Linhas de Transmissão
(Resumo)

SEL 369 Micro-ondas

Amílcar Careli César
Departamento de Engenharia Elétrica da EESC-USP




LINHAS DE TRANSMISSÃO

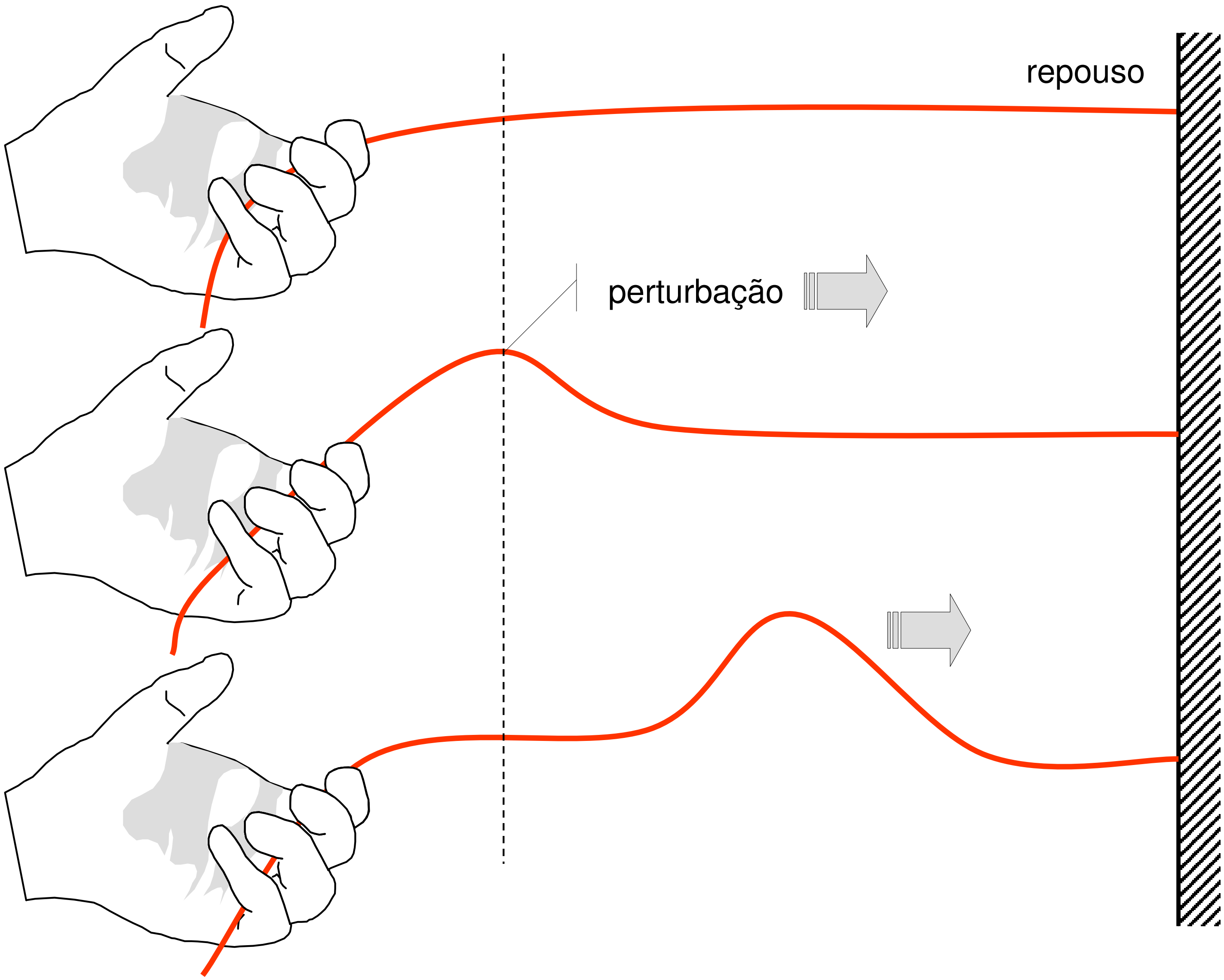
Atenção!

- Este material didático é planejado para servir de apoio às aulas de SEL-369: Micro-ondas, oferecida aos alunos regularmente matriculados no curso de engenharia elétrica/eletrônica e engenharia de computação.
- Não são permitidas a reprodução e/ou comercialização do material.
- solicitar autorização ao docente para qualquer tipo de uso distinto daquele para o qual foi planejado.

