Curvatura e Torção

Esmerindo Bernardes[1,*]
[1]*Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 13560-970 São Carlos, SP, Brazil*
(Dated: 15 de Fevereiro de 2016)

Os conceitos de curvatura e torção são fundamentais na descrição da geometria do espaçotempo usada na Relatividade Geral. Estes conceitos são discutidos aqui usando as noções de velocidade e aceleração de um corpo em movimento numa dada trajetória.

CONTEÚDO

I. CURVATURA E TORÇÃO

Questões são sempre bem vindas. Qual é a interpretação geométrica da aceleração? Vamos tentar entender esta pergunta estudando alguns exemplos. Primeiro, consideremos uma trajetória retilínea onde a posição de um de seus pontos num determinado instante t seja representada pelo vetor (posição) $\vec{r}(t) = (t, 1+t, 0)$. Consequentemente, os vetores velocidade e aceleração são $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (1, 1, 0)$ e $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (0, 0, 0)$, respectivamente, onde estamos usando um ponto sobre para representar a derivada temporal. Obviamente, o produto vetorial $\vec{v} \times \vec{a}$ é nulo para esta trajetória. Vejamos se este mesmo produto vetorial também é nulo para uma trajetória que não é retilínea, como a trajetória circular, por exemplo. Em geral, o vetor posição

$$\vec{r}(t) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t, 0) \tag{1}$$

representa (de forma paramétrica) uma circunferência de raio R, centrada na origem. Consequentemente, os vetores velocidade e aceleração são

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-\omega R\sin\omega t, \omega R\cos\omega t, 0), \tag{2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (-\omega^2 R\cos\omega t, -\omega^2 R\sin\omega t, 0) = -\omega^2\,\vec{r}, \tag{3}$$

respectivamente. Assim, temos três informações importantes sobre este movimento circular: (i) a aceleração é voltada para o centro (centrípeta), pois $\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$; (ii) o vetor velocidade é sempre perpendicular ao vetor posição $\vec{r}\cdot\vec{v} = 0$; e (iii) os módulos dos vetores posição (R), velocidade ($R\omega$) e aceleração (v^2/R) permanecem constantes durante o movimento (apenas suas direções e sentidos é que variam no tempo). A informação (ii) é equivalente à interpretação geométrica do vetor velocidade como sendo sempre tangente à trajetória. Desta vez o produto vetorial $\vec{v}\times\vec{a}$ não é nulo e seu módulo vale $\|\vec{v}\times\vec{a}\| = \omega^3 R^2$. Consideremos outra trajetória, a parábola $\vec{r}(t) = (t, 1+t^2, 0)$. Imediatamente, temos $\vec{v} = (1, 2t, 0)$ e $\vec{a} = (0, 2, 0)$. Desta vez, o módulo do vetor velocidade não é constante e o produto vetorial $\vec{v}\times\vec{a}$ não é nulo, $\vec{v}\times\vec{a} = (0, 0, 2)$ (verifique e visualize estes resultados).

Como podemos quantificar o quanto uma dada trajetória se diferencia de uma trajetória retilínea? A resposta está no produto vetorial $\vec{v}\times\vec{a}$. A quantidade escalar κ definida por (a menos de um sinal)

$$|\kappa| = \frac{\|\vec{v}\times\vec{a}\|}{v^3}, \quad v = \|\vec{v}\|, \tag{4}$$

denominada de **curvatura**, com dimensão de inverso de comprimento, é nula para uma reta (qualquer), vale $\kappa = 1/R$ para a trajetória circular $\vec{r} = (R\cos\omega t, R\sin\omega t, 0)$ e $\kappa = 2/(1+4t^2)^{3/2}$ para a parábola $\vec{r} = (t, 1+t^2, 0)$. Desta forma, podemos afirmar que a curvatura é um escalar que mede o quanto uma curva desvia-se de uma reta, a qual possui uma curvatura nula. Vale mencionar que uma reta pode ser vista como uma circunferência de raio infinito. Note que uma parábola se aproxima de retas (assímptotas) para valores muito grandes de t ($t \gg 1$) e que a curvatura $\kappa = 2/(1+4t^2)^{3/2}$ é nula no limite $t \to \infty$. Note também que esta curvatura em $t = 0$ é $\kappa(0) = 2$. Verifique que a parábola $\vec{r} = (t, 1+t^2, 0)$ se aproxima muito de uma circunferência de raio $1/\kappa(0)$, centrada em $(0, 3/2)$, na região em torno de $t = 0$, onde $y(0) = 1$. Assim, a curvatura em $t = 0$ está nos informando o quanto a parábola se desvia de uma reta. Faça o Exercício 1.

