AULA 3

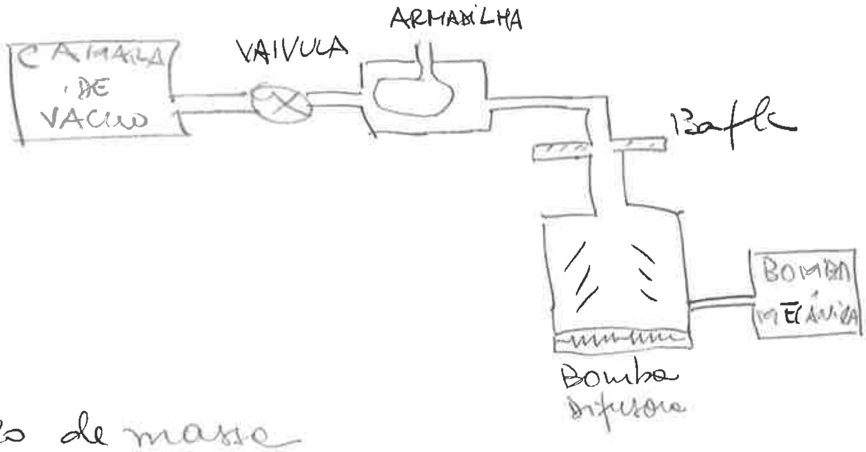
2018

28/02/18

- Passar lista de presença.
- entregar lista 1.
- mostrar site.

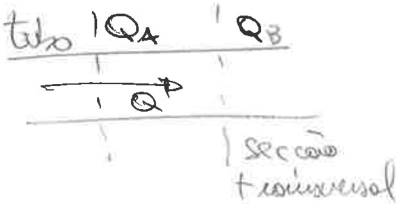
Resumo da aula anterior.

• Sistema de vácuo



• Fluxo de massa

$Q \equiv$ throughput

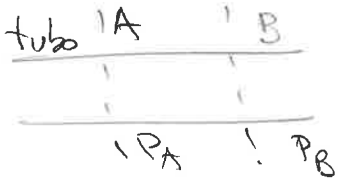


lei de conservação

$$\boxed{Q_A = Q_B}$$

Definição de impedância

$$Z = \frac{P_A - P_B}{Q}$$



Analogia

$$\begin{cases} V = Ri \\ \Delta P = Z_{AB} Q \end{cases}$$

condutância

$$C \equiv \frac{1}{Z}$$

$$\boxed{C_{AB} = \frac{Q}{P_A - P_B}}$$

• Regimes de Escoamento

- Viscoso $\begin{cases} \text{turbulento} \\ \text{laminar} \end{cases}$ λ pequeno
- Intermediario / transição
- Molecular λ grande

Cálculos de condutância dependem dos componentes, geometria e do regime de escoamento

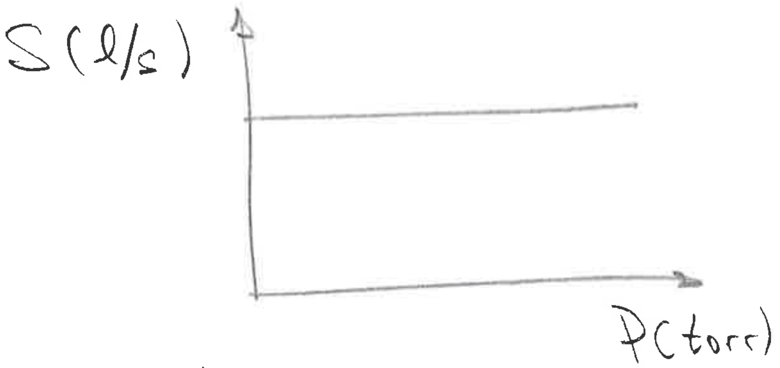
Definições:

