MAE0221 - Probabilidade
Primeira Lista de Exercícios

1. Escolhe-se um ponto casualmente sobre o quadrado unitário no plano cartesiano limitado pelas retas $x = 0, y = o, x = 1, y = 1$. Seja A o evento que o ponto está no triângulo limitado por $y = 0, x = 1, y = x$ e B o evento de que o ponto está no retângulo com vértices em $(0,0),(1,0),(1,\frac{1}{2}),(0,\frac{1}{2})$. Determine $P(A \cup B)$ e $P(A \cap B)$.

2. Escolhe-se um ponto casualmente sobre o quadrado unitário no plano cartesiano limitado pelas retas $x = 0, y = o, x = 1, y = 1$. Sabendo-se que o ponto estáno retângulo limitado por $y = 0, y = 1, x = 0, x = \frac{1}{2}$, qual é a probabilidade de que o ponto esteja no triângulo limitado por $y = 0, x = \frac{1}{2}, x + y = 1$?

3. Suponha que um dado equilibrado é lançado três vezes, independentemente. Construa um espaço de probabilidade para tal experimento.

4. Sejam A e B dois eventos independentes. Mostre que A e B^c, A^c e B e A^c e B^c são independentes.

5. As letras no código morse são formadas por uma sucessão de traços e pontos com repetições permissíveis. Quantas letras podem-se formar com dez símbolos ou menos?

6. Estando os números $1, 2, ..., n$ dispostos em ordem aleatória, determine a probabilidade de que os dígitos a) 1 e 2; b) 1, 2 e 3, apareçam como vizinho nessa ordem.

7. Determine a probabilidade de que entre três dígitos aleatórios apareçam exatamente 1, 2 ou 3 algarismos distintos

8. Suponha que de um total de n varetas cada uma seja quebrada em uma parte longa e em uma curta, As $2n$ partes são arrumadas em n pares dos quais novas varetas são formadas. Determine a probabilidade a) de que as partes sejam unidas na ordem original, b) que todas as partes longas sejam emparelhadas com partes curtas.

9. Uma caixa contém noventa parafusos bons e dez defeituosos. Se dez parafusos são escolhido, qual a probabilidade de que nenhum seja defeituoso?

10. Da população de cinco símbolos a, b, c, d, e, retira-se uma amostra de tamanho 25. Determine a probabilidade de qua a amostra contenha cinco símbolos de cada espécie.

11. Se n homens, dentre os quais A e B, estão em uma fila, qual a probabilidade de que existam exatamente r homens entre A e B? Se eles permanecerem em pé em um círculo ao invés de em uma fila, mostre que a probabilidade é $\frac{1}{n-1}$.

12. Em uma cidade de $n + 1$ habitantes, uma pessoa conta um boato a uma segunda, a qual, por sua vez, o repete a uma terceira, etc. A cada passo a pessoa que recebe o boato é escolhida aleatoriamente dentre as n pessoa disponíveis. Ache a probabilidade de que o boato seja transmitido r vezes

    a) sem voltar à primeira pessoa que o contou;

    b) sem que seja repetido a nenhuma pessoa.

    c) Faça o mesmo problema quando, a cada passo, o boato é transmitido por uma pessoa a um grupo de N pessoas escolhidas alaatoriamente.

13. Em certa família, quatro garotas se revesam na lavagem da louça. Em um total de quatro peças de louças quebradas, três foram ocasionadas pela garota mais jovem, a qual passou a ser chamada de desajeitada. Justifica-se o fato da mesma atribuir a frequência de suas quebras, ao acaso?

14. Dadas 30 pessoas, ache a probabilidade de que entre os 12 meses do calendário, existam seis contendo dois aniversários e seis contendo três.

15. Um armário contém n pares de sapatos. Se $2r$ sapatos são escolhidos ao acaso (com $2r < n$) qual é a probabilidade de que

    a) não exista par algum completo?

    b) exista exatamente um par completo?

    c) existam exatamente dois pares completos entre eles?

16. Para nossos propósitos, jogar bridge significa distribuir as cartas de um baralho entre quatro jogadores, denominados norte, sul, leste e oeste (N, S, L,O) de maneira que cada jogador receba 13 cartas. Jogar pôquer é selecionar cinco cartas do baralho.