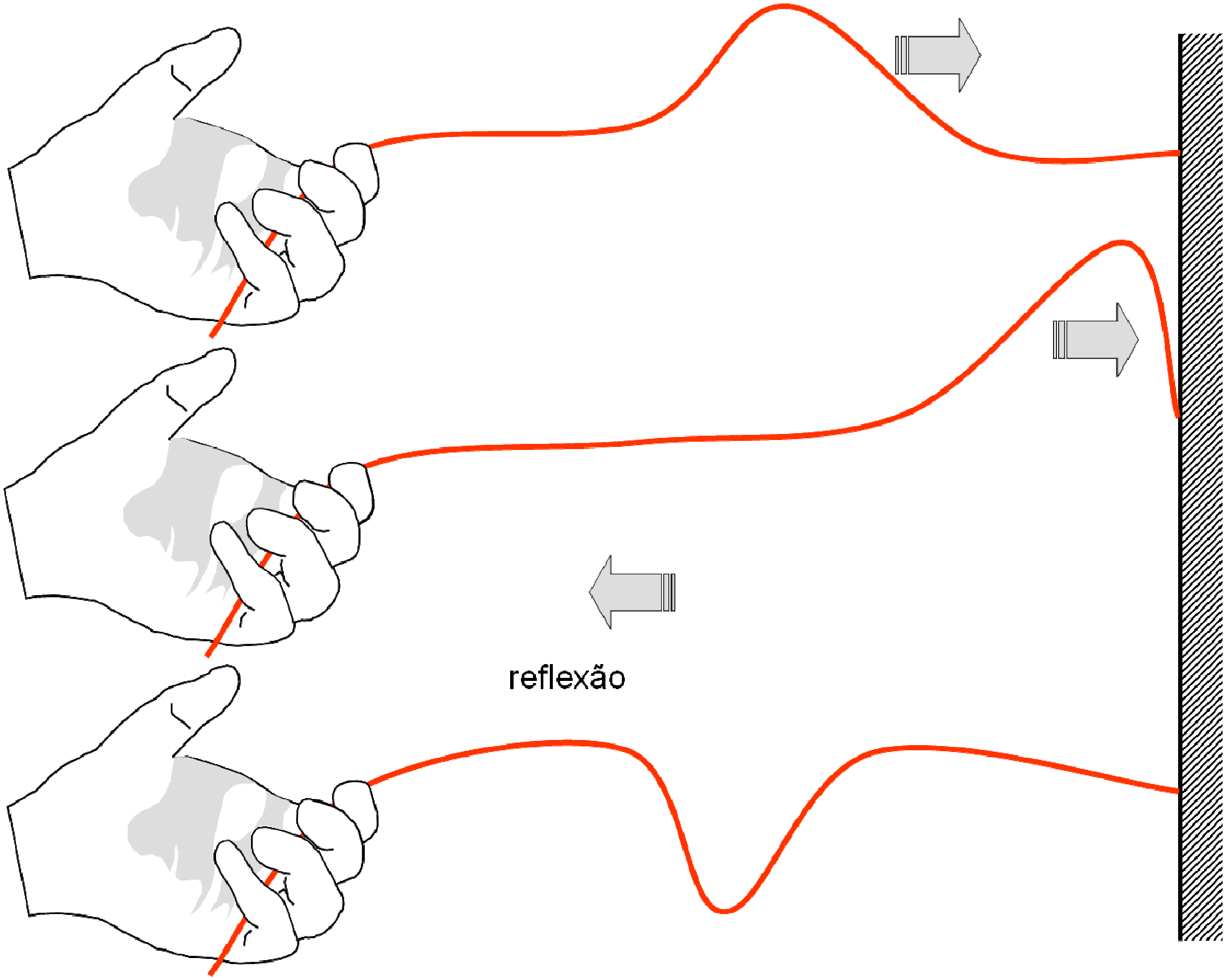
Linhas de Transmissão

- Transmissão de sinais de um ponto para outro
  - cabo coaxial em linhas de assinantes de TV via cabo
- Análise pela teoria dos elementos concentrados
  - modelo obedece a lei de Kirchhoff
  - comportamento analisado pela teoria de circuitos
  - análise fasorial para descrever ondas senoidais
- Descrição das propriedades da onda
- Comportamento da linha em função da terminação

