4302401 – Mecânica Estatística

Noções de Probabilidade – III

Duas Variáveis Aleatórias

– Algumas propriedades das *probabilidades conjuntas* são extensões imediatas do caso de uma variável:

– Densidade de probabilidade: $p_{x,y}(x', y')$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{x,y}(x', y')\, dx' dy' \;=\; 1$$

– Probabilidade cumulativa ($x \leq x'$ e $y \leq y'$):

$$P_{x,y}(x', y') \;=\; \int_{-\infty}^{x'}\int_{-\infty}^{y'} p_{x,y}(x'', y'')\, dx'' dy''$$

$$p_{x,y}(x', y') \;=\; \frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'} P_{x,y}(x', y')$$

– Valor Médio: $$\langle f(x,y)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p_{x,y}(x',y')\, f(x',y')\, dx' dy'$$

– prob ($x' \leq x < x' + dx'$) e ($y' \leq y < y' + dy'$): $$p_{x,y}(x',y')\, dx'\, dy'$$

– **Redução a Uma Variável**: Podemos indagar sobre a densidade de probabilidade da variável x, sem qualquer restrição sobre y (por exemplo, quando não conhecemos ou não estamos interessados em conhecer y). Naturalmente, o mesmo vale para y em relação a x.

Variáveis Discretas (exemplo): No lançamento de dois dados não viciados, denominados 1 e 2, há 36 resultados possíveis, pois ($1 \leq x_1 \leq 6$) e ($1 \leq x_2 \leq 6$). A probabilidade de obter $x_1 = x_1$', deve contabilizar todas as possibilidades para x_2:

$$p_{x_1}(x_1') = \sum_{x_2'=1}^{6} p_{x_1,x_2}(x_1',x_2') = \sum_{x_2'=1}^{6} \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

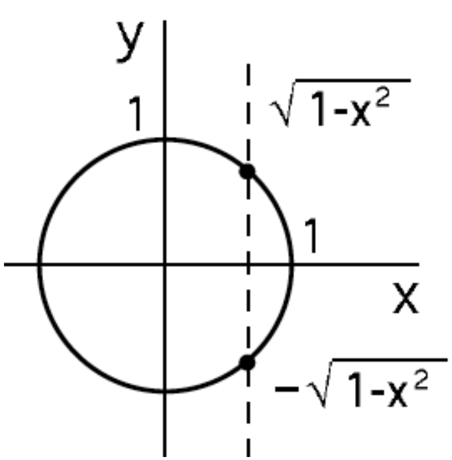
– **Variáveis Contínuas**: nesse caso, devemos integrar sobre a "outra" variável para contabilizar todas as possibilidades. Obtemos assim a densidade de probabilidade *reduzida* ou *marginal*:

$$p_x(x') = \int_{-\infty}^{\infty} p_{x,y}(x', y')\, dy'$$

$$p_y(y') = \int_{-\infty}^{\infty} p_{x,y}(x', y')\, dx'$$

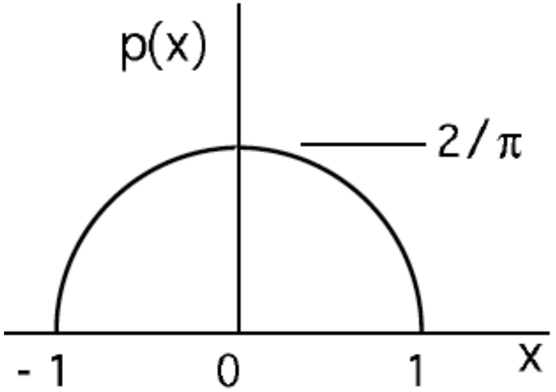
– **Exemplo**: suponha que a probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias seja *uniforme* sobre um disco de raio unitário, como definido abaixo (em notação simplificada). Obtenha $p_x(x)$.

$$\begin{aligned} p(x,y) &= 1/\pi \quad x^2+y^2 \le 1 \\ &= \quad 0 \quad\;\; x^2+y^2 > 1 \end{aligned}$$



$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\, dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,, & |x| \leq 1 \\ 0\,, & |x| > 1 \end{cases}$$

