AULA 9

Passar lista de presença

Resumo da aula anterior

- Regime viscoso ($\lambda << D$)
    - condutância de um orifício
      mostrar slide
    - condutância de um tubo

$$\boxed{C_{N_2} = \frac{180\, D^4 \bar{P}}{L}} \qquad \frac{P_1 + P_2}{2} = \bar{P}$$

- Condutância dependente do gás

$$\boxed{C = \frac{1}{\eta} \frac{\pi D^4 \bar{P}}{128 L}}$$

- Regime intermediário

$$10^{-2} < D\bar{P} < 1$$

$$\boxed{C_I = C_m \left(0{,}0736 \frac{D}{\lambda} + 1 \right)}$$

$$\boxed{\bar{\lambda} = \frac{5 \times 10^{-3}\ \text{cm}}{P\ (\text{Torr})}}$$

CALCULO DE SISTEMAS DE VÁCUO

Comportamento da pressão em função do tempo

$P(t)$ $\begin{cases} \text{Regime Viscoso} \\ \text{Regime molecular} \end{cases}$

Variação do throughput

Variação do fluxo de massa

(Q)

Fontes de Gases

(a) Moléculas de gás da atmosfera inicialmente fechadas no sistema (Q)

(b) Gás penetra no sistema devido a um vazamento (Q_V)

⟹ Vazamento real (cte) ou VIRTUAL (dependente do tempo)

(c) Gás proveniente da desgaseificação dos materiais do sistema (Q_D)

Dessorção Térmica e Difusão (dependente do tempo)

(d) Gás ou vapor resultante da pressão de vapor dos materiais (Q_{PV})

VAPORIZAÇÃO

(e) Gás penetrando no sistema por permeação através das paredes (Q_P) (cte)

(f) Backstreaming (Q_B)

$$Q_G = Q_V + Q_D + Q_{PV} + Q_P + Q_B$$

$$\boxed{Q_G = \sum Q_i}$$

Todas as fontes de gases dependem de como foi projetado o sistema e os materiais utilizados.

A maioria dessas contribuições é constante no tempo!!

então Q_G é considerado constante (no intervalo de tempo considerado)

Bombeamento no Regime Viscoso

Suposição: A velocidade de bombeamento é constante no intervalo de pressões

A velocidade de bombeamento efetiva depende da condutância do sistema:

$$\boxed{S_{ef} = \frac{S_b C}{S_b + C}}$$

No regime Viscoso: $C = \frac{\pi}{128\eta} \frac{D^4 \bar{P}}{L} = E\bar{P}$, $\bar{P} = \frac{P_1 + P_2}{2}$

$$S_{ef} = \frac{S_b E\bar{P}}{S_b + E\bar{P}} \Longrightarrow Q = PS = \frac{P S_b E\bar{P}}{S_b + E\bar{P}}$$

$Q = P\frac{dV}{dt}$ mas $PV = cte$ então $P\frac{dV}{dt} + V\frac{dP}{dt} = 0$

logo $P\frac{dV}{dt} = -V\frac{dP}{dt}$

Q_G é desprezado por ser muito menor do que Q (throughput)

$$\therefore \boxed{Q = -V\frac{dP}{dt} = \frac{P S_b E\bar{P}}{S_b + E\bar{P}}} \quad (I)$$

Por outro lado

$$Q = P_b S_b = -V\frac{dP}{dt}$$

$$\therefore \boxed{P_b = \frac{-V}{S_b}\frac{dP}{dt}} \quad (II)$$

Substituindo $\bar{P}$ na equação (1), temos:

$$Q = PS_b E\left(\frac{P+P_b}{2}\right)\left[\frac{1}{S_b + E\left(\frac{P+P_b}{2}\right)}\right] = -V\frac{dP}{dt}$$

Substituindo II em I

$$Q = PS_b E\left(\frac{P - \frac{V}{S_b}\frac{dP}{dt}}{2}\right)\frac{1}{\left[S_b + E\left(\frac{P-\frac{V}{S_b}\frac{dP}{dt}}{2}\right)\right]} = -V\frac{dP}{dt}$$

$$PS_b E\left(\frac{P - \frac{V}{S_b}\frac{dP}{dt}}{2}\right) = -V\frac{dP}{dt}\left[S_b + E\left(\frac{P-\frac{V}{S_b}\frac{dP}{dt}}{2}\right)\right]$$ MULTIPLICANDO POR 2

