Passar lista de presença

Resumo da aula anterior

Condutâncias no regime molecular ($\lambda >> D$) - colisão com as paredes

(a) VUVUZELA

$$S = S_0 e^{-\beta x}$$

$$\boxed{C = \frac{4}{3} K \frac{\bar{v}}{\int_0^L \frac{B\,dl}{A^2}}}$$

Equação Geral

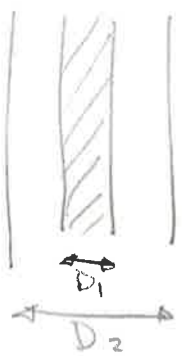
$$C = \frac{K \bar{v} \pi D_0^3 \beta}{8} \left[e^{\frac{3}{2}\beta L} - 1 \right]^{-1}$$

Para $\beta \to 0$ $\quad N_2$, $T = 293K$

$$\boxed{C \simeq \frac{12,3\, D_0^3}{L} \quad [\ell/s]}$$

D (cm)
L (cm)

(b) Duto Anular



$$\boxed{C = 12 K (D_2 - D_1)^2 (D_1 + D_2)}$$

Aproximação do prof. Hélio Onusic

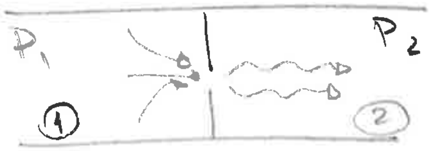
$$\boxed{C = \frac{12}{L} (D_2^3 - D_1^3)\left(1 - \frac{D_1}{D_2}\right)}$$

→ Resolução de exercícios

Condutâncias no Regime Viscoso

Condutância de um orifício

$\lambda << D$
Colisões elásticas entre moléculas



Velocidades altas
$v \sim 1$ mach
$v \sim 340 m/s$

Hipóteses
1. $P_1 \sim atm$
2. $P_2 < P_1$
3. λ é menor que as dimensões do orifício.

- Nessas condições o gás flui do compartimento 1 para o 2.
- O gás tem a menor seção transversal ao atravessar o orifício.
- Depois dessa contração (compressão) o gás passa por várias contrações e expansões até finalmente se difundir na massa do gás em 2

Expansão adiabática

Expansões e contrações tão rápidas que não há transferência de calor

$Q\,(\text{calor}) = 0$

Equação

$$\boxed{PV^{\gamma} = cte}$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

c_p é o calor específico P cte
c_v é o calor específico V cte

Variação térmica de uma substância ao receber certa quantidade de calor $(J/kg\,K)$ $\left(\frac{cal}{g\,°C}\right)$

Num processo adiabático

$$\boxed{P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}}$$

Para gases monoatômicos $C_v = \frac{3}{2}R \Rightarrow$

$C_v = 12,5 \frac{J}{mol K}$ (He)
$C_v = 20,0 \frac{J}{mol K}$ (N_2)

$$\boxed{c_p - c_v = R}$$

Calor específico é a quantidade de calor necessária para aumentar em 1 grau 1 mol de moléculas

C_p a pressão cte
C_v a volume cte

$$\boxed{Q = A P_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0 T_1}{M} \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{1/2}} \quad (I)$$

NO CGS

$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, R_0, M massa molar, T_1 temperatura

P_1 = pressão do compartimento ①

Como $\boxed{Q = C \Delta P}$, então:

$$C = \frac{9{,}13 A}{1-(P_2/P_1)} \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/\gamma} \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{T_1}{M}\right) \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}}\right]\right\}^{1/2}$$

A em cm^2 $C(\ell/s)$ $T(K)$ $M(g)$

Para o ar 80% N_2 20% O_2 $M=29$ $T=293K$ $\gamma=1{,}4$

$$\boxed{C = \frac{76{,}6 A}{1-(P_2/P_1)} \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{0{,}712} \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{0{,}288}\right]^{1/2}}$$ II

Para $P_1 = P_2$ $Q = 0$ eq I

e será máximo para $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \equiv r_c$

r_c é um valor crítico

Para $T = 293\,K$ $\qquad r_c = 0{,}525$

$$\boxed{Q_c = 20 A P_1}$$ $\qquad A\,(cm^2)\quad P\,(Torr)\quad Q\left(\frac{Torr\,\ell}{s}\right)$

