AULA SOBRE JOGOS

PEDRO A TONELLI

1. Introdução

Atualmente a teoria dos jogos tem duas áreas de pesquisa bem distintas. Uma é conhecida como teoria de jogos combinatórios e constitui quase uma área própria da matemática com vários conceitos específicos e extremamente algébrica. A outra tendência é a teoria dos jogos clássica, e é mais popular por suas aplicações em economia, teoria social e biologia. A matemática envolvida na teoria clássica é bastante ampla, incluindo tópicos como álgebra linear, programação linear e não linear, análise funcional, sistemas dinâmicos, otimização e teoria de medidas. Do ponto de vista formal é possível incluir a teoria de jogos combinatórios como um ramo dos jogos clássicos.

Note que um jogo sempre é um conjunto de jogadores, seguindo determinadas regras para conseguir objetivos específicos. Então não são os *jogos* que se classificam como combinatórios ou clássicos, mas a teoria que fazemos sobre eles. A teoria de jogos combinatórios busca responder às questões sobre se é possível determinar um vencedor para o jogo e como achar a estratégia vencedora. Na teoria clássica o que se procura são situações de equilíbrio, isto é, uma situação em que todos os jogadores são convencidos de aquele é o melhor resultado é o melhor que ele consegue diante das circunstâncias. Nos ocuparemos mais da teoria clássica, mas vamos ilustrar os métodos da teoria combinatória neste início.

2. teoria dos jogos combinatórios

Em primeiro lugar vamos restringir os tipos de jogos que vamos analisar. Consideraremos os modelos para jogos com *dois jogadores* que se alternam para as suas jogadas. Pensem num jogo de Xadrez, por exemplo. Além disso *não há aleatoriedade* no jogo, e os jogadores podem escolher a jogada por seu livre arbítrio dentre as jogadas permitidas. Por último, *não haverá empates.* Sempre o jogo será decidido por alguma razão em favor de um dos dois jogadores.

2.1. **Algumas definições matemáticas.**

2.1.1. *Posições.* Para dar um pouco de estrutura a estes jogos diremos que ele evolui sobre um *conjunto de posições*, que vamos denotar por X. Ou seja, cada elemento $x_p \in X$ é uma posição possível do jogo. Para esta posição um dos jogadores tem a vez, vamos chamar este jogador de Ve, o outro jogador chamaremos de Az. Ve por convenção é o jogador que tem a vez de jogar, ele fará um lance levando a posição x_p para uma outra posição x_q, e agora Az terá a vez. Existem posições em que algum dos jogadores não tem como fazer o lance. Neste caso diremos que este jogador perdeu. A posição, neste caso, será dita *terminal.*

2.1.2. *jogadas.* Podemos estabelecer uma notação para uma jogada da seguinte forma: a jogada que começa numa posição x_p e é levada para uma posição x_q, será denotada resumidamente por (x_p, x_q) que é um par ordenado do conjunto $X \times X$.

O objetivo de analisar um jogo combinatório é saber se existe, e se é possível determinar uma *estratégia* vencedora para algum dos jogadores.

2.1.3. *Regras.* As regras do jogo determinam quando um jogador pode levar uma posição x_p para uma posição x_q. Quando isso for possível para o jogador Ve diremos $(x_p, x_q) \in R_V$, se for possível para o jogador Az também diremos $(x_p, x_q) \in R_A$. Observe que $R_V \subset X \times X$ é uma relação binária no conjunto das posições, o mesmo vale para R_A claro. No caso de conjunto finito de posições estas relações podem ser representadas por *grafos*.

2.1.4. *Posições terminais.* Se $x_t \in X$ for tal que para todo $x_p \in X$ temos que $(x_t, x_p) \notin R_V$, então x_t é uma posição terminal para o jogador Ve . Se o jogador Ve tem esta posição para responder, ele perde. A definição de posições terminais para o outro jogador é análoga. Teremos ainda a distinção entre dois casos possíveis: Se $R_V = R_A$ diremos que o jogo é *imparcial*, caso contrário o jogo é *parcial*. O Xadrez é um jogo parcial.

2.1.5. *partida.* Uma *partida* é uma sequência finita $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ de jogadas onde

- Cada p_i está em R_V ou R_A
- Se $p_i \in R_V$ então $p_{i+1} \in R_A$
- A segunda posição de p_n é uma posição terminal de R_V ou R_A

2.1.6. *jogo progressivamente finito.* Diremos ainda para este caso que a partida tem comprimento n, e que inicia na posição x_p que é o primeiro elemento de p_1. $r(x_p)$ denotará o comprimento máximo de uma partida que inicia em x_p. O jogo será dito *progressivamente finito* quando para qualquer $x_p \in X$ o número $B(x_p)$ é finito.