- Velocidade de bombeamento

$$S = \frac{\Delta V}{\Delta t} \qquad [S] = l/s$$

- throughput $\equiv$ taxa de escoamento

$$Q = P\frac{\Delta V}{\Delta t} = PS$$



$$[Q] = \frac{Torr\, l}{s}$$

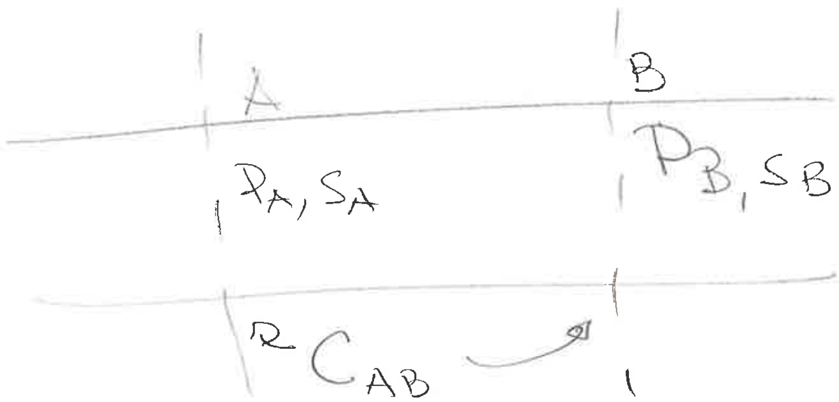
$$[S] = l/s$$

Condutância

$$\boxed{C = \frac{Q}{P_A - P_B}} \qquad [C] = l/s$$

$C \equiv$ característica entre dois pontos

$S \equiv$ característica de um ponto



Relação entre C e S

$$Q_1 = P_1 S_1 \quad (1) \qquad Q_2 = P_2 S_2 \quad (2)$$

subtraindo $\dfrac{1}{S_1} - \dfrac{1}{S_2} = \dfrac{P_1}{Q_1} - \dfrac{P_2}{Q_2} = \dfrac{P_1 - P_2}{Q} = \dfrac{1}{C}$

Supondo uma bomba na boca do tubo (ponto 2) e que se queira calcular a velocidade de bombeamento efetiva (S_{ef}) em um outro ponto da tubulação, então:

$$\frac{1}{S_{ef}} - \frac{1}{S_b} = \frac{1}{C} \qquad \frac{1}{S_{ef}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{S_b}$$

$$\therefore \frac{1}{S_{ef}} = \frac{S_b + C}{C S_b} \Longrightarrow \boxed{S_{ef} = \frac{C S_b}{S_b + C}}$$

Throughput (Q)

$$\boxed{Q = PS} \qquad \boxed{Q = P\frac{\Delta V}{\Delta t}}$$

Como $PV = NkT$, então

$$P\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta t} kT \Rightarrow \boxed{Q = kT\frac{\Delta N}{\Delta t}}$$

Pela definição de condutância

$$\boxed{Q = C\Delta P} \qquad \boxed{Q = V\frac{\Delta P}{\Delta t}}$$

Sendo $PV = NkT$ e $k = \frac{R_0}{N_A}$; R_0 é a cte universal dos gases.

$$PV = \frac{N}{N_A} R_0 T$$

multiplicando-se pela massa m da molécula.

$$PV = \frac{mN}{mN_A} R_0 T$$

$Nm \equiv$ massa do gás $\equiv W$

$N_A m =$ massa molecular do gás $\equiv M$

então

$$P\frac{\Delta V}{\Delta t} = \overbrace{\frac{R_0 T}{M}}^{cte} \frac{\Delta W}{\Delta t} = Q \equiv \text{fluxo de massa}$$

$$\boxed{Q = cte\,\frac{\Delta W}{\Delta t}}$$

Teoria Cinética dos Gases

Halliday, Resnick, Walker 2ª edição cap. 21

• **Número de Avogadro**

Movimento Browniano (1827)

$$\boxed{N_A = 6{,}02 \times 10^{23}} \quad \text{CNTP}$$

Todos os gases contêm o mesmo número de moléculas ou átomos quando ocupam o mesmo volume (CNTP) nas mesmas condições de temperatura e pressão.