Para $\frac{P_2}{P_1} \leq r_c \longrightarrow$ $Q = C\Delta P$

$$C = \frac{20 A P_1}{P_1 - P_2}$$

então $$\boxed{C = \frac{20 A}{1 - P_2/P_1}}$$

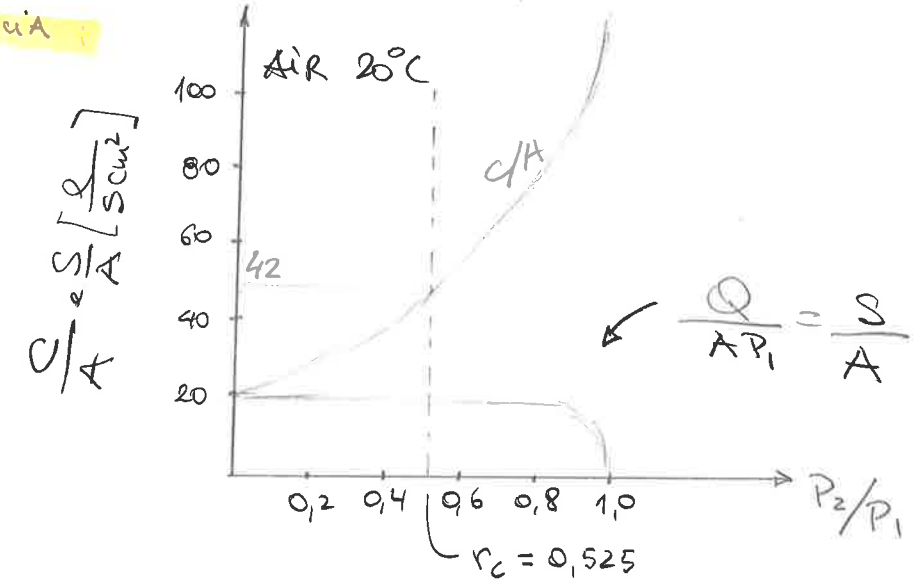
ou seja para $P_2 < 0{,}1 P_1$; $\frac{P_2}{P_1} < 0{,}1$

$$\boxed{C \sim 20 A}$$

Velocidade de bombeamento (S) através de um orifício

$$S = \frac{Q}{P} = \frac{C(P_1 - P_2)}{P_1} \equiv C\left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right)$$

TRANSPARÊNCIA:



$\frac{S}{A}$ é constante até r_c e cai a zero para $P_1 \sim P_2$

$\frac{C}{A}$ tende a infinito para $P_1 \sim P_2$

Regime Viscoso

(b) Condutância de um tubo:

Lei de Poiseuille

Em um tubo longo o fluxo acontece na região de alta pressão (P_1) para o de baixa pressão (P_2)

O perfil da velocidade do fluxo de moléculas é constante.

Não tem movimento turbulento.

A velocidade do fluxo de moléculas nas paredes é zero!

forças viscosas

Supondo um pequeno cilindro de raio r em equilíbrio

≡ velocidade constante

Forças atuando no cilindro

(1) Diferença de pressão ≡ $dP\,\pi r^2$

$$P = F/A$$

(2) Força viscosa ≡ oposta ao fluxo

$$\boxed{F = -\eta A \frac{dv}{dr}}$$

$$F = -\eta \underbrace{2\pi r\,dx}_{\text{Área da superfície do cilindro}} \frac{dv}{dr}$$

Igualando as duas forças

$$-\eta\, 2\pi r\,dx \frac{dv}{dr} = dP\,\pi r^2$$

$$\boxed{-dv = \frac{dP}{dx}\frac{1}{2\eta} r\,dr}$$

integrando, temos

$$-\int_0^v dv = \frac{dP}{dx}\frac{1}{2\eta}\int_0^r r\,dr \Rightarrow -v = \frac{dP}{dx}\frac{1}{2\eta}\frac{r^2}{2} + C$$