$$P^2 S_b E - PVE\frac{dP}{dt} = -V\frac{dP}{dt}\left[2S_b + E\left(P - \frac{V}{S_b}\frac{dP}{dt}\right)\right]$$ dividindo por S_b

$$\frac{VdP}{dt}\,2\frac{S_b}{S_b} + \cancel{\frac{VdP}{dt}\frac{EP}{S_b}} - \frac{VdP}{dt}\frac{EV}{S_b^2}\frac{dP}{dt} + P^2\frac{S_bE}{S_b} - \cancel{\frac{PVE}{S_b}\frac{dP}{dt}} = 0$$

$$\frac{dP}{dt}\left[2V\right] - \frac{V^2E}{S_b^2}\left(\frac{dP}{dt}\right)^2 + P^2E = 0$$ dividindo por E

$$\boxed{\frac{2V}{E}\frac{dP}{dt} - \frac{V^2}{S_b^2}\left(\frac{dP}{dt}\right)^2 + P^2 = 0}$$

escolhendo $A = \frac{2V}{E}$ $B = \left(\frac{V}{S_b}\right)^2$

$$\boxed{-B\left(\frac{dP}{dt}\right)^2 + A\left(\frac{dP}{dt}\right) + P^2 = 0}$$

Equação de 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Raizes $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{-A \overset{\text{escolha}}{\pm} \sqrt{A^2 + 4BP^2}}{-2B}$$

$$\frac{dP}{dt} < 0$$

então escolhe a raiz positiva

$$\frac{dP}{dt} = \frac{-A + \sqrt{A^2 + 4BP^2}}{-2B}$$

$$\int \frac{dP}{dt}\,dt = \int -\,dt$$

$$dt = \frac{-2B\,dP}{-A + \sqrt{A^2 + 4BP^2}}$$

tabela de integrais

$$t = \frac{A}{2P} + \sqrt{B}\left[\frac{\left((A^2/4B) + P^2\right)^{1/2}}{P} - \ln\left(P + \left(\frac{A^2}{4B} + P^2\right)^{1/2}\right)\right] + C$$

Condição inicial p/ $t = 0\,s$ $P = P_{inicial}$, então:

$$C = \sqrt{B}\left[\ln\left(P_i + \left(\frac{A^2}{4B} + P_i^2\right)^{1/2}\right) - \frac{\left(\frac{A^2}{4B} + P_i^2\right)^{1/2}}{P_i}\right] - \frac{A}{2P_i}$$

Resultado final

$$\frac{t}{V} = f(E, P_i, P, S_b) \qquad \text{substituindo } A = \frac{2V}{E} \text{ e } B = \frac{V^2}{S_b^2}$$

$$\frac{t}{V} = \frac{1}{E}\left[\frac{1}{P} - \frac{1}{P_i}\right] + \frac{1}{S_b}\left[\frac{((S_b/E)^2 + P^2)^{1/2}}{P} - \frac{((S_b/E)^2 + P_i^2)^{1/2}}{P_i}\right]$$

$$+ \frac{1}{S_b}\left[\ln \frac{P_i + ((\frac{S_b}{E})^2 + P_i^2)^{1/2}}{P + ((\frac{S_b}{E})^2 + P^2)^{1/2}}\right] \qquad (m)$$

Apresentar o slide com o gráfico dessa função para o parâmetro

$$\boxed{\frac{D^4}{L} = \frac{128}{\pi}\eta E}$$

Considerando $P_i = 760$ Torr

$P = 7{,}6 \times 10^{-2}$ Torr

$\Longrightarrow$ Regime viscoso $\boxed{D\bar{P} \geq 1}$

EXEMPLO 1

Se uma câmara de $V = 100\,\ell$ for bombeada por uma bomba de $S_b = 2\,\ell/s$, através de um tubo de $D = 2$ cm e comprimento $L = 200$ cm, o parâmetro geométrico é

$$\frac{D^4}{L} = \frac{2^4}{200} = 8 \times 10^{-2}\ cm^3$$

Pela curva 8×10^{-2} para $S_b = 2\,\ell/s$

$\frac{t}{V} = 6 \frac{seg}{\ell}$ então o tempo necessário para bombear $100\,\ell$ será 600 s.

EXEMPLO 2

Se o mesmo volume for conectado diretamente na bomba $L = 0$ cm então $\lim\limits_{L \to 0} \frac{D^4}{L} \to \infty$

$$\frac{t}{V} = 4{,}5\ \ell/s$$

Neste caso, o tempo para o escoamento de $100\,\ell$ será de $t = 450$ s.

