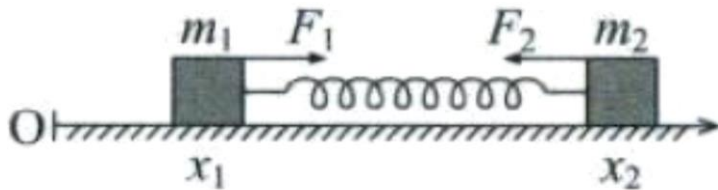

Física para Engenharia II

Profa. Márcia Regina Dias Rodrigues
Depto. Física Nuclear – IF – USP
Ed. Oscar Sala, sala 100
marciadr@if.usp.br

Aplicações do MHS

Oscilação de duas partículas



l é o comprimento de equilíbrio

Deformação da mola

$$x = (x_2 - x_1) - l$$

Forças Restauradoras $x > 0$

$$F_1 = kx = -F_2$$

Equação do movimento:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = kx \\ m_2 \ddot{x}_2 = -kx \end{cases}$$

Coordenadas do CM

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} \quad M = m_1 + m_2$$

$$\dot{X} = V = \text{const} \quad \ddot{X} = 0$$

$$\begin{cases} m_2 m_1 \ddot{x}_1 = m_2 kx \\ m_1 m_2 \ddot{x}_2 = -m_1 kx \end{cases}$$

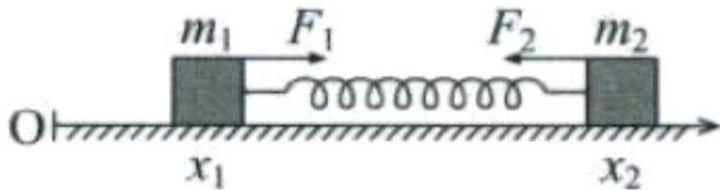
$$m_1 m_2 (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -(m_1 + m_2) kx$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \left(\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) \right) = -kx$$

$$\ddot{x} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$$

Aplicações do MHS

Oscilação de duas partículas



$$E_{total} = E_{int} + E_{cm}$$

$$E_{cm} = K_{cm} = \frac{1}{2}MV^2$$

$$\mu\ddot{x} = -kx$$

$$K_{int} = \frac{1}{2}(m_1v_1'^2 + m_2v_2'^2)$$

$$\mu = \frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)}$$

Velocidades relativas ao cm

$$v_1' = -\frac{m_2}{M}\dot{x} \quad v_2' = \frac{m_1}{M}\dot{x}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$K_{int} = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2^2 + m_2m_1^2}{M^2}\right)\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2$$

Energia de um oscilador harmônico simples de massa μ

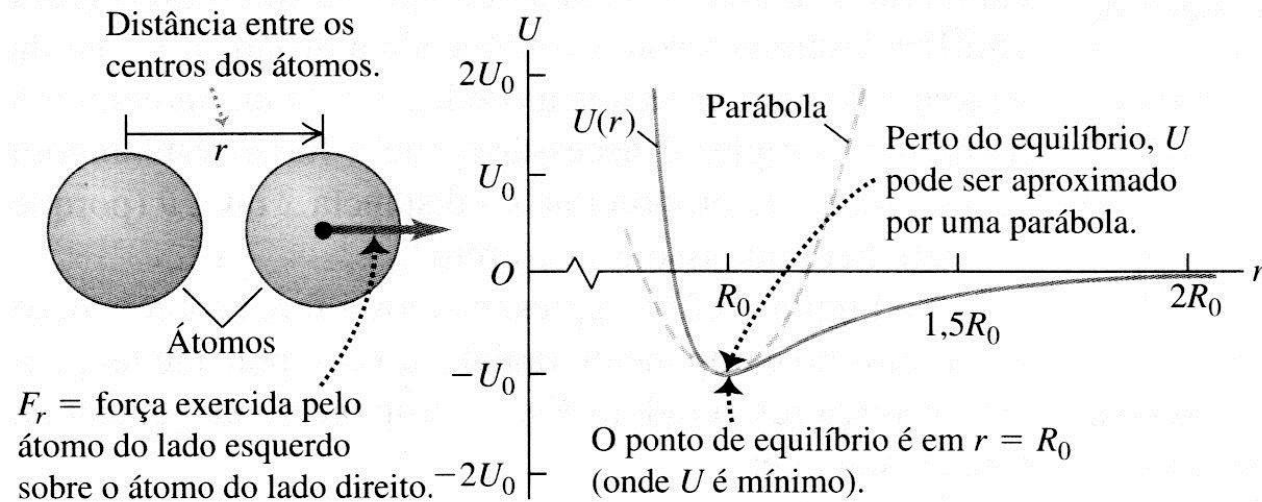
$$E_{int} = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

