{E}(0)e^{-\gamma\tau_d}$$

$$e^{-\gamma\tau_d+1} = 1$$

$$\tau_d = \frac{1}{\gamma}$$

$$-\gamma\tau_d + 1 = 0$$

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -\gamma\bar{E}$$

γ →taxa de decréscimo relativo de $\bar{E}$ por unidade de t

Oscilador Harmônico Amortecido

Força de amortecimento proporcional à velocidade

$\frac{\gamma}{2} < \omega_0$ **Amortecimento subcrítico** Amortecimento fraco $\gamma \ll \omega_0$

Fator de mérito

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -\gamma \bar{E}$$

Energia mecânica média armazenada no oscilador no instante considerado

Energia dissipada em 1 ciclo

$$\Delta \bar{E} = -\frac{d\bar{E}}{dt}\tau = \gamma \bar{E} \tau$$

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{(Energia\ armazenada\ no\ oscilador)}{(Energia\ dissipada\ por\ ciclo)}}$$

Fator de mérito

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$Q = 2\pi \frac{\bar{E}}{\Delta \bar{E}} = \frac{2\pi}{\gamma\tau} = \frac{\omega_0}{\gamma} \gg 1 \qquad \gamma \ll \omega_0$$

$$\tau_d = \frac{1}{\gamma}$$

Quanto $> Q \rightarrow <$amortecimento para a oscilação

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{\tau_d}{\tau}}$$

Oscilador Harmônico Amortecido

Força de amortecimento proporcional à velocidade

$\frac{\gamma}{2} > \omega_0$ **Amortecimento supercrítico**

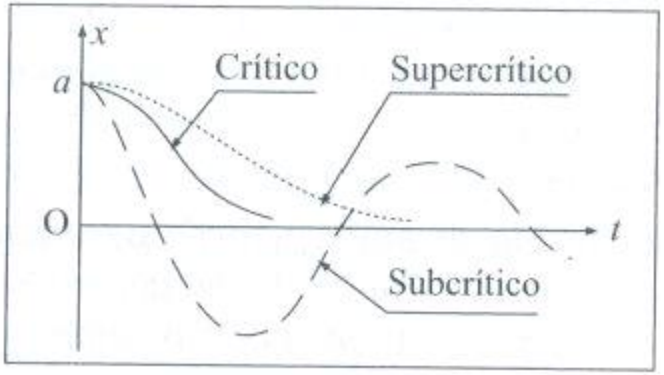


Figura 4.5 — *Comparação de amortecimentos*

$$p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(ae^{\beta t} + be^{-\beta t}\right) \qquad \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \qquad \beta < \frac{\gamma}{2}$$

$$x(t) = ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}-\beta\right)t} + be^{-\left(\frac{\gamma}{2}+\beta\right)t}$$

Soma de duas exponenciais decrescentes → Movimento não é periódico. Domina o amortecimento

Oscilador Harmônico Amortecido

Força de amortecimento proporcional à velocidade

$\frac{\gamma}{2} = \omega_0$ **Amortecimento crítico**

$$x(t) = ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}-\beta\right)t} + be^{-\left(\frac{\gamma}{2}+\beta\right)t}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a+b)$$ Uma solução

$$x_1(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\boxed{\left(\frac{ae^{\beta t}-be^{-\beta t}}{2\beta}\right)}$$

$\beta \to 0$

$$\left[\frac{d}{d\beta}\left(e^{\beta t}\right)\right]_{\beta=0} = t$$

$$x_1(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, t$$ Segunda solução

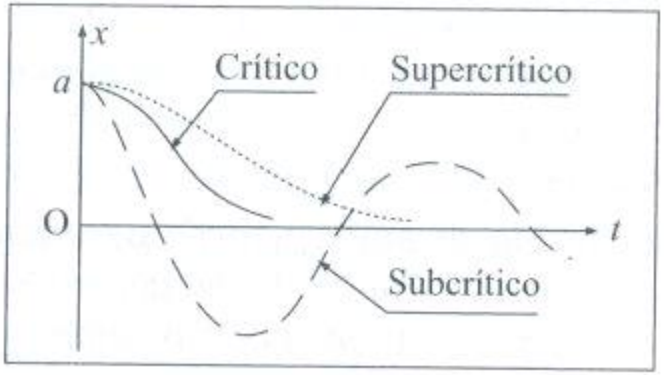


Figura 4.5 — *Comparação de amortecimentos*

Solução Geral

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a+bt)$$

Oscilador Harmônico Amortecido

$$m\ddot{x} = -kx - \rho\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \gamma = \frac{\rho}{m}$$

$$\frac{\gamma}{2} < \omega_0$$ **Amortecimento subcrítico**

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$\frac{\gamma}{2} > \omega_0$$ **Amortecimento supercrítico**

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(ae^{\beta t} + be^{-\beta t}\right) \quad \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

$$\frac{\gamma}{2} = \omega_0$$ **Amortecimento crítico**

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt)$$

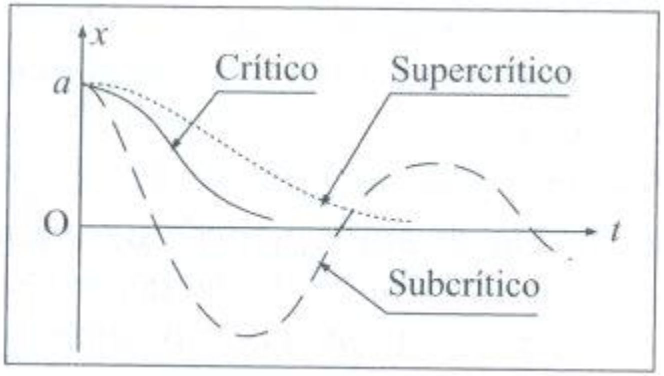


Figura 4.5 — *Comparação de amortecimentos*