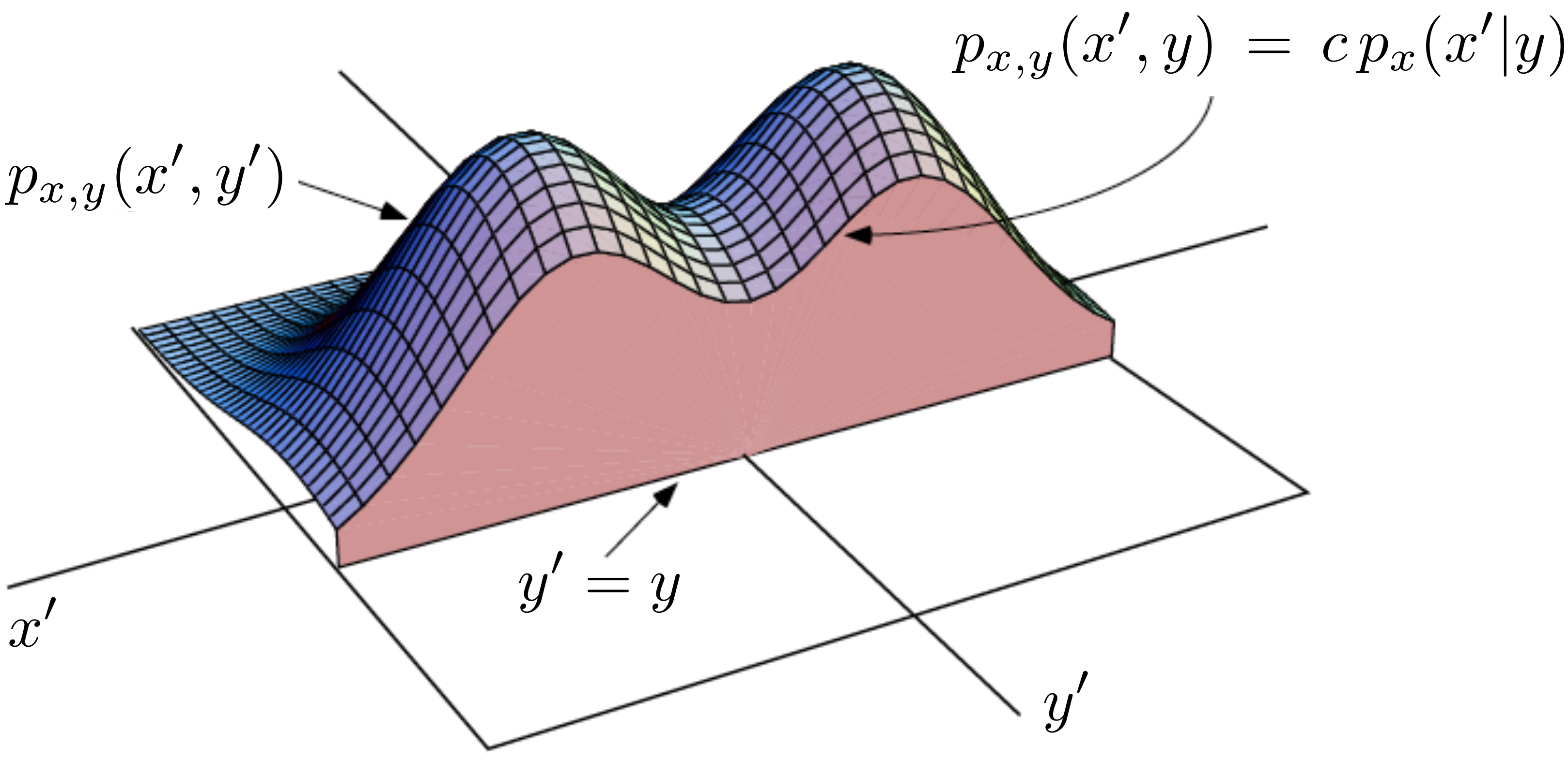


Embora não se trate de uma propriedade geral (válida para qualquer densidade conjunta), no presente exemplo a expressão para $p(y)$ é análoga:

$$p(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}\,, & |y| \leq 1 \\ 0\,, & |y| > 1 \end{cases}$$

– **Probabilidade Condicional**: podemos indagar sobre a probabilidade de *x* para um dado valor de *y*. A *probabilidade condicional* da variável *x* para um dado valor de *y* é definida como:

$$p_x(x'|y)dx' = \text{prob}(\, x' < x \leq x' + dx' \quad \text{dado} \quad y' = y)$$