• **número de moles**

$$\boxed{n = \frac{N}{N_A}}$$

• **Equação dos gases ideais**

$PV = nR_oT$ $\quad R_o$ é a cte universal dos gases

$$PV = \frac{N}{N_A} R_o T \quad \therefore \quad \boxed{PV = NkT} \qquad k = \frac{R_o}{N_A}$$

cte de Boltzman

$R_o = 8{,}314\ J/_{mol\,K}$

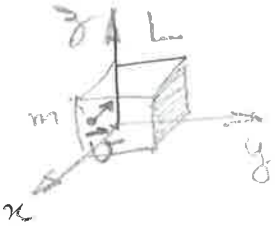
$R_o = 8{,}314 \times 10^7\ erg/_{mol\,K}$ $\qquad k = \dfrac{8{,}314 \times 10^7}{6{,}022 \times 10^{23}} = 1{,}38 \times 10^{-16} \dfrac{erg}{K}$

$$\boxed{R_o = 6{,}236 \times 10^4 \ \frac{Torr\ cm^3}{K\ mol}}$$

O gás ideal não existe, mas o comportamento de todos os gases à baixa pressão se aproxima de um gás ideal.

Pressão e Temperatura

Qual a relação entre a pressão e a velocidade das moléculas?



$\vec{p} = m\vec{v}$

$p_x = m v_x$

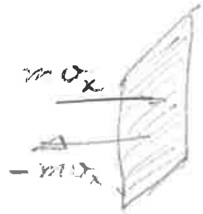
Impulso $\vec{J} = \int \vec{F} dt$

$\boxed{\vec{J} = \Delta \vec{p}}$

$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$ 2ª lei de Newton

$J_x = \Delta p_x = p_{fx} - p_{ix}$

$J_x = -mv_x - mv_x = -2mv_x$



J_x partícula $= -J_x$ parede $\boxed{\text{Ação e reação}}$ 3ª lei de Newton

∴ O impulso transferido à parede pela molécula é: $\boxed{\Delta p_x = +2mv_x}$

A distância entre as paredes é L

O tempo para uma partícula percorrer todo o percurso de ida e volta até o ponto inicial, será:

$S = Vt$ $\quad \boxed{\frac{2L}{v_x} = \Delta t}$

Então a taxa de transmissão do momento, será:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{\frac{2L}{v_x}} = \frac{m v_x^2}{L}$$

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m v_x^2}{L}$$

Essa é a força sobre a parede devido à colisão de uma molécula de massa m

Somando-se todas as moléculas e dividindo pela área da parede, encontra-se a pressão devida a todas as moléculas:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\frac{m v_{x_1}^2}{L} + \frac{m v_{x_2}^2}{L} + \ldots + \frac{m v_{x_n}^2}{L}}{L^2}$$

$$\therefore \boxed{P = \frac{m}{L^3}\left(v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + \ldots + v_{x_n}^2\right)}$$

Como $N = n N_A$, vamos ter $n N_A$ termos na somatória, então:

$$\boxed{P = \frac{m}{L^3} n N_A \overline{v_x^2}}$$

$\overline{v_x^2}$ é a velocidade quadrática média

Para qualquer molécula $\boxed{v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

$\therefore v_x^2 = \frac{1}{3} v^2$, então:

$$\boxed{P = \frac{m}{L^3} n N_A \frac{1}{3} \overline{v^2}}$$

onde L^3 é o volume da caixa, $m N_A$ é a massa molar $\boxed{M = m N_A}$

$$\boxed{P = \frac{n M \overline{v^2}}{3V}}$$

Pela distribuição de Boltzman $\boxed{\overline{v^2} = \frac{3RT}{M}}$

A SER DEDUZIDO

Então: $P = \frac{n \cancel{M}}{\cancel{3}V} \frac{\cancel{3}RT}{\cancel{M}}$

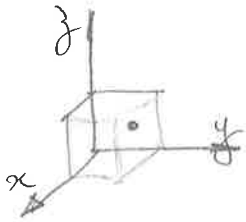
$$\therefore \boxed{PV = nRT} \qquad \text{c.q.d.}$$

$$\overline{v^2} \Longrightarrow \sqrt{\overline{v^2}} = v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Exemplo: H_2 a $T = 300K$ $\quad v_{rms} = 1920\ m/s \sim 6800\ km/h$