2.2. **Jogos imparciais.** Os jogos imparciais são aqueles em que existe uma total simetria entre os jogadores, ou seja , $R_V = R_A = R$, o que significa que para cada posição os jogadores têm as mesmas escolhas permitidas. Note que neste caso as posições terminais também são as mesmas e designamos estas posições por $T(R)$.

2.2.1. *Estratégias.* Daremos agora uma definição de estratégia que se ajusta aos tipos de jogos que estamos estudando. Uma *estratégia* para o jogador Ve (Az)é uma função

$$e : X \setminus T(R) \to X$$

tal que sempre $(x_p, e(x_p)) \in R$.

Se um jogador escolhe uma estratégia e_1, significa que ele já sabe o que vai fazer em cada posição que aparecer. Se o jogador Ve escolher uma estratégia e_1 e o jogador Az uma estratégia e_2 então a partida inteira fica determinada.

Antes de dar os primeiros resultados matemáticos sobre jogos imparciais, vamos dar um exemplo para ilustração.

2.2.2. *Jogo da diferença:* É dada uma pilha com n fichas. A seu turno, cada jogador pode remover entre 1 e 4 fichas da pilha. Vence o último que conseguir tirar fichas da pilha.

O conjunto das posições é o número de fichas deixado na pilha, $X = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Se, por exemplo, $7 \in X$ então temos que $(7, 6)$, $(7, 5)$, $(7, 4)$ e $(7, 3)$ são elementos de R_1 e R_2. Para este jogo, dada uma posição inicial n é possível dizer se o jogador que tem a vez vence, ou se é o jogador que joga depois dele é que vence, e a análise é fácil. Se a posição for $1, 2, 3$ ou 4, o jogador da vez vence, (se ele for suficientemente esperto!). Se a posição for 5, qualquer que seja a retirada do jogador da vez ele deixará $1, 2, 3$ ou 4, e então perderá. Já com a posição 6, ele pode tirar só uma ficha e passar a posição 5 para o adversário. Com esta análise preliminar vemos que podemos definir dois conjuntos: o conjunto V das posições que são vencedoras para o jogador da vez e o conjunto P das posições perdedoras para o jogador da vez. No nosso exemplo temos

$$A = \{0, 5, 10, \ldots, 5 * k, \ldots\}$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus P$$

Estes conjuntos satisfazem estas propriedades

- Se p_1 é uma posição de A então **qualquer** jogada levará a uma posição de V.
- se p_1 for uma posição de V então **existe** uma jogada que leva a uma posição de A.

2.2.3. *Teorema da Partição de um jogo.* Suponha que temos um jogo imparcial, com conjunto de posições X e regras de movimento $R \subset X \times X$, e que seja progressivamente finito. Seja V o conjunto dos elementos de X que possui uma estratégia vencedora para o jogador da vez. E seja A o conjunto das posições para as quais qualquer jogada leva a uma posição de V. Isto significa que para qualquer posição de P existe uma estratégia vencedora para o segundo jogador.

O teorema da partição diz que $X = P \cup V$. O quer dizer que para toda posição x_p ou existe uma estratégia vencedora para o jogador da vez, ou para o segundo jogador.

Vamos provar este resultado. Em primeiro lugar vamos definir uma sequência de conjuntos V_i e P_i da seguinte forma:

$$A_1 = A_0 = T(R) \tag{1}$$

$$V_{i+1} = \{x_p \in X : \exists (x_p, x_r) \in R \text{ com } x_r \in A_i\} \tag{2}$$

$$A_{i+1} = \{x_p \in X : \forall (x_p, x_r) \in R \text{ então } x_r \in V_i\} \tag{3}$$

Lembramos que para todo $x \in X$, temos que $B(x)$ é finito por causa da hipótese do jogo ser progressivamente finito. Vamos mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$, se $B(x) \leq n$ então, $x \in V_n \cup A_n$. Isto é demonstrado por indução finita. Se $n = 0$ é fácil, pois nesse caso x deve ser uma posição terminal e só pode estar em A_0 ($V_0 = \emptyset$).

Agora supomos que a proposição vale até o número n e mostraremos que vale para $n + 1$. Se $B(x) \leq n + 1$ então qualquer jogada leva a uma posição y tal que $B(y) \leq n$. Usando a hipótese de indução temos duas possibilidades.

- $y \in A_n$ e então $x \in V_{n+1}$

- Para toda jogada temos que $y \in V_n$, e neste caso x está em A_{n+1}

Sim! Acabou a demonstração.