– O corte $p_{x,y}(x',y)$ não representa uma densidade de probabilidade usual, pois em geral sua integral sobre dx' é diferente de 1. Para que a densidade condicional seja devidamente normalizada:

$$p_{x,y}(x',y) = c\, p_x(x'|y) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_{x,y}(x',y)\,dx'}_{=\,p_y(y'=y)} = c \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_x(x'|y)\,dx'}_{=\,1}$$

– **Teorema de Bayes** (Lei Fundamental da Probabilidade Condicional):

$$\boxed{p_x(x'|y') = \frac{p_{x,y}(x',y')}{p_y(y')} \quad \text{ou} \quad p_{x,y}(x',y') = p_x(x'|y')\,p_y(y')}$$

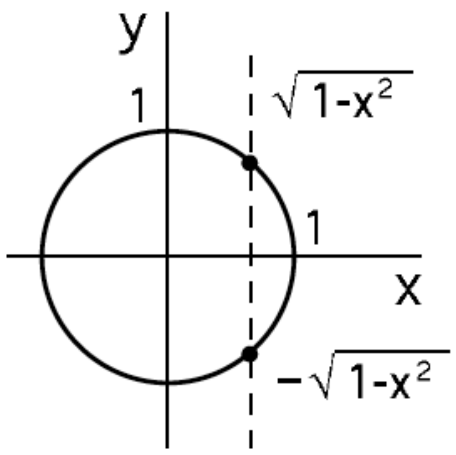
– **Independência Estatística**: duas variáveis aleatórias são ditas estatisticamente independentes caso sua probabilidade conjunta possa ser decomposta no produto das densidades reduzidas:

$$p_{x,y}(x', y') = p_x(x')\, p_y(y') \;, \quad x \;\text{ e }\; y \;\text{ estat. indep.}$$

– Nesse caso (*x* e *y* independentes): $p_x(x'|y') = p_x(x')$

– **Exemplo**: No exemplo da densidade uniforme sobre o disco de raio unitário, as variáveis *x* e *y* são estatisticamente independentes?

$$\begin{aligned} p(x,y) &= 1/\pi \quad x^2 + y^2 \le 1 \\ &= 0 \quad\;\;\; x^2 + y^2 > 1 \end{aligned}$$

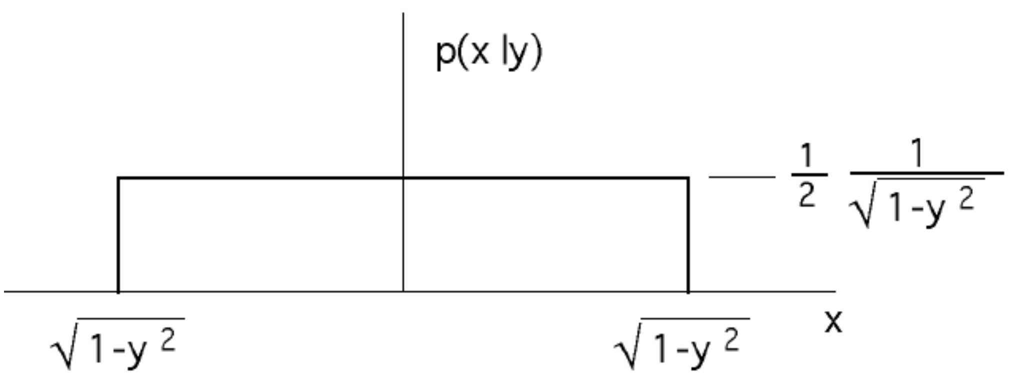


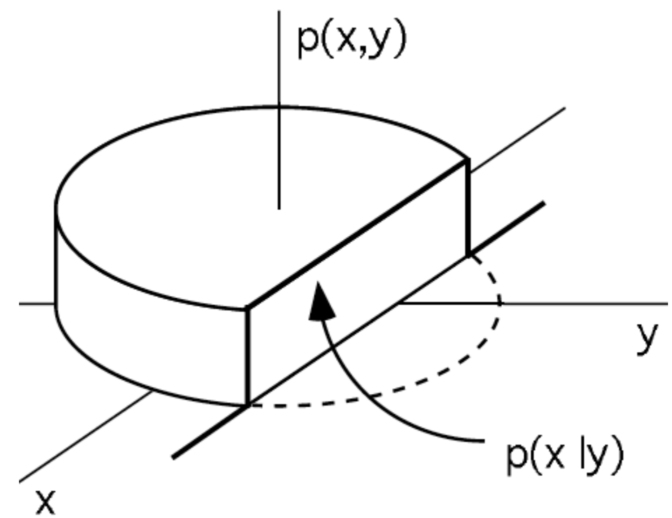
– Tendo obtido as densidades reduzidas, poderemos calcular a densidade condicional:

$$p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(y)} = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}\,,$$