EXEMPLO 3

Se a bomba estiver conectada diretamente na câmara $L = 0$ em $\bar{E} = \frac{\pi}{128\mu}\frac{D^4}{L}$

$\bar{E} \to \infty$ vide eq III

$$\frac{t}{V} = \frac{1}{S_b}\left[1 - 1\right] + \frac{1}{S_b}\left[\ln \frac{P_i + P_i}{P + P}\right]$$

$$\boxed{\frac{t}{V} = \frac{1}{S_b} \ln \frac{P_i}{P}}$$

Essa é a equação que rege o bombeamento no regime molecular

$$\frac{S_b t}{V} = \ln \frac{P_i}{P}$$

$$e^{\frac{S_b t}{V}} = e^{\ln \frac{P_i}{P}} \Longrightarrow \frac{P_i}{P} = e^{\frac{S_b t}{V}}$$

$$P = P_i \, e^{-\frac{S_b t}{V}}$$

$$\therefore \boxed{P(t) = P_i \, e^{-\frac{S_b t}{V}}}$$

Bombeamento no Regime Molecular

Comportamento da pressão em função do tempo.

fontes: Q moléculas de gás do sistema

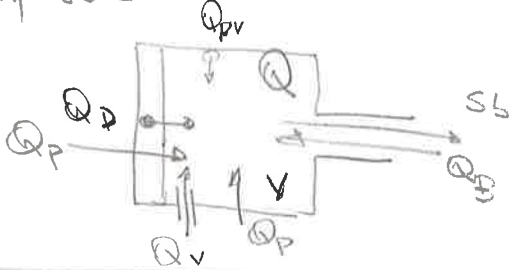
Q_V vazamentos (Real + VIRTUAL)

Q_D desorção térmica e difusão

Q_{VP} VAPORIZAÇÃO

Q_P Permeação

Q_B Backstreaming



$$\boxed{Q_G = Q_V + Q_D + Q_{VP} + Q_P + Q_B}$$

$$\boxed{Q_G = \sum_i Q_i}$$

Variação do throughput

$$-V\frac{dP}{dt} = PS - \underbrace{(Q_V + Q_D + Q_{VP} + Q_P + Q_B)}_{\sum_i Q_i}$$

pressão diminuindo

$$\frac{dP}{dt} < 0 \quad \therefore \quad Q > 0$$

Equação geral que rege o escoamento de gases

$$\boxed{-V\frac{dP}{dt} = PS - \sum_i Q_i}$$

Após decorrido um certo tempo, que depende do sistema, o arranjo experimental entra em equilíbrio, ou seja $\frac{dP}{dt} \sim 0$

Neste estágio o sistema mantém uma pressão residual P_{res} ou P_{final}

então $$\boxed{SP_{res} - \sum_i Q_i = 0}$$

$$S P_{res} = \sum_i^t Q_i$$

$$\boxed{P_{res} = \frac{\sum_i^t Q_i}{S}}$$

Compare as pressões finais das bancadas 1 e 2
$5 m^3/h$ e $8 m^3/h$

É muito importante se preocupar com todas as fontes de gases, principalmente com os vazamentos!
A pressão final depende deles!!

- Limpeza do sistema (aquecer p/ limpar)
- Reduzir vazamentos
- Escolher materiais adequados
- As fontes de gases devem ser conhecidas

A pressão final do sistema é resultado da razão

$$\boxed{\frac{\sum_i^t Q_i}{S} = P_{res}}$$

Para reduzir a pressão residual é necessário reduzir as fontes de gases e/ou aumentar a velocidade de bombeamento da bomba de vácuo.

Mas,
Nem sempre é possível!!

Resolução da Equação diferencial

$$\boxed{-V\frac{dP}{dt} = PS - \Sigma_i' Q_i}$$

Supondo que S seja constante e que o fluxo de massa seja constante ou varie lentamente:

$$-\frac{dP}{dt} = \frac{PS - Q}{V} \quad \text{onde} \quad Q = \Sigma_i' Q_i$$

$$\frac{dP}{PS-Q} = -\frac{dt}{V} \qquad \begin{cases} u = PS - Q \\ du = SdP \end{cases}$$

então

$$\frac{du}{Su} = -\frac{dt}{V} \equiv \frac{du}{u} = -\frac{S}{V}dt \quad ; \text{ integrando}$$