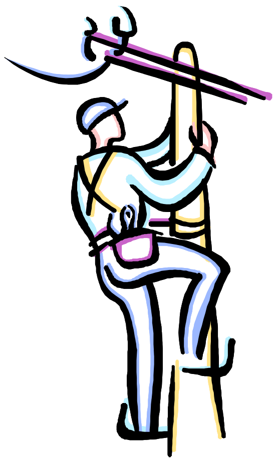
Perturbação mecânica em corda-1

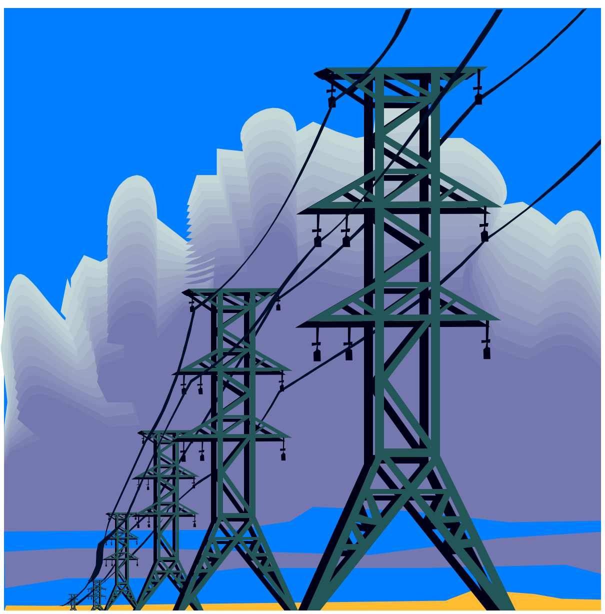


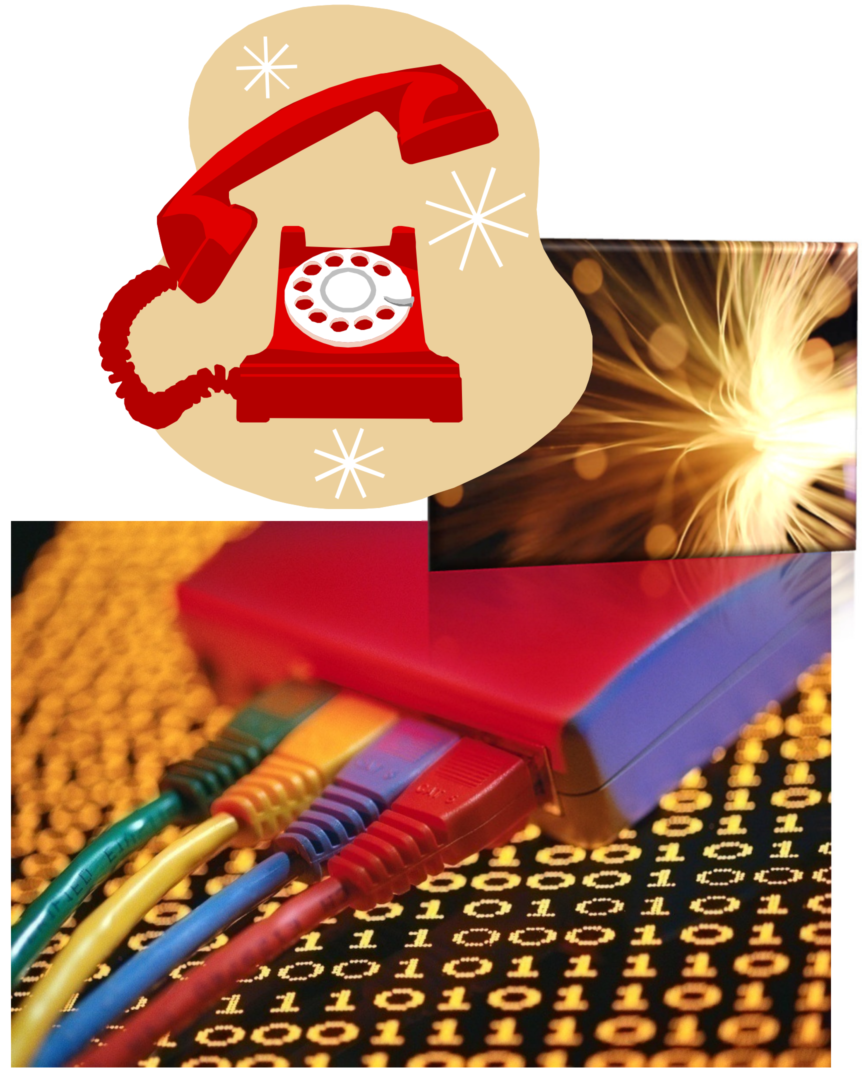
Perturbação mecânica em corda-2



Dois Tipos de Linhas



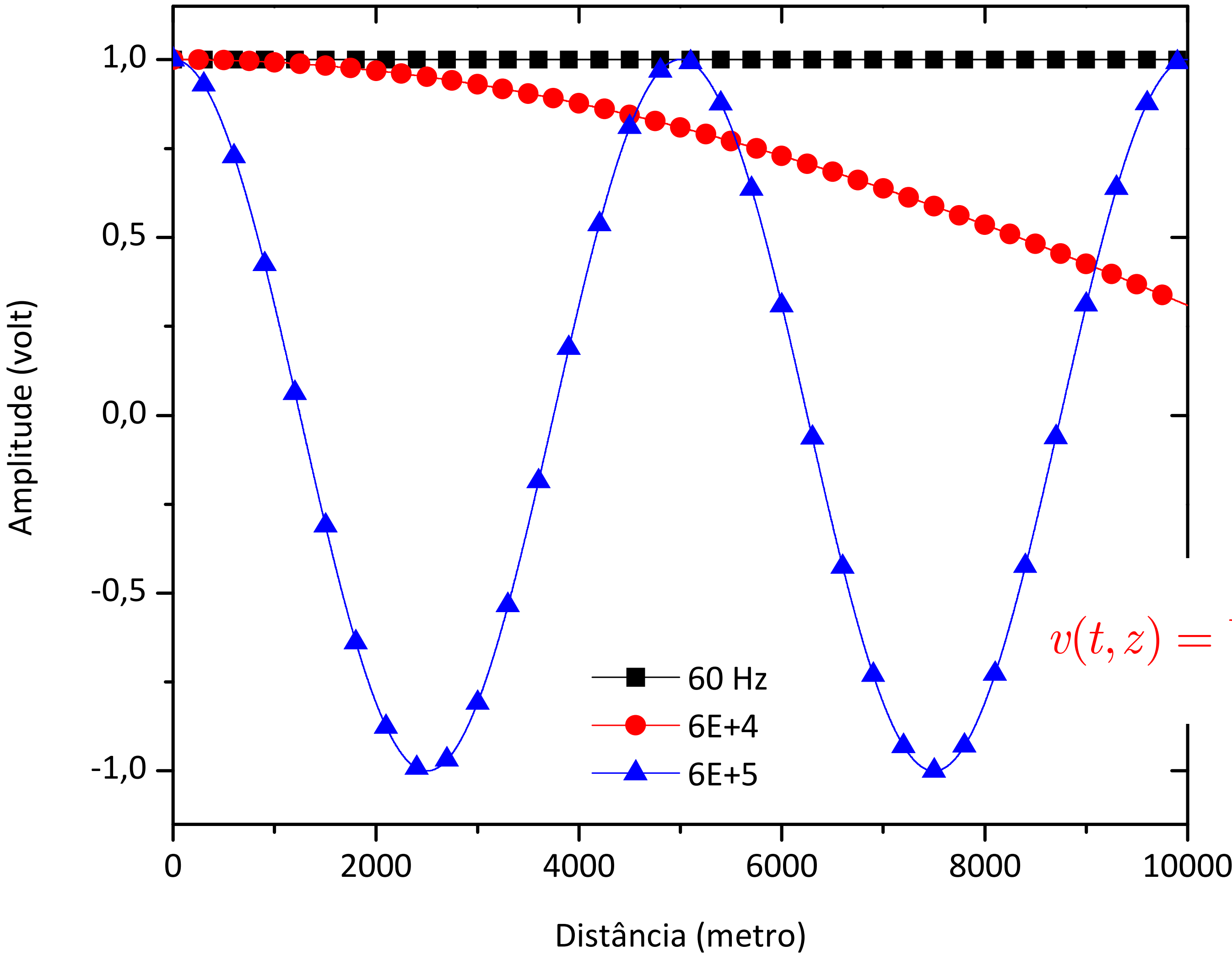




Questões-3

- ✓ Características mais importantes das linhas de transmissão de energia elétrica
  - Perdas nos condutores
  - Radiação eletromagnética no entorno
- ✓ Telecomunicações
  - Reflexão de onda
  - Impedância característica
  - Atraso de fase