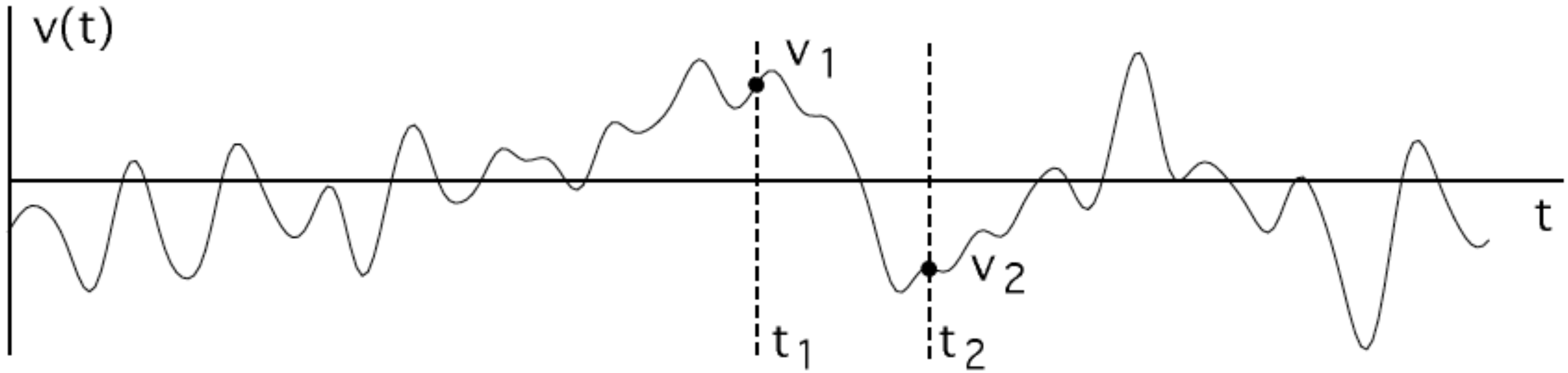
para $\quad |x| \leq \sqrt{1-y^2}$

– Uma vez que $p(x|y) \neq p(x)$, as variáveis são estatisticamente *dependentes*.





– **Exemplo**: distribuição normal (Gaussiana) bivariada.



$$p(v_1, v_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{v_1^2 - 2\rho v_1 v_2 + v_2^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right]$$

Nesse exemplo, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. O parâmetro ρ é denominado coeficiente de correlação. Caso $\rho = 0$, as variáveis aleatórias v_1 e v_2 (voltagens nos instantes indicados) são independentes. Em geral, definindo $\tau = (\tau_2 - \tau_1)$, teremos $\rho \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow \infty$, enquanto $\rho \rightarrow 1$ quando $\tau \rightarrow 0$. Obtenha as densidades $p(v_1)$, $p(v_2)$ e $p(v_1|v_2)$, admitindo ρ constante.

– Densidades reduzidas:

$$\begin{aligned}
p(v_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(v_1, v_2)\, dv_2 \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\frac{(v_2^2 - 2\rho v_1 v_2 + \rho^2 v_1^2) + (v_1^2 - \rho^2 v_1^2)}{2\sigma^2(1-\rho^2)}]\, dv_2 \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp[-\frac{v_1^2}{2\sigma^2}] \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\frac{(v_2-\rho v_1)^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}]\, dv_2}_{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-\rho^2)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp[-\frac{v_1^2}{2\sigma^2}]
\end{aligned}$$

– De forma semelhante:

$$p(v_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp[-\frac{v_2^2}{2\sigma^2}]$$

– Densidade condicional:

$$
\begin{aligned}
p(v_2|v_1) &= \frac{p(v_1, v_2)}{p(v_1)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-\rho^2)}} \exp[-\left(\frac{(v_2^2 - 2\rho v_1 v_2 + v_1^2)}{2\sigma^2(1-\rho^2)} - \frac{v_1^2(1-\rho^2)}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-\rho^2)}} \exp[-\frac{(v_2 - \rho v_1)^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}]
\end{aligned}
$$

(independentes caso $\rho = 0$)