A constante C pode ser obtida das condições de contorno

$v = 0 \qquad r = R$

$$0 = \frac{dP}{dx}\frac{1}{2\eta}\frac{R^2}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{dP}{dx}\frac{R^2}{4\eta}$$

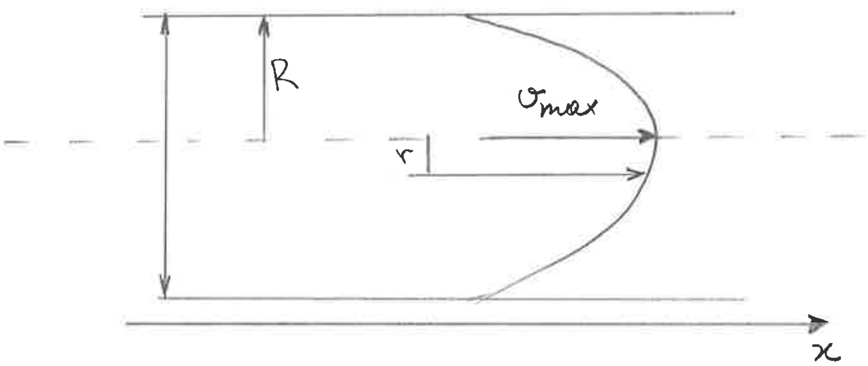
O perfil da velocidade das moléculas, será:

$$\boxed{v = -\frac{1}{4\eta}\frac{dP}{dx}\left(R^2 - r^2\right)}$$

⇒ O fluxo de gás (velocidades) vai na direção da queda de pressão.

⇒ Tem perfil parabólico

Distribuição das velocidades no regime viscoso.



Cálculo do throughput (Q)

$$Q = \frac{P\,dV}{dt}$$

$$\boxed{dV = v\,dt\,dA}$$

análise dimensional

$$\frac{cm}{s}\, s\, cm^2 \equiv cm^3$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \pi R^2 \\ dA &= 2\pi r\,dr \\ \frac{dV}{dt} &= v\,dA \end{aligned}\right\}$$

substituindo na equação da distribuição de velocidades

$$\boxed{v = -\frac{1}{4\eta}\frac{dP}{dx}(R^2 - r^2)}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{4\eta}\frac{dP}{dx}(R^2 - r^2)\,2\pi r\,dr$$

O volume total do gás fluindo através da seção reta do tubo por unidade de tempo é obtido integrando de $r=0$ a $r=R$

$$= -\int_0^R \frac{2\pi}{4\eta}\frac{dP}{dx}(R^2 r - r^3)\,dr = -\frac{2\pi}{4\eta}\frac{dP}{dx}\left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$= -\frac{2\pi}{4\eta}\frac{dP}{dx}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = -\frac{\pi}{8\eta}\frac{dP}{dx}R^4$$

então: $\boxed{\dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{\pi}{8\eta}\dfrac{dP}{dx}R^4}$

Depende inversamente da viscosidade

Essa equação só tem sentido no Regime Viscoso!

$$Q = \frac{P\,dV}{dt} = P\left[\frac{-\pi}{8\eta} R^4 \frac{dP}{dx}\right]$$

$$\boxed{Q = \frac{-\pi}{8\eta} R^4 P \frac{dP}{dx}}$$

integrando de P_1 a P_2 e de 0 a L, vem:

Como não sabemos $P(x)$, é feita uma estimativa da média do throughput ao longo do tubo.

$$\langle Q \rangle = \int_0^L \frac{Q\,dx}{L} = \frac{-\pi R^4}{8\eta L} \int_0^L P\frac{dP}{dx}\,dx$$

$$\langle Q \rangle = \frac{-\pi R^4}{8\eta L} \int_{P_1}^{P_2} P\,dP$$

$$\langle Q \rangle = \frac{-\pi R^4}{8\eta L} \left.\frac{P^2}{2}\right|_{P_1}^{P_2} = \frac{-\pi R^4}{16\eta L}\left(P_2^2 - P_1^2\right)$$

$$Q = \frac{\pi R^4}{16\eta L}(P_1 - P_2)(P_1 + P_2)$$

definindo $\bar{P} = \frac{P_1 + P_2}{2}$, vem:

$$\boxed{Q = \frac{\pi R^4}{16\eta L} 2\bar{P}(P_1 - P_2)}$$

Mas, $Q = C\Delta P$, então $\boxed{C = \dfrac{\pi R^4}{8\eta L}\bar{P}}$

logo $\boxed{C = \dfrac{\pi D^4}{128\eta L}\bar{P}}$ $D = 2R$

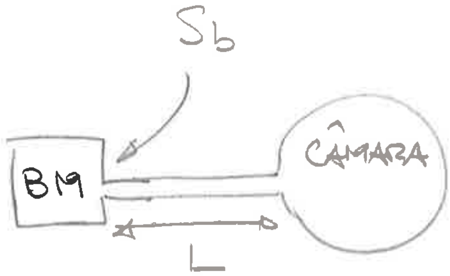
Veja que nesse caso a condutância DEPENDE da Pressão

Para N_2, $T = 293\,K$ e $\eta = 175\,\mu$Poise

$\boxed{C_{N_2} \simeq \dfrac{180\,D^4\bar{P}}{L}}$ P(Torr) D(cm) $\bar{P} = \dfrac{P_1 + P_2}{2}$

Exercício 17 - lista 2

$$\begin{cases} S = 60\ \ell/min = 1\ \ell/s \\ L = 80\ cm \\ D = 1'' = 2{,}5\,cm \end{cases}$$



Qual a velocidade de bombeamento efetiva (S_{ef})?

N_2 $T = 300\,K$

a) No Regime Molecular

$$C_{N_2} = \frac{12D^3}{L}\ (\ell/s)$$

substituindo os valores $C_{N_2} = \dfrac{12(2{,}5)^3}{80} = 2{,}3\ \ell/s$

Lembrando $S_{ef} = \frac{S_b \cdot C}{S_b + C} = \frac{1 \times 2,3}{1 + 2,3} = 0,7\ \ell/s$

(b) No Regime Viscoso

$$\boxed{C_{N_2\ \text{viscoso}} = \frac{180 D^4 \bar{P}}{L}}$$

Depende da pressão

$D P \leq 10^{-2}$ em Torr $\longrightarrow$ Regime molecular

$D P \geq 1$ em Torr $\longrightarrow$ Regime viscoso

$$C_{N_2\ \text{viscoso}} = \frac{180 D^3 D\bar{P}}{L}$$

$D\bar{P} \geq 1$ condição limite, então

$$C_{N_2} = \frac{180 D^3}{L} \times 1 = 35\ \ell/s$$

Neste caso. $S_{ef} = \frac{S_b C}{S_b + C} \sim S_b = 1\ \ell/s$

COMPARAÇÃO DAS CONDUTÂNCIAS

$$\frac{C_{\text{viscoso}}}{C_{\text{molecular}}} = \frac{180 D^3 D\bar{P}}{L} \cdot \frac{1}{\frac{12 D^3}{L}} \cong 15$$

No início do bombeamento as condutâncias são ENORMES!!

i.e. as impedâncias são pequenas.

Condutâncias dependentes do gás.

No regime viscoso

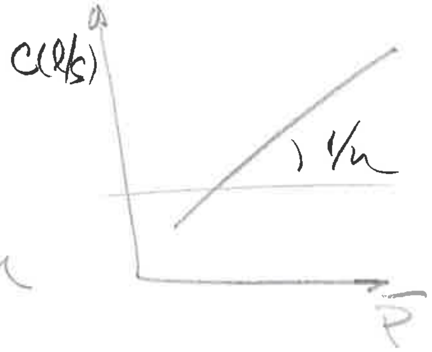
$$\boxed{C = \frac{1}{\eta}\,\frac{\pi D^4 \bar{P}}{128\,L}}$$

gases diferentes $=$ η diferentes

Reta

$y = A x$

$A = 1/\eta$



Pode-se extrair o valor da viscosidade do gás experimentalmente a partir do gráfico.

$$\eta \sim \frac{n m \bar{v} \lambda}{2} \qquad n = \frac{P}{kT} \qquad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi n \delta^2} = \frac{kT}{\sqrt{2}\,\pi \delta^2 P}$$

$$\boxed{\lambda = 2{,}3\times10^{-20}\,\frac{T}{\delta^2 P} \quad (\text{cm})}$$