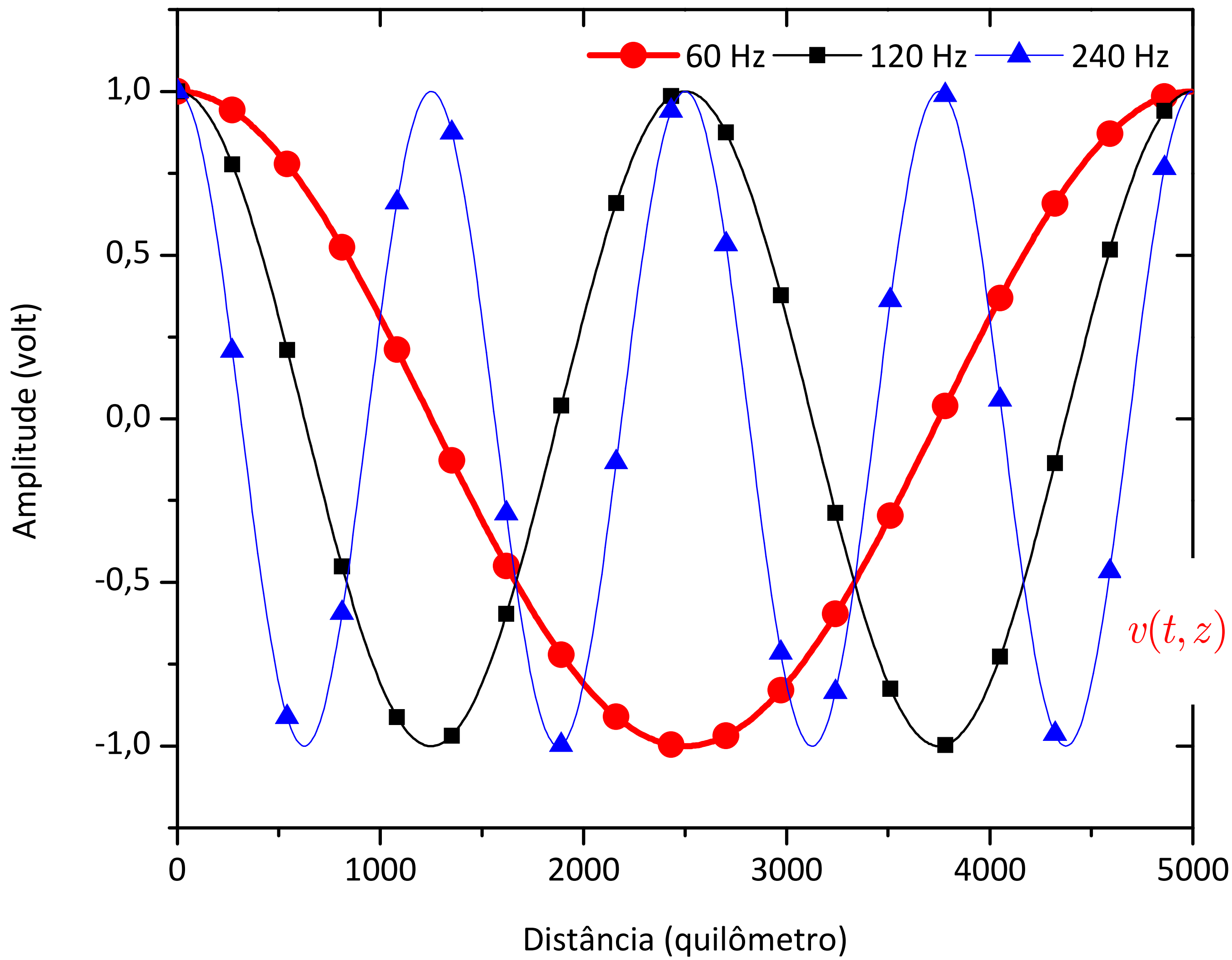
Comparação entre comprimentos de onda-1



$$v(t,z) = V_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \; volt$$

t=10^{-9} s
V_0=1 V
c= 3×10^{8} m/s

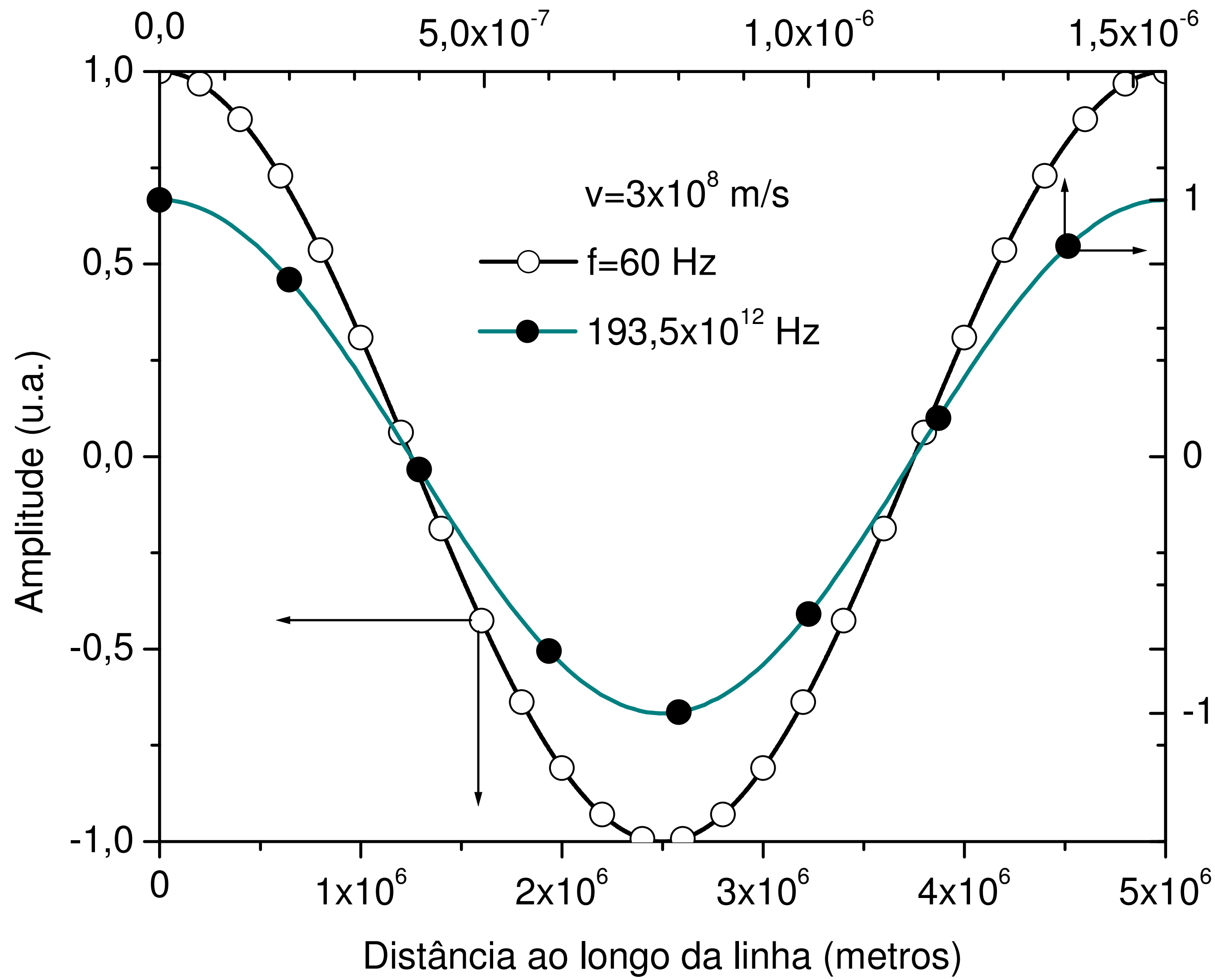
Comparação entre comprimentos de onda-2