A energia do cm e a energia interna se conservam separadamente. A translação do cm não afeta a oscilação

Aplicações do MHS

Molécula Diatômica

- (a) Sistema de dois átomos. (b) Energia potencial U do sistema de dois átomos em função de r .

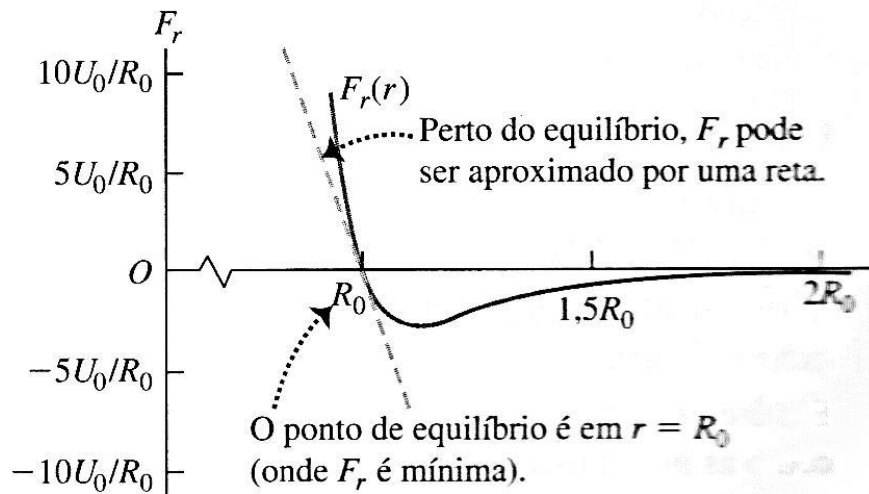


$$U(r) = U_0 \left[\left(\frac{R_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{R_0}{r} \right)^6 \right]$$

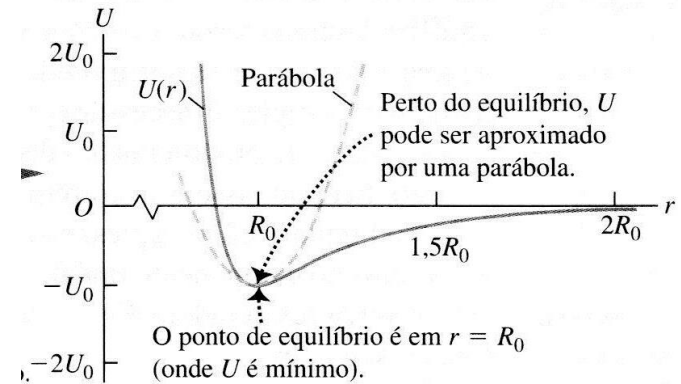
Aplicações do MHS

Molécula Diatômica

(c) A força F_r em função de r .



(b) Energia potencial U do sistema de dois átomos em função de r .