Para T em K, δ em cm, P em Torr

CGS $\quad 1 \text{ Poise} = \frac{1\,g}{cm\,s} = \frac{dina\;s}{cm^2}$

SI $\quad 10 \text{ Poise} = \frac{1\,kg}{m\,s} = 1\,Pa\,s$

$$\eta = \frac{n m \bar{v} \lambda}{2} = \frac{P}{kT}\,\frac{m}{2}\,\bar{v}\,\frac{kT}{\sqrt{2}\,\pi \delta^2 P} = \frac{m \bar{v}}{2\sqrt{2}\,\pi\,\delta^2}$$

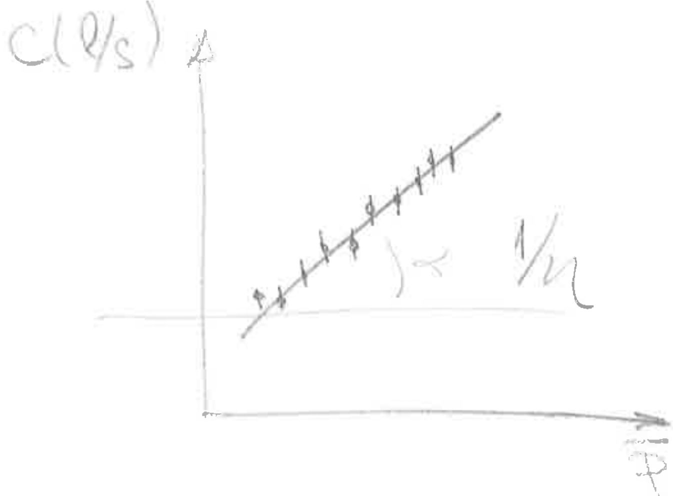
$$\eta = \frac{m\bar{v}}{2\sqrt{2}\,\pi\,\delta^2} \sim \frac{1}{\pi \delta^2}\sqrt{\frac{m k T}{\pi}}$$

$$\lambda = \frac{5\times10^{-3}\,(\text{cm})}{P\,(\text{Torr})}$$

gás	η (μPoix a 20°C)	$C_{gás}/C_{N_2}$
N_2	175	1,0
O_2	203	0,86
Ar	182	0,96
H_2	88	2
He	196	0,89
H_2O	94	1,9

$$\boxed{C_{viscoso} = \frac{\pi}{128} \frac{D^4}{L} \frac{1}{\eta} \bar{P}}$$

É possível medir no laboratório



Proporcional ao inverso da viscosidade.

Regime intermediário

$$10^{-2} < D\bar{P} < 1$$

$$\boxed{C_I = C_v + a\,C_m}$$

$$\boxed{f(x) = a + bx}$$

$C_I \equiv$ condutância no regime intermediário

$C_v \equiv$ condutância no regime viscoso

$C_m \equiv$ condutância no regime molecular

$$a = \frac{1 + \left(\frac{m}{kT}\right)^{1/2} \frac{D\bar{P}}{\eta}}{1 + 1{,}24 \left(\frac{m}{kT}\right)^{1/2} \frac{D\bar{P}}{\eta}}$$

$$\eta \sim \lambda P \left(\frac{2m}{\pi kT}\right)^{1/2}$$

$$\eta = \frac{n m \bar{v} \lambda}{2} \; ; \quad n = \frac{P}{kT} \; ; \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\eta = \frac{P}{kT} \frac{m\lambda}{2} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = P\lambda \sqrt{\frac{2m}{Tk\pi}}$$

$$\boxed{a = \frac{1 + 1{,}25 \frac{D}{\bar{\lambda}}}{1 + 1{,}55 \frac{D}{\bar{\lambda}}}}$$

Equação Aproximada

$$C_I = C_m \left(0{,}0736 \frac{D}{\bar{\lambda}} + 1 \right)$$

$$\boxed{\bar{\lambda} = \frac{5 \times 10^{-3} \ (cm)}{\bar{P} \ (Torr)}}$$