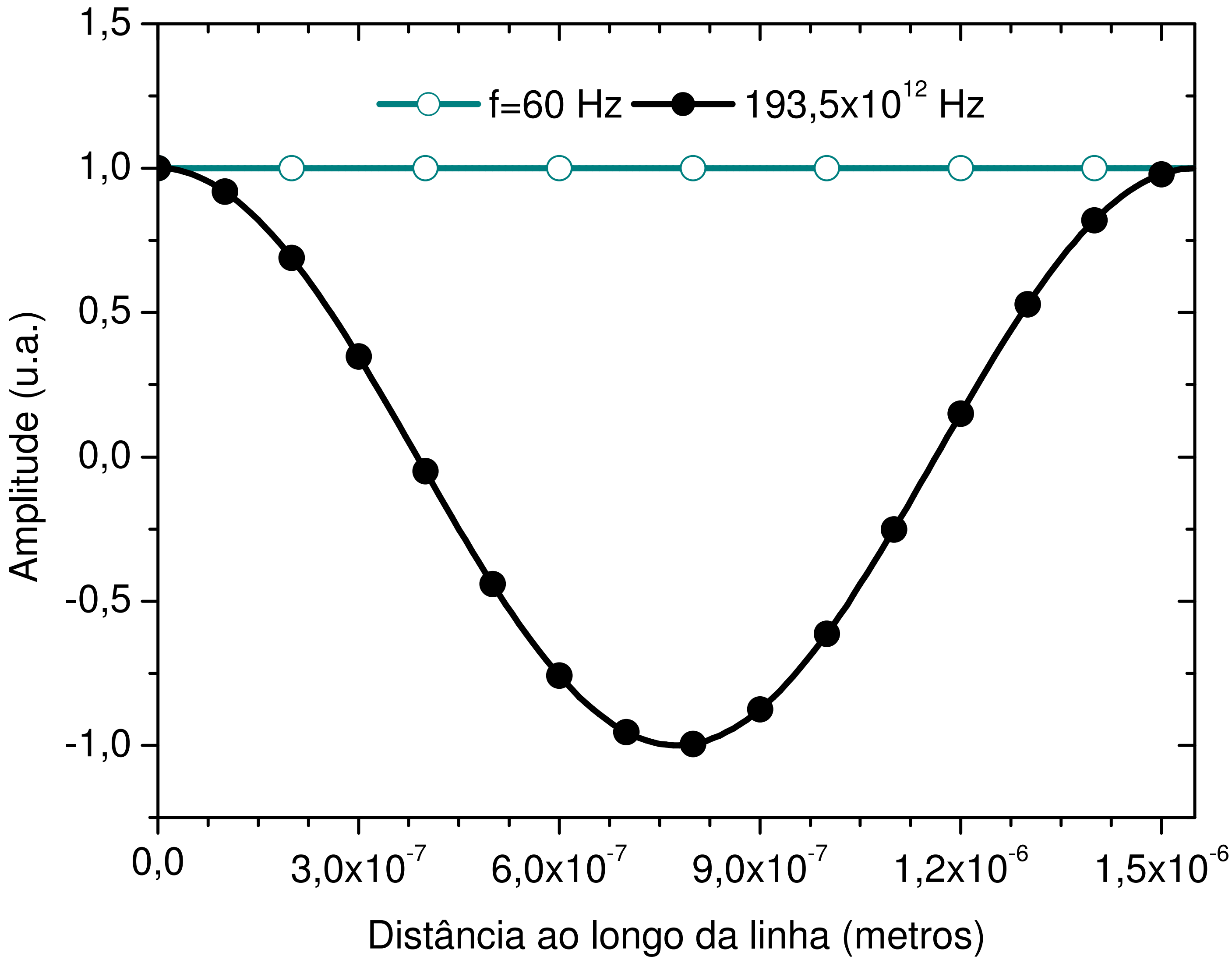
$$v(t,z) = V_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \, volt$$