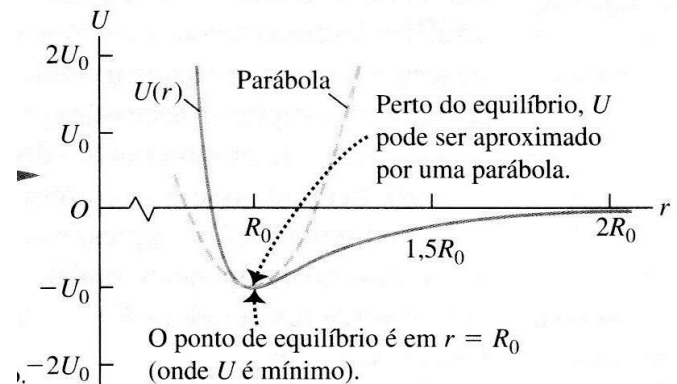
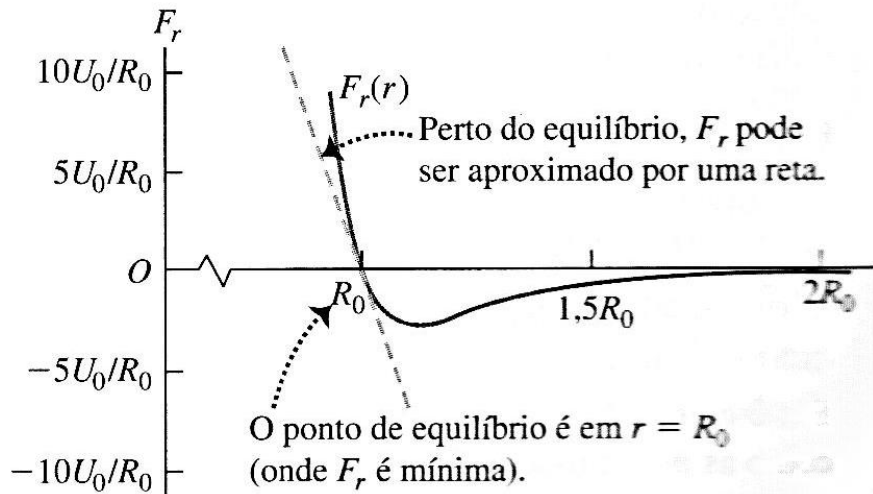


$$F_r = -\frac{dU}{dr} = U_0 \left[\frac{12R_0^{12}}{r^{13}} - 2\frac{6R_0^6}{r^7} \right]$$
$$F_r = 12\frac{U_0}{R_0} \left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{r}\right)^7 \right]$$

$$x = r - R_0 \rightarrow r = R_0 + x$$

Aplicações do MHS

Molécula Diatômica



$$F_r = -\frac{dU}{dr} = U_0 \left[\frac{12R_0^{12}}{r^{13}} - 2\frac{6R_0^6}{r^7} \right]$$

$$F_r = 12\frac{U_0}{R_0} \left[\left(\frac{R_0}{r} \right)^{13} - \left(\frac{R_0}{r} \right)^7 \right]$$

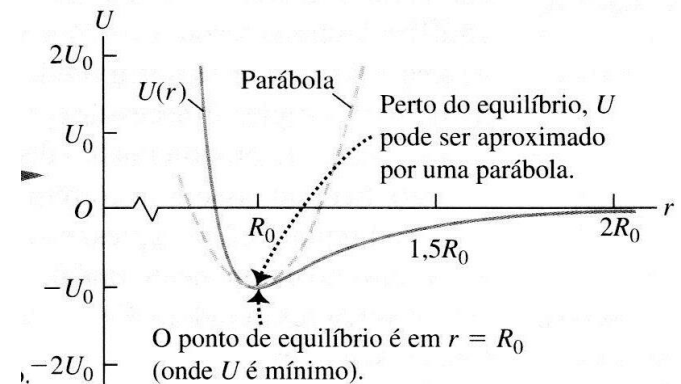
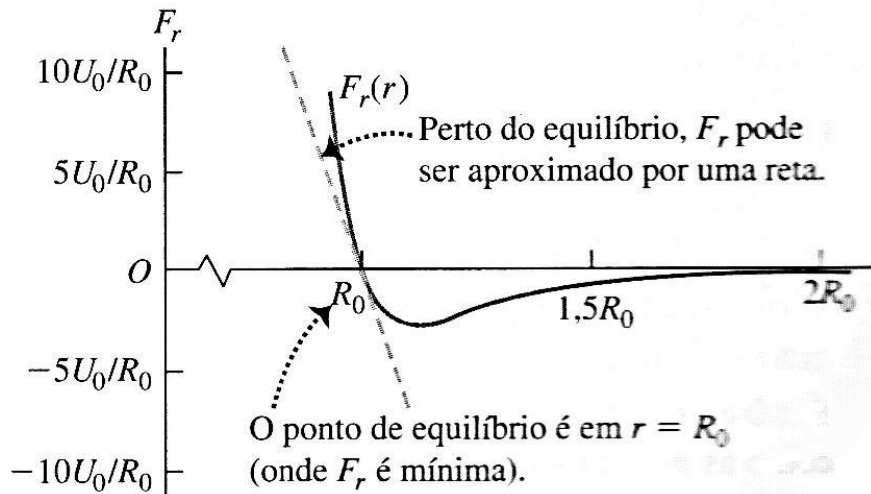
$$x = r - R_0 \rightarrow r = R_0 + x$$