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3(8{,}31\ J/mol\,K)(300\ K)}{2{,}0 \times 10^{-3}\ kg/mol}}$$

$$v_{rms}(O_2) = 483\ m/s$$



ENERGIA CINÉTICA DE TRANSLAÇÃO

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\overline{K} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{1}{2} m v_{rms}^2$$

v_{rms} Raiz quadrada da velocidade quadrática média

$$\overline{K} = \frac{1}{2} m \frac{3RT}{M} = \frac{3}{2} m \frac{RT}{M}$$

mas $M = m N_A$ massa molar

$$\overline{K} = \frac{3}{2} \frac{RT}{N_A} \Longrightarrow \boxed{\overline{K} = \frac{3}{2} kT}$$

$k = \frac{R}{N_A}$ é a cte de Boltzman

A uma dada temperatura as moléculas de qualquer gás têm a mesma energia cinética de translação.

EXEMPLO $\quad \overline{K} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} (1{,}38 \times 10^{-16}) \frac{erg}{K} \times 300K$

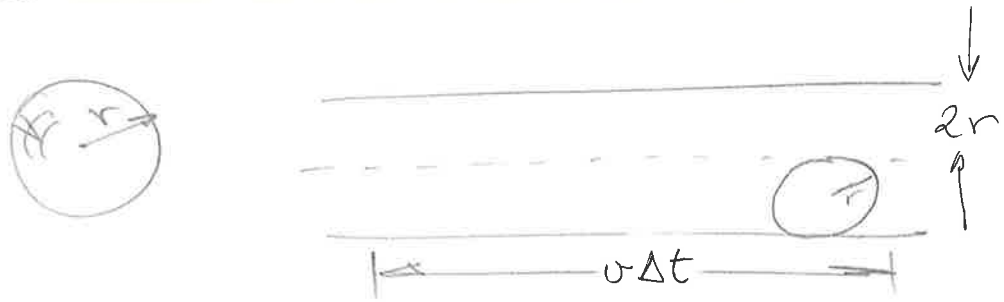
$1\ J = 10^7\ erg$; $\boxed{1\ erg = 6{,}24 \times 10^{11}\ eV}$

$1\ eV = 1{,}602 \times 10^{-19}\ J \Longrightarrow 1\ J = 6{,}24 \times 10^{18}\ eV$

então $\overline{K} = 6{,}21 \times 10^{-14} \times 6{,}24 \times 10^{11}\ eV = \underline{39\ meV}$

Livre Caminho Médio (λ)

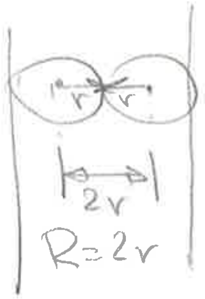
Distância média percorrida pela molécula entre duas colisões sucessivas.



N moléculas de raio r e volume V

$\Rightarrow$ Supondo apenas uma molécula se movendo

Ao se colidirem a distância entre os dois centros é $2r$.