$t=10^{-9}$ s
$V_0=1$ V
$c= 3\times10^{8}$ m/s

Comparação entre comprimentos de onda-3



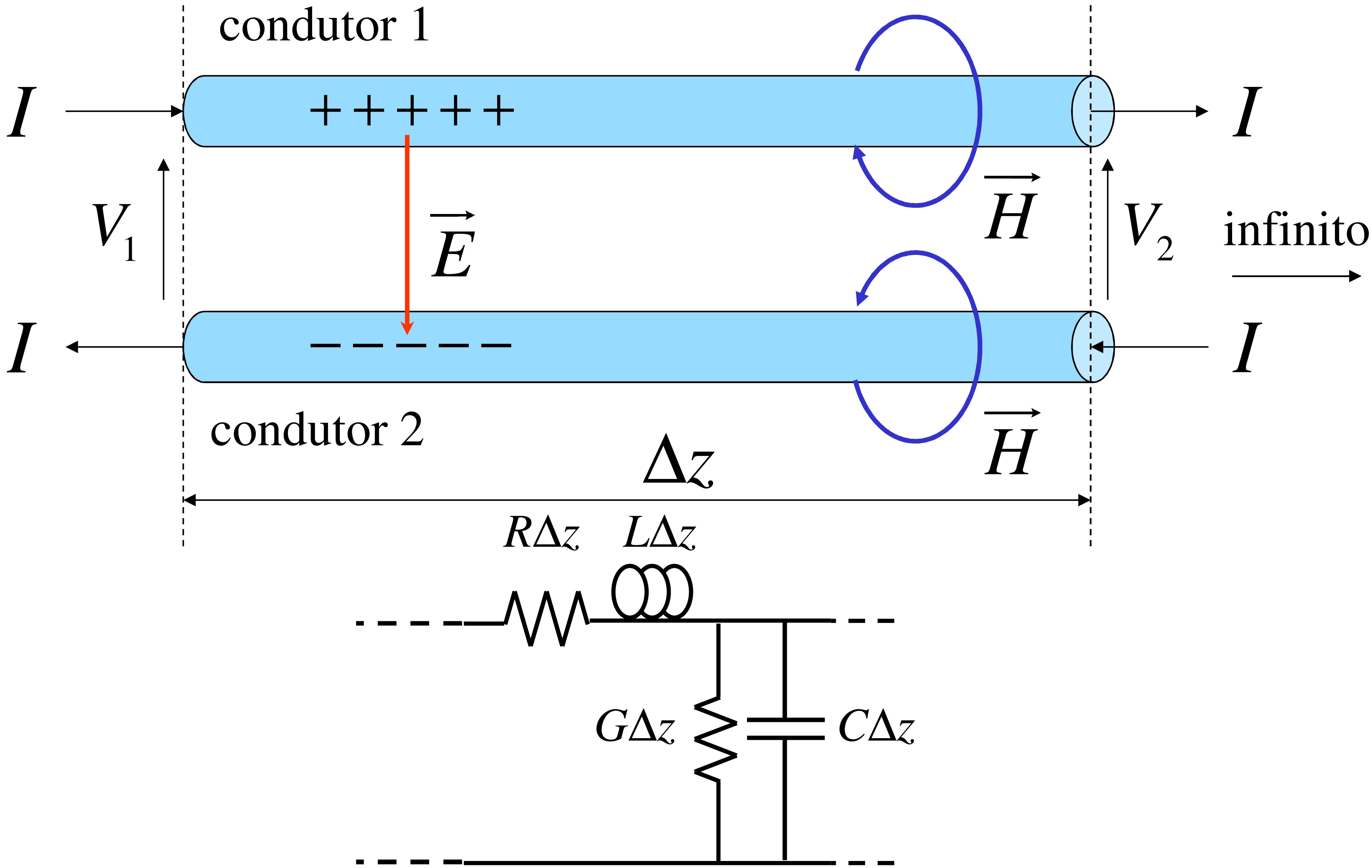
Comparação entre comprimentos de onda-4



Distinção entre os comportamentos

- ✓Comprimento de onda correspondente às componentes de freqüências do sinal são da ordem de grandeza do comprimento da linha
- ✓Efeitos podem alterar o comportamento esperado
  - Atraso de fase
  - Interferência entre ondas

Modelo de linha de transmissão



Equação de onda

Linha curta, sem perdas, *R=G=0*
Equação de onda para tensão

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

Equação de onda para corrente

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}$$

Sistemas que obedecem a estas equações podem ser utilizados para transmitir informações sob a forma de onda eletromagnética

Solução da equação de onda para tensão-1

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

$$v(z,t) = v^{+}\left(t - \frac{z}{v_f}\right) + v^{-}\left(t + \frac{z}{v_f}\right)$$

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Velocidade de propagação da onda (velocidade de fase)

Solução da equação de onda para tensão-2

$$v(z,t) = \underbrace{v^{+}\left(t - \frac{z}{v_f}\right)}_{\text{Onda propagando na direção positiva de } z} + \underbrace{v^{-}\left(t + \frac{z}{v_f}\right)}_{\text{Onda propagando na direção negativa de } z}$$

Solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

$$v(z,