$$\int_{u_0}^{u}\frac{du}{u} = -\frac{S}{V}\int_{t_0}^{t}dt \longrightarrow \ln u \Big|_{u_0}^{u} = -\frac{S}{V}(t-t_0)$$

$$\ln\frac{u}{u_0} = -\frac{S}{V}(t-t_0) \Longrightarrow e^{\ln\frac{u}{u_0}} = e^{-\frac{S}{V}(t-t_0)}$$

$$\frac{u}{u_0} = e^{-\frac{S}{V}(t-t_0)}$$ mas $u = PS-Q$, então:

$$\frac{PS-Q}{P_0S-Q} = e^{-\frac{S}{V}(t-t_0)}$$ mas $Q = P_{res}S$, então

$$PS - P_{res}S = (P_0S - P_{res}S)e^{-\frac{S}{V}(t-t_0)}$$

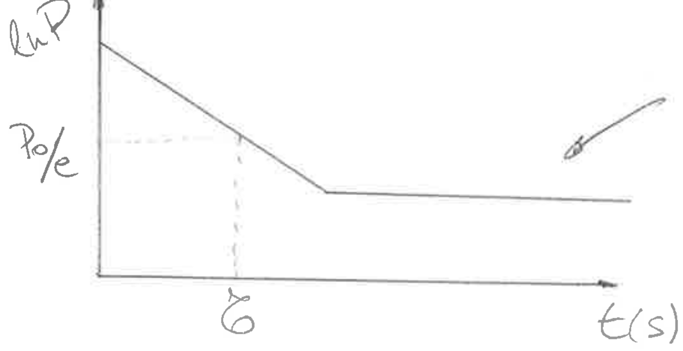
$$(P-P_{res})S = (P_0 - P_{res})S\,e^{-\frac{S}{V}(t-t_0)} \Longrightarrow P - P_{res} = (P_0 - P_{res})e^{-\frac{S}{V}(t-t_0)}$$

Como $P_0 \gg P_{res}$, então: $P - P_{res} = P_0 e^{-\frac{S}{V}(t-t_0)}$

$$P = P_0 e^{-\frac{S}{V}(t-t_0)} + P_{res}$$ Para $t_0 = 0\,s$, vem:

$$\boxed{P = P_0 e^{-\frac{S}{V}t} + P_{res}}$$

GRÁFICO



$$P_{res} = \frac{\sum_i Q_i}{S}$$

$P = \frac{P_0}{e}$ substituindo $\frac{P_0}{e} = P_0 e^{-\frac{S}{V}t}$ $\quad \frac{1}{e} = e^{-\frac{S}{V}t}$

$e^{-1} = e^{-\frac{S}{V}t} \quad \ln e^{-1} = \ln e^{-\frac{S}{V}t} \quad \Longrightarrow \quad -1 = -\frac{S}{V}t$

$t = \frac{V}{S} \Longrightarrow t = \tau = \frac{V}{S}$ é a constante de bombeamento

Constante de tempo do sistema (τ)

—— / ——

$Q = C\Delta P = C(P_0 - P_{residual})$ desprezível

$Q = CP_0$

$\therefore Q = cte$

Fator de Serviço

A. Guthrie - Vacuum Technology.

O fator de serviço é um fator empírico igual ou maior do que 1,0, o qual é especificado para uma dada faixa de pressão, sendo um valor multiplicativo para o escoamento calculado pelas fórmulas para as bombas mecânicas, devido à desgaseificação e outras condições reais em sistemas industriais.

FAIXA DE PRESSÃO (TORR)	FATOR DE SERVIÇO
760 - 100	1,0
100 - 10	1,25
10 - 0,5	1,5
0,5 - 0,05	2,0
0,05 - 0,0002	4,0

EXERCÍCIO

Qual o tempo para se reduzir a pressão de um sistema de vácuo por um fator 100?

Considere uma bomba mecânica com $S = 60\ l/min$ bombeando uma câmara de $D = 30\,cm$, conectada à bomba por um tubo de $L = 80\,cm$ e $D = 2{,}5\,cm$

(a) Regime molecular $(DP \leq 10^{-2}\ Torr\ cm)$

$$P = P_0\, e^{-\frac{S}{V}t}$$

$$\ln P = \ln P_0 - \frac{S}{V}t \Rightarrow \boxed{t = \frac{V}{S} \ln \frac{P_0}{P_0}}$$

deduzido também p/ o regime viscoso

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{30}{2}\right)^2 = 14\,130\ cm^3 \Rightarrow \boxed{V = 14{,}1\ l}$$

$$S_{ef} = \frac{S_b C}{S_b + C} \longrightarrow S_b = 1\ l/s$$

$$C_{tubo} = \frac{12 D^3}{L} \qquad N_2,\ T = 300\,K \qquad D(cm)\ \ L(cm)$$

$$C_{tubo} = \frac{12(2{,}5)^3}{80} = 2{,}3\ l/s$$

Podemos usar a condutância do tubo?