$$\begin{aligned} F_r &= 12\frac{U_0}{R_0} \left[\left(\frac{R_0}{R_0 + x} \right)^{13} - \left(\frac{R_0}{R_0 + x} \right)^7 \right] \\ &= 12\frac{U_0}{R_0} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{R_0} \right)^{13}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{R_0} \right)^7} \right] \end{aligned}$$

Para pequenos deslocamentos da posição $r = R_0$

Aplicações do MHS

Molécula Diatômica



Para pequenos deslocamentos da posição $r = R_0$

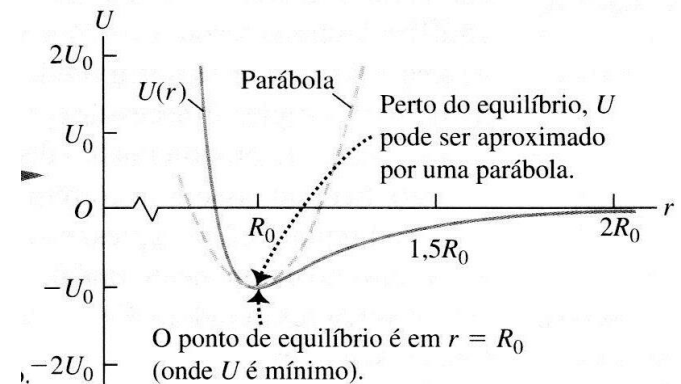
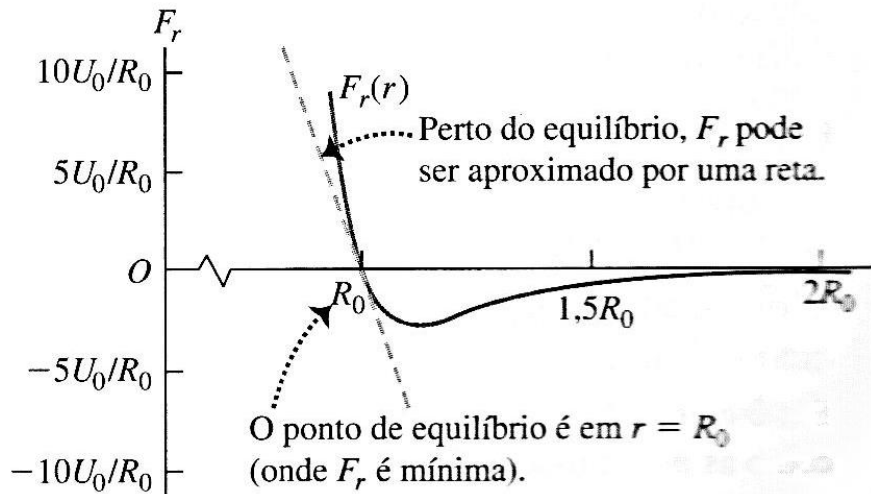
$$(1 + u)^n = 1 + nu + \frac{n(n-1)}{2!} u^2 + \dots$$