    A probabilidade de que em um jogo de bridge leste receba m e sul n espadas é a mesma de que de duas mãos de treze cartas cada, tiradas aleatoriamente de um baralho, a primeira contenha m e a segunda n espadas.

17. Sejam a, b, c, d, inteiros com $a + b + c + d = 13$. Ache a probabilidade $p(a, b, c, d)$ de que em um jogo de bridge os jogadores norte, leste, sul, oeste tenham a, b, c e d espadas respectivamente.

18. Um armário contém 10 pares de sapatos. Quatro sapatos são selecionados ao acaso. Determine a probabilidade de que exista pelo menos um par dentre os quatro sapatos selecionados.

19. Encontre a probabilidade de que, em cinco lançamentos de uma moeda resulte CARA pelo menos três vezes sucessivamente.

20. Dois dados são lançados r vezes. Determine a probabilidade p_r de que cada uma das seis combinações

    $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ apareça pelo menos uma vez.

21. Em uma fábrica de parafusos, as máquinas A, B e C produzem respectivamente, 25, 35 e 40 por cento do total. De sua produção, 5, 4 e 2 por cento são defeituosas. Um parafuso é retirado ao acaso da produção e e verifica que o mesmo está defeituoso. Quais são as probabilidades de que ele tenha sido manufaturado pelas máquinas A, B e C?

22. Um estudante se submete a um exame de múltipla escolha no qual cada questão tem 5 respostas possíveis das quais exatamente uma é correta. O estudante seleciona a resposta correta se ele sabe a resposta. caso cotrário, ele seleciona ao acasoo uma resposta enter as 5 possíveis. Suponha que o estudante saiba a resposta de 70% das questões.

    a) Qual a probabilidade de que o estudante escolha a resposta correta para uma dada questão?

    b) Se o estudante escolhe a resposta correta para uma dada questão, qual a probabilidade de que ele sabia a resposta?

23. Suponha que automóveis são produzidos casualmente pelos 5 dias úteis da semana. As porcentagem de automóveis amarelos produzidos nos diferentes dias são: segunda - 4%, terça,quarta e quinta - 1% e sexta - 2%. Se você compra um automóvel amarelo, qual a probabilidade de que o mesmo foi produzido numa segunda feira?

24. Uma caixa contém 10 bolas das quais 6 são pretas e 4 são brancas.

    a) Remove-se três bolas sem observar suas cores. Determine a probabilidade de que uma quarta bola removida da caixa seja branca. Assuma que as 10 bolas são igualmente prováveis de serem removidas da caixa.

    b) Determine a probabilidade de que todas as 3 bolas removidas sejam pretas , sabendo-se que pelo menos uma delas é preta.

25. Sete bolas são distribuidas aleatoriamente em sete compartimentos. Sabendo-se que exatamente dois compartimentos estão vazios, mostre que a probabilidade (condicional) de que algum compartimento contenha três bolas é igual a $\frac{1}{4}$

26. O dado A tem quatro faces vermelhas e duas faces brancas, enquanto que o dado B tem duas vermelhas e quatro brancas. Uma moeda é lançada uma vez. Se o resultado for cara usa-se o dado A para continuar o jogo; se cair coroa o dado B deve ser usado.

    a) Mostre que a probabilidade de vermelho em qualquer lançamento é $\frac{1}{2}$.

    b) Dado que os dois primeiros lançamentos resultaram em vermelho, qual é a probabilidade de vermelho no terceiro lançamento?

    c) Se os primeiros n lançamentos resultam todos em vermelho qual é a probabilidade de que esteja sendo utilizado o dado A?

27. MODELO DA URNA DE POLYA: Uma urna contém p bolas pretas e v bolas vermelhas.Uma bola é retirada ao acaso e em seguida devolvida à urna, juntamente com c bolas da mesma cor. Uma nova bola é retirada da urna que agora contém $p + v + c$ bolas e o processo se repete.

    a) Dado que a segunda bola é preta, qual é a probabilidade de que a primeira seja preta?

    b) Mostre, por indução, que a probabilidade de uma bola preta em qualquer ensaio é $\frac{p}{p+v}$.

    c) Prove por indução: Para todo $m < n$, as probabilidades de que m-ésima e a n-ésima retiradas resultem em $(preta, preta)$ ou $(preta, vermelha)$,são respectivamente

$$\frac{p(p+c)}{(p+v)(p+v+c)} \quad \frac{pv}{(p+v)(p+v+c)}.$$