Cilindro com $R=2r$

comprimento $\underline{v\Delta t}$

Volume do cilindro $V = \pi R^2 . v\Delta t = 4\pi r^2 v\Delta t$

Como existem $\frac{N}{V}$ moléculas por unidade de volume, o número de colisões vai ser

$\frac{N}{V}$ * Volume do cilindro

i.e. $\boxed{\frac{N}{V} 4\pi r^2 v\Delta t}$

O livre caminho médio é o comprimento da trajetória dividido pelo número de colisões:

$$\lambda = \frac{\text{extensão do caminho}}{\text{nº de colisões}} = \frac{v\Delta t}{\frac{N}{V}\,4\pi r^2 v\Delta t}$$

então $\boxed{\lambda = \dfrac{V}{4\pi r^2 N}}$

ou seja, é inversamente proporcional à seção reta de uma molécula e inversamente proporcional a $\frac{N}{V}$

Observe que λ não depende da velocidade da molécula

No cálculo foi considerado apenas uma molécula se movimentando, mas como todas as moléculas se movimentam o $\underline{\lambda}$ é um pouco menor por um fator $\sqrt{2}$

$$\therefore \boxed{\lambda = \frac{V}{4\pi r^2 \sqrt{2}\, N}}$$

Se $PV = NkT$ então $\boxed{\lambda = \dfrac{\cancel{N}kT}{P4\pi\sqrt{2}\,r^2\cancel{N}}}$

$$\therefore \boxed{\lambda = \frac{kT}{P4\pi\sqrt{2}\,r^2}}$$

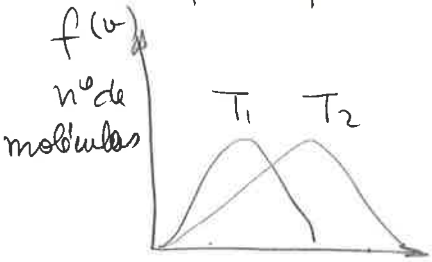
Para Tambiente e N_2

$$\boxed{\lambda \cong \frac{5\times10^{-3}\ (\text{cm})}{P\ (\text{Torr})}}$$

λ (cm)	P(Torr)
$6,5 \times 10^{-6}$ cm	760
5×10^{-3} cm	1
5cm	10^{-3}
50m	10^{-6}
5km	10^{-8}

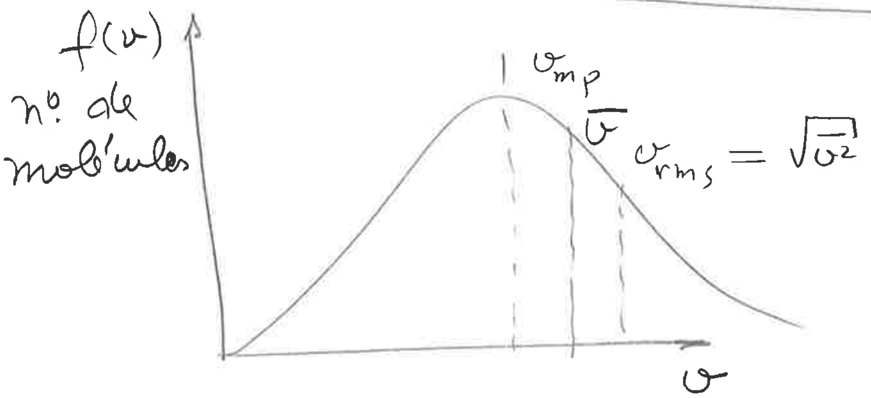
Distribuição de Maxwell - Boltzman

Função que descreve a distribuição real da velocidade das moléculas



$T_2 > T_1$ experimental

$$\boxed{f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}}$$



$$\boxed{\int_0^\infty f(v)\,dv = N}$$

Como $\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2$

então $$\boxed{f(\mathcal{E}) = \frac{8\pi}{m}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \mathcal{E}\; e^{-\frac{\mathcal{E}}{kT}}}$$

$v_{mp} \equiv$ velocidade mais provável

$\bar{v} \equiv$ velocidade média

$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} \equiv \sqrt{\text{velocidade quadrática média}}$

ⓐ Velocidade mais provável (v_{mp})

Máximo da curva

$$\frac{d}{dv} f(v) = 0$$

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \, e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$$\frac{df(v)}{dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \left[2v\, e^{-\frac{mv^2}{2kT}} + v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left(-\frac{2mv}{2kT}\right) \right] = 0$$

$$\frac{df}{dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left[2v - \frac{v^2 mv}{kT} \right] = 0$$

então

$$2v = \frac{v^3 m}{kT}$$

$$v^2 = \frac{2kT}{m}$$

$$\therefore \boxed{v_{mp} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}}$$