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{R_0}\right)^{13}} = \left(1 + \frac{x}{R_0}\right)^{-13} \approx 1 + (-13) \frac{x}{R_0}$$

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{R_0}\right)^7} = \left(1 + \frac{x}{R_0}\right)^{-7} \approx 1 + (-7) \frac{x}{R_0}$$

Aplicações do MHS

Molécula Diatômica



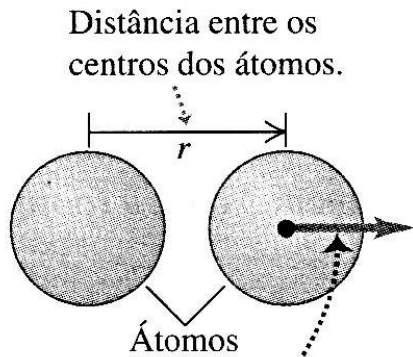
Para pequenos deslocamentos da posição $r = R_0$

$$F_r \approx 12 \frac{U_0}{R_0} \left[\left(1 + (-13) \frac{x}{R_0} \right) - \left(1 + (-7) \frac{x}{R_0} \right) \right] = - \left(\frac{72U_0}{R_0^2} \right) x$$

$$k = \left(\frac{72U_0}{R_0^2} \right) \quad U \approx \frac{1}{2} kx^2 - U_0$$

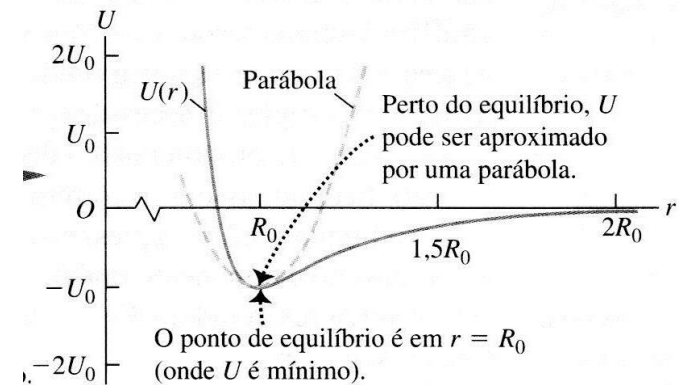
Aplicações do MHS

Molécula Diatômica



F_r = força exercida pelo átomo do lado esquerdo sobre o átomo do lado direito.

Portanto, a molécula oscila em relação ao centro de massa, com frequência



Para pequenos deslocamentos da posição $r = R_0$

$$U \approx \frac{1}{2} kx^2 - U_0 \quad k = \left(\frac{72U_0}{R_0^2} \right)$$

$$\mu \ddot{x} = -kx \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Aplicações do MHS

Molécula Diatômica

$$\mu \ddot{x} = -kx \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$$

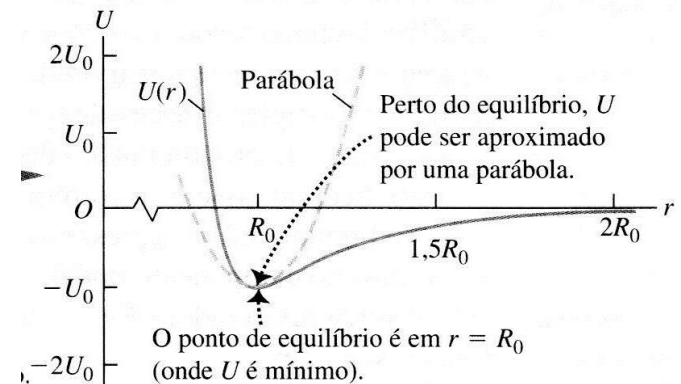
$$k = \left(\frac{72U_0}{R_0^2} \right) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Para uma molécula de CO, $R_0 \sim 1,1 \times 10^{-10} \text{m}$ e a energia de dissociação é $U_0 = 10 \text{ eV}$ $m(\text{C}) = 2 \times 10^{-26} \text{kg}$ e $m(\text{O}) = 2,7 \times 10^{-26} \text{kg}$.