Há uma outra maneira de ver a relação entre curvatura e velocidade/aceleração ainda mais frutífera. Seja v o módulo do vetor velocidade e $\hat{v}$ o seu versor, então $\vec{v} = v\hat{v}$. Note que o versor $\hat{v}$ é sempre tangente à trajetória $\vec{r}$, pois $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ (derivada do vetor posição). Por isso, $\hat{v}$ também é conhecido por **versor tangente** da curva $\vec{r}$ (forma paramétrica). Então, o vetor aceleração correspondente, calculado pela derivada do vetor velocidade, é

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(v\hat{v}) = \dot{v}\hat{v} + v\dot{\hat{v}}. \tag{5}$$

Embora não esteja indicado, mas todas as quantidades aqui dependem explicitamente do tempo. Entretanto, o versor $\hat{v}$ possui uma propriedade especial: seu módulo é sempre igual à unidade (por definição), ou seja, seu módulo é constante no tempo. Podemos ver em (5) que a aceleração possui uma componente tangencial (na direção do versor tangente) igual a $\dot{v}$ (derivada do módulo do vetor velocidade). Em que direção está a derivada $\dot{\hat{v}}$ do versor tangente? Podemos encontrar esta

* sousa@ifsc.usp.br

direção facilmente se usarmos o fato de que $\hat{v}$ é um versor, então $\hat{v}\cdot\hat{v} = 1$ (módulo independente do tempo). Derivando os dois lados da igualdade $\hat{v}\cdot\hat{v} = 1$, temos

$$\frac{d}{dt}(\hat{v}\cdot\hat{v}) = 2\hat{v}\cdot\dot{\hat{v}} = 0. \tag{6}$$

Este resultado nos mostra que $\dot{\hat{v}}$ é perpendicular a $\hat{v}$. Note que este resultado vale para qualquer versor (dependente do tempo), ou para qualquer vetor cujo módulo não varia com o tempo. É comum denominarmos de normal a direção perpendicular ao versor tangente. O versor $\hat{n}$ na direção normal é conhecido por versor normal. Como o versor normal $\hat{n}$ e a derivada $\dot{\hat{v}}$ são paralelos, podemos esolher

$$\dot{\hat{v}} = v\kappa\hat{n}, \tag{7}$$

onde κ é um escalar, em geral dependente do tempo, denominado de curvatura. Veremos que ele é o mesmo escalar dado em (4). Além disso, colocamos o módulo do vetor velocidade em evidência na Eq. (7) por mera conveniência, como veremos a seguir. Portanto, a aceleração (5) pode ser re-escrita como

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}\,\hat{v} + v^2\kappa\,\hat{n}. \tag{8}$$

Fizemos acima a escolha (7). Vejamos como esta escolha é compatibilizada com a expressão (4) para a curvatura. Multiplique vetorialmente os dois lados da aceleração (8) por $\vec{v}$. Como o produto vetorial entre vetores paralelos é nulo, então

$$\vec{v}\times\vec{a} = \dot{v}\,\vec{v}\times\hat{v} + v^2\kappa\,\vec{v}\times\hat{n} = v^3\kappa\,\hat{b}, \tag{9}$$

onde introduzimos um versor novo, $\hat{b} = \hat{v}\times\hat{n}$, denominado de versor binormal. Assim, calculando o módulo dos dois lados, podemos isolar a curvatura para re-obter a expressão (4).