Note que esse resultado diz que para cada posição existe uma estratégia vencedora para um dos jogadores. Mas isto não é suficiente para determinar qual jogador, e menos ainda qual seria a estratégia ganhadora.

3. Jogo de Nim

Um exemplo clássico de jogo imparcial e progressivamente finito é o jogo Nim. Num conjunto de k pilhas, cada pilha com um certo número de fichas, cada jogador, na sua vez, pode tirar quantas fichas quiser de uma pilha. O jogador que não tem nenhuma ficha para tirar perde.

Podemos representar as posições deste jogo como $x = (y_1, \cdots, y_k)$ onde k é o número de pilhas e y_i é o número de fichas na i-ésima pilha. A posição terminal é (0). As posições só com uma pilha (y), são posições vencedoras para o jogador da vez, isto é $(y) \in V$. As posições (y, y) levam o jogador da vez à derrota, pois a cada movimento que ele fizer numa pilha, o segundo jogador repete o movimento na outra pilha. Então $(y, y) \in P$.

Agora, dada uma posição qualquer, digamos $(y_1, \cdots, y_k)$ como determinamos se ela está em V ou em P?

Vamos dar o primeiro resultado neste sentido. Primeiro só fixamos uma notação para escrever o resultado com mais comodidade. Se $x_1 = (y_1, \cdots, y_m)$ é uma posição com m pilhas, e $x_2 = (z_1, \cdots, z_n)$ é uma outra posição com n pilhas, então (x_1, x_2) denota a posição com $n + m$ pilhas juntando x_1 e x_2.

Teorema

- se x_1 e x_2 estão em P, então (x_1, x_2) está em P.
- se $x_1 \in P$ e $x_2 \in V$, então (x_1, x_2) está em V.

Prova: Estar em P significa que o segundo jogador ganha. Então o segundo jogador segue a seguinte estratégia: se o primeiro jogador joga em x_1, o segundo jogador também joga em x_1. E se jogar o jogador da vez jogar em x_2 ele também joga em x_2. Isto prova o primeiro item.

No segundo item, o jogador da vez pode fazer uma jogado em x_2 que leve a uma posição $x_2' \in P$, e como vimos no item anterior (x_1, x_2') está em P, o que mostra o teorema.

Com este teorema podemos analisar algumas posições.

3.1. A técnica de Bouton.

Charles Bouton, em 1902, desenvolveu uma técnica para resolver o jogo de Nim. Seja $x_p = (y_1, \ldots, y_k)$ uma posição qualquer de Nim. Definimos a soma Nim de x da seguinte forma, escrevemos cada número y_i na forma binária:

$$y_i = \sum_{j=0}^{p_i} b_{ij} 2^j$$

Agora para cada j o resto da divisão de $\sum_{i=1}^{k}$ por 2 é o número d_j que só pode ser 0 ou 1. A soma Nim é definida como

$$N(x) = y_1 \oplus y_2 \oplus \cdots \oplus y_k = \sum_{j=0} d_j 2^j$$

Teorema: se $Z = \{x : N(x) = 0\}$ então $Z = P$ e $Z^c = V$

Exemplo: Se $x = (1, 2, 3)$ temos então:

y	2^2	2^1	2^0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
N	0	0	0

Exercícios

1 Na seguinte posição de Nim, voce gostaria de ser o primeiro ou o segundo a jogar? $X = (1, 2, 3, 4, 6, 7, 12)$

2 Como você analisaria a seguinte posição do jogo Nim $x = (2, 3, 1, 1, 5, 4)$?

3- Considere uma variação de Nim em que a cada jogada, além de tirar fichas de uma pilha, o jogador pode dividir em duas o restante desta pilha. Será que o critério de Bouton ainda é válido?

4 No jogo de *Nim na escada*, imaginamos que em cada degrau de uma escada com n degraus, temos uma pilha de fichas. O lance de cada jogador consiste em mover qualquer número de fichas de uma pilha, para a pilha um degrau abaixo. A fichas que chegam ao térreo (degrau 0) são eliminadas. Quem não tem mais fichas a mover perde. Se $y = (y_1, \ldots, y_n)$ denota o número de fichas em cada degrau, mostre que então se a soma de Nim dos números nos degraus ímpares for zero a posição é de P, ou seja o primeiro a jogar perde.

5 Uma barra retangular de chocolate está dividida em quadradinhos. O quadradinho do canto de baixo à esquerda é removido é esta é a posição inicial do jogo. A cada lance o jogador escolhe um quadradinho não comido e retira todos os quadradinhos à direita e acima deste. Começando com um quadrado 3×2, quem ganha este jogo?