$$k \approx 9,5 \times 10^3 \text{ N/m} \rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} \approx 1,4 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

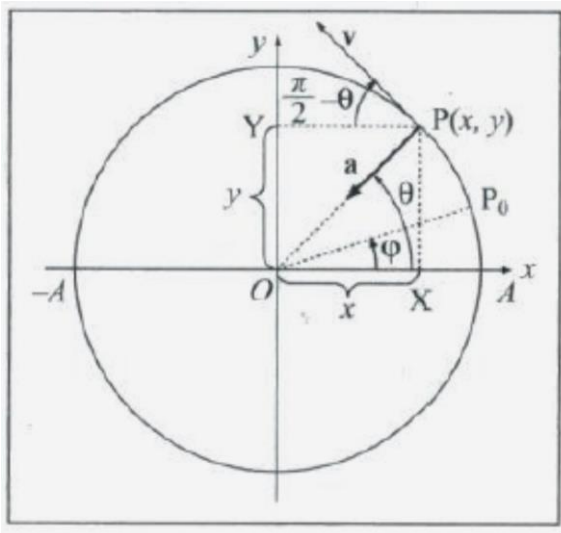
$$\lambda = \frac{c}{\nu} \approx 2 \times 10^{-6} \text{ m} = 2 \mu\text{m}$$

Região do infravermelho



Para pequenos deslocamentos da posição $r = R_0$

MHS e MCU



MCU

$$\theta = \omega t + \varphi$$

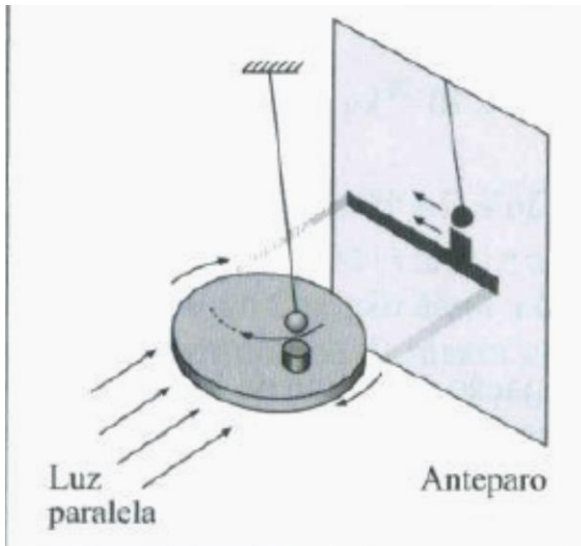
$$\overline{OX} = x = A \cos \theta = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Deslocamento instantâneo da partícula em MHS.

$$v_x = -\omega A \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = \dot{x}$$

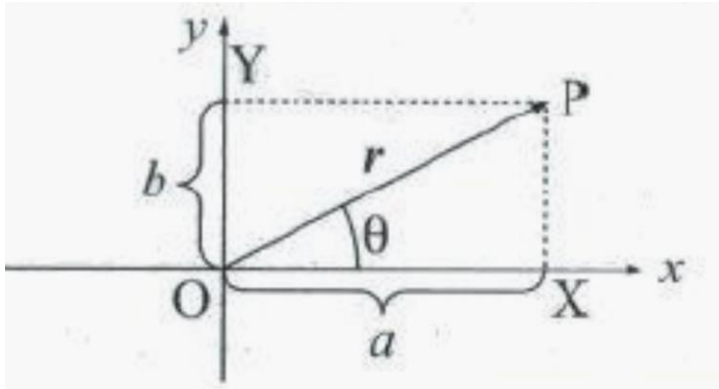
$$a_x = -\omega^2 A \cos \theta = -\omega^2 x = \ddot{x} \quad \text{Coincide com MHS}$$