Note que o produto $v\kappa$ em (7) tem a dimensão de inverso do tempo, como esperado. A motivação para a escolha de $v\kappa$ como a constante de proporcionalidade entre $\hat{n}$ e $\dot{\hat{v}}$ em (7) vem da trajetória circular. Como vimos anteriormente, a curvatura de uma circunferência é o inverso de seu raio ($\kappa = 1/R$). Lembrando que o módulo do vetor velocidade não muda em um movimento circular, então $\dot{v} = 0$. Desta forma, para um movimento circular, a aceleração (8) reduz-se à aceleração centrípeta $\vec{a} = -(v^2/R)\hat{r}$, com $\hat{n} = -\hat{r}$. Estes resultados justificam a escolha que fizemos em (7).

II. TORÇÃO

Curvas também podem ser classificadas como pertencentes a um plano, como uma circunferência ou uma parábola, para citar dois exemplos conhecidos, ou não pertencentes a um plano, como uma hélice, outro exemplo bem conhecido. Considere novamente uma trajetória circular. Nela, o vetor velocidade (tangencial) é sempre perpendicular ao vetor aceleração (centrípeta), ambos contidos no plano da trajetória circular. Desta forma, o produto vetorial entre os versores tangencial (velocidade) e normal (aceleração centrípeta) do movimento circular é sempre perpendicular ao plano da trajetória, portanto nunca muda de direção. Sendo um pouco mais preciso, é a taxa de variação do versor binormal $\hat{b} = \hat{v}\times\hat{n}$ que mede o quanto uma determinada curva afasta-se de um plano. Elaborando um pouco mais este exemplo, podemos construir uma ferramenta para medir o quanto uma curva se afasta de um plano, ou seja, para medir o grau de torcimento de uma curva espacial.

Antes de mais nada, é importante notar que os três versores $\hat{v}$, $\hat{n}$ e $\hat{b}$, com $\hat{b} = \hat{v}\times\hat{n}$, são ortonormais e obedecem a regra da mão-direita, assim como os versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ de um sistema ortonormal de coordenadas. Os três versores $\{\hat{v},\hat{n},\hat{b}\}$ são conhecidos por tríade de Frenet. Note que estes versores são funções (vetoriais) do tempo, ou seja, ao contrário dos versores $\{\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}\}$ que estão fixos, a tríade de Frenet é móvel (acompanha o objeto). Note também que os versores da tríade de Frenet são linearmente independentes. Sendo linearmente independentes, podemos escrever a primeira derivada de qualquer um deles como uma combinação linear deles mesmos, como fizemos em (7). Como eles são versores, então podemos usar o que aprendemos em (6), isto é, a taxa de variação de um versor (derivada primeira) é perpendicular ao versor. Por exemplo, $\dot{\hat{n}}\cdot\hat{n} = 0$. Assim, $\dot{\hat{n}}$ deve ser uma combinação linear da forma $\dot{\hat{n}} = \alpha\hat{v} + \beta\hat{b}$, com α e β sendo dois números reais. Multiplicando escalarmente esta combinação linear por $\hat{v}$, obtemos $\alpha = \dot{\hat{n}}\cdot\hat{v} = -\hat{n}\cdot\dot{\hat{v}} = -v\kappa$, onde usamos também a derivada (7). De forma análoga, multiplicando $\dot{\hat{n}} = \alpha\hat{v} + \beta\hat{b}$ escalarmente por $\hat{b}$, obtemos $\beta = \dot{\hat{n}}\cdot\hat{b} = -\hat{n}\cdot\dot{\hat{b}}$. Infelizmente ainda não decompusemos a derivada $\dot{\hat{b}}$ em termos da tríade de Frenet.