Velocidade média aritmética

Para um número discreto de partículas

$$\bar{v} = \frac{N_1 v_1 + N_2 v_2 + \dots + N_n v_n}{N}$$

onde $\boxed{N = \sum_{i=1}^{n} N_i}$

no caso contínuo

$$\bar{v} = \frac{\sum^{+} N_i v_i}{N} \Rightarrow \boxed{\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv}$$

$$f(v) = a v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

sendo $a = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v a v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

substituindo $x = v^2$ $dx = 2v dv$

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} \frac{a}{2} x e^{-\frac{mx}{2kT}} dx$$

integrando por partes

$u = x$ $du = dx$

$dv = e^{-\frac{mx}{2kT}}$ $v = e^{-\frac{mx}{2kT}} \cdot \left(-\frac{2kT}{m}\right)$

lembrando $\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$

$$\bar{v} = \frac{a}{2}\left[x\, e^{-\frac{mx}{2kT}}\left(-\frac{2kT}{m}\right)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-\frac{mx}{2kT}}\left(-\frac{2kT}{m}\right) dx \right]$$

$$\bar{v} = \frac{a}{2}\,\frac{2kT}{m}\int_0^{\infty} e^{-\frac{mx}{2kT}}\, dx$$

$$\bar{v} = \frac{akT}{m}\left(\frac{-2kT}{m}\right) e^{-\frac{mx}{2kT}}\Big|_0^{\infty} = 2a\left(\frac{kT}{m}\right)^2 //$$

substituindo $a = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$, temos.

$$\bar{v} = 2\times 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(\frac{kT}{m}\right)^2$$

$$\bar{v} = 2^3\pi\,(kT)^{1/2}\,\frac{1}{m^{1/2}(2\pi)^{3/2}} = \frac{2^{3/2}}{\pi^{1/2}}\,\frac{(kT)^{1/2}}{m^{1/2}}$$

$$\bar{v} = \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2}$$

$$\therefore\ \boxed{\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}}$$

A velocidade média é muito importante em tecnologia do vácuo

Velocidade Quadrática Média

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 f(v)\, dv$$

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 a v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 4\pi\left(\dfrac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \\ b = \dfrac{m}{2kT} \end{array} \right.$$

tabela de integrais

$$\int_0^{v} v^4 a \cdot e^{-bv^2} dv = \frac{3}{8b^2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

então

$$\boxed{\overline{v^2} = \frac{3kT}{m}} \quad ; \quad \boxed{\overline{v^2} = \frac{3R_0T}{M}}$$

$$k = \frac{R_0}{N_A}$$

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

$$\boxed{v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}}$$

Fluxo de Moléculas

Número de moléculas incidentes por unidade de área e por unidade de tempo

$$\boxed{\nu = \frac{1}{4} n \bar{v}} \qquad \boxed{n = \frac{N}{V} = \frac{P}{kT}}$$

$$\nu = \frac{N \times L}{L^2 \Delta t \times L} = \frac{N}{V} \frac{L}{\Delta t} = \frac{N}{\text{área tempo}}$$

$$\bar{v} = +\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\frac{N}{V} = \frac{P}{kT} \; ; \qquad \frac{L}{\Delta t} = \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

então $\nu = \dfrac{P}{4kT} \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}$

$$\nu = 3{,}5 \times 10^{22}\, P(\text{Torr})\, (MT)^{-1/2}\ \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$$

Problemas para o Lar

1. Quanto tempo leva para formar uma monocamada?
2. Quantas moléculas cabem em $1\,\text{cm}^2$?

   $\delta_{N_2} = 3{,}7 \times 10^{-8}\,\text{cm} \equiv$ diâmetro da molécula de N_2
3. Estime quando o nº. de moléculas no volume é igual ao número de moléculas na superfície?