Pêndulo simples e um disco



$$\begin{aligned} \overline{OY} = y &= A \operatorname{sen} \theta = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \\ &= A \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

MHS e MCU



Vetor girante \overrightarrow{OP} e o círculo de referência

$$\overrightarrow{OP} = a\hat{i} + b\hat{j}$$

Número complexo

$$\hat{i} \rightarrow 1$$

$$\hat{j} \rightarrow i$$

$$z = a + ib$$

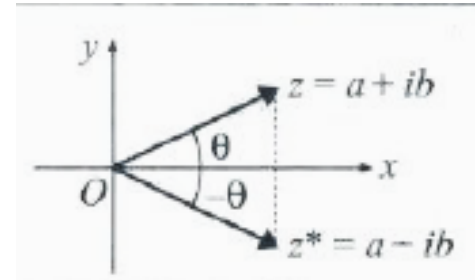
$i \equiv$ rotação de $+\frac{\pi}{2}$ no plano xy

$$i^2 = -1 \rightarrow i = \sqrt{-1}$$

$$z = a + ib \rightarrow \begin{cases} a \equiv \text{Re}z \\ b \equiv \text{Im}z \end{cases}$$

Complexo conjugado

$$z^* = (a + bi)^* = a - bi$$

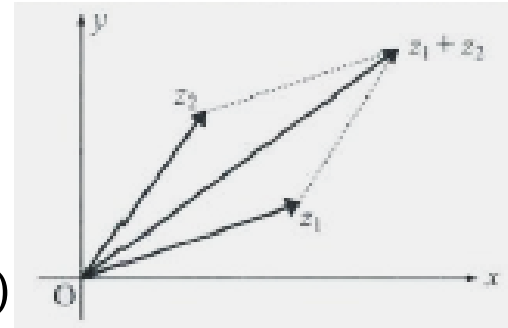


MHS e MCU

Número complexo

soma

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$



produto

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Módulo de um complexo

$$|z|^2 = zz^* = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

Quociente

$$\frac{(c + id)}{(a + ib)} = \frac{(c + id)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + i \frac{ad + bc}{a^2 + b^2}$$

MHS e MCU

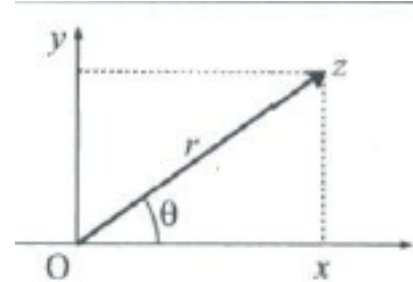
Número complexo

A fórmula de Euler (1748)

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + z^*) \\ \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - z^*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ \operatorname{sen} x = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \end{cases}$$



Coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r e^{i\theta}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}(y/x)$$

$$e^{\pm i\pi} = -1$$

MHS e MCU

Aplicação no MHS

$$p = i\omega$$

C constante complexa

$$z(t) = Ce^{i\omega t} \quad C = Ae^{i\varphi}$$

$$z(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re}z(t) = \operatorname{Re}[Ae^{i(\omega t + \varphi)}] \\ &= A\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Solução geral do MHS

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2z = 0$$

$$z(t) = e^{pt} \quad p \text{ complexo}$$

$$\frac{dz}{dt} = pe^{pt} = pz$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = p \frac{dz}{dt} = p^2z$$

$$p^2 = -\omega^2 \rightarrow p_{\pm} = \pm i\omega$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= +i\omega Ae^{i(\omega t + \varphi)} \\ \frac{dx}{dt} &= \operatorname{Re}\left(\frac{dz}{dt}\right) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

MHS e MCU

Aplicação no MHS

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 z = 0$$

$$z(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re}z(t) = \operatorname{Re}[Ae^{i(\omega t + \varphi)}] \\ &= A\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

$e^{i\theta} \rightarrow$ rotação de um ângulo θ

A imagem de $z(t)$ no plano complexo descreve o MCU associado ao MHS