Procedendo de forma similar ao parágrafo anterior, sabemos que $\dot{\hat{b}}\cdot\hat{b} = 0$. Assim, devemos ter $\dot{\hat{b}} = \bar{\alpha}\hat{v} + \bar{\beta}\hat{n}$. Multiplicando escalarmente esta combinação linear por $\hat{v}$ obteremos $\bar{\alpha} = \dot{\hat{b}}\cdot\hat{v} = -\hat{b}\cdot\dot{\hat{v}} = -v\kappa\hat{b}\cdot\hat{n} = 0$, onde usamos também a derivada (7). Portanto, $\dot{\hat{b}} = \bar{\beta}\hat{n}$. Levando esta informação em $\beta = -\hat{n}\cdot\dot{\hat{b}}$, obtida no final do parágrafo anterior, teremos que $\beta = -\bar{\beta}$. Desta forma, temos que fazer uma escolha para $\bar{\beta}$. A mais utilizada é $\bar{\beta} = -v\tau$ (note a semelhança com a escolha que fizemos em (7)). Desta forma,

$$\dot{\hat{b}} = -v\tau\,\hat{n}, \tag{10}$$

onde o número τ, geralmente uma função do tempo, é conhecido por torção da curva $\vec{r}$. Tendo escolhido o valor de $\bar{\beta}$, a primeira derivada $\dot{\hat{n}}$ torna-se em

$$\dot{\hat{n}} = -v\kappa\,\hat{v} + v\tau\,\hat{b}. \tag{11}$$

As equações (diferenciais) (7), (10) e (11),

$$\dot{\hat{v}} = v\kappa\hat{n}, \tag{12}$$

$$\dot{\hat{b}} = -v\tau\,\hat{n}, \tag{13}$$

$$\dot{\hat{n}} = -v\kappa\,\hat{v} + v\tau\,\hat{b}, \tag{14}$$

são conhecidas por equações de Frenet. Elas determinam univocamente uma curva a partir do conhecimento de apenas duas funções escalares: a curvatura $\kappa = \kappa(t)$ e da torção $\tau = \tau(t)$.

Podemos deduzir uma expressão bastante conveniente para calcular a torção de forma análoga à expressão (4), usada para calcular a curvatura. Para isto, precisamos da derivada do vetor aceleração (verifique),

$$\dot{\vec{a}} = (\ddot{v} - \kappa^2 v^3)\hat{v} + [\kappa v\dot{v} + \frac{d}{dt}(\kappa v^2)]\hat{n} + \kappa\tau v^3\hat{b}. \quad (15)$$

Multiplicando escalarmente esta expressão por $\vec{v}\times\vec{a} = v^3\kappa\,\hat{b}$, obtida em (9), teremos

$$\tau = \frac{\vec{v}\times\vec{a}\cdot\dot{\vec{a}}}{v^6\kappa^2}, \quad (16)$$

ou, numa forma mais simétrica,

$$\tau = \frac{\vec{v}\times\vec{a}\cdot\dot{\vec{a}}}{||\vec{v}\times\vec{a}||^2} = \frac{\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\cdot\dddot{\vec{r}}}{||\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}||^2}. \quad (17)$$

Note que a taxa de variação do vetor aceleração tem utilidade aqui.

Faça o Exercício 2 para ver que a torção de curvas planas (retas, parábolas, circunferências, etc.) é nula, como deveríamos esperar. No entanto, note que a torção de uma curva como uma hélice é diferente de zero.

Estes conceitos bastante intuitivos de curvatura e torção de uma curva são fundamentais na concepção moderna de espaço e tempo (espaçotempo). Como você está percebendo, existe uma relação muito íntima entre Física e Geometria. Esta relação é confirmada em muitas outras áreas da Física e atinge seu clímax na Teoria da Relatividade Geral elaborada por Albert Einstein.

III. EXERCÍCIOS

Exercício 1

Desenhe a curva $\vec{r} = (t, 1 + t^2)$ (parábola) no intervalo $t \in [-0.5, 0.5]$ (guarde este desenho na variável g1, se estiver usando computação algébrica). No mesmo desenho da parábola, dsenhe a circunferência de raio $1/\kappa(0)$, com $\kappa(t) = 2/(1+4t^2)^{3/2}$, centrada em $(0, 3/2)$ (guarde este desenho numa variável g2, se estiver usando computação algébrica). Analise estes dois desenhos simultaneamente e tire suas conclusões a respeito da curvatura em $t = 0$.

Exercício 2

Calcule a curvatura e a torção da circunferência $\vec{r}(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), 0)$ e da hélice circular $\vec{r}(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), \alpha t)$.