Resposta: Sim

Lembrando Dushman

$$\frac{1}{C_{total}} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_{tubo}}$$

$$\begin{cases} C_0 = 9D^2 = 9(2{,}5)^2 = 56\ l/s \\ C_{tubo} = \dfrac{12D^3}{L} = 2{,}3\ l/s \end{cases}$$

Portanto $C_0 >> C_{tubo}$

Então podemos usar a condutância menor, ou seja, a de maior impedância.

$$S_{ef} = \frac{1 \times 2{,}3}{1 + 2{,}3} \sim 0{,}7 \ l/s$$

$$\text{tempo} = \frac{V}{S_{ef}} \ln \frac{P_0}{P} = \frac{14}{0{,}7} \ln \frac{100}{1} = 93\,s$$

(b) Regime viscoso

Pressão alta
choque entre moléculas
$\lambda << D$ e $D\bar{P} \geq 1$ Torr cm

$$C_{tubo} = 180 \frac{D^4 \bar{P}}{L} \quad \text{para } N_2 \quad T = 300\,K$$

$$C_{tubo} = 180 \frac{D^3 \overbrace{D\bar{P}}^{=1}}{L}$$

logo $$C_{viscoso} = \frac{180\,(2{,}5)^3 \times 1}{80}$$

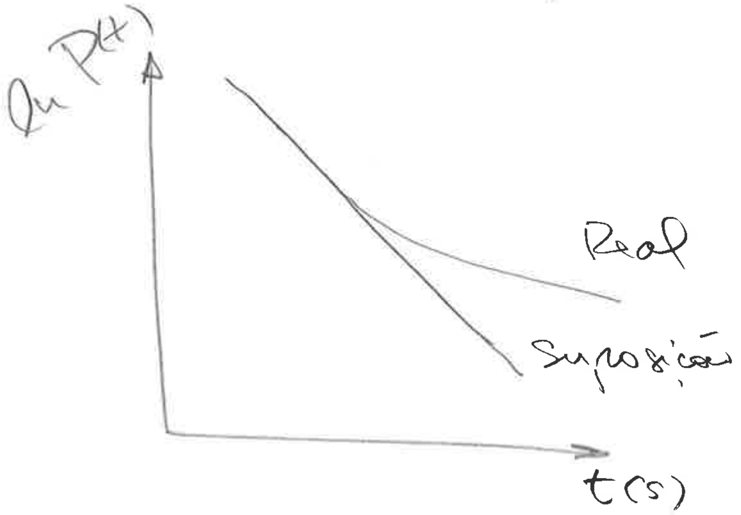
$$C_{viscoso} = 35 \ l/s$$

$$S_{ef} = \frac{S_b C}{S_b + C} = \frac{1 \times 35}{1 + 35} \sim 0{,}98 \ l/s$$

$$\boxed{S_b \sim S_{ef} \sim 1 \ l/s}$$

No regime viscoso a perda da capacidade de bombeamento é praticamente desprezível!

$$\text{tempo} = \frac{V}{S} \ln \frac{P_0}{P} = \frac{14,1}{1} \ln \frac{100}{1} = 64\ s$$



Neste cálculo foi desprezado o termo $P_{res} = \frac{\sum Q_i}{S}$

Essa suposição é válida principalmente nos regimes viscoso e intermediário

- Vamos considerar 760 Torr ⟶ $7,6 \times 10^{-2}$ Torr

Para usar o gráfico do início da aula:

$$\frac{D^4}{L} = \frac{(2,5)^4}{80} = 0,5$$

$V = 14,1\ \ell$ $S_b = 1\ \ell/s$ $D = 2,5$ cm $L = 80$ cm

$$\frac{t}{V} = 9\ \frac{s}{\ell}$$ então $t = 127\ s$

⇒ Usando a expressão acima $t = \frac{V}{S} \ln \frac{P_0}{P}$, temos:

$$t = \frac{14,1}{1} \ln \frac{760}{7,6 \times 10^{-2}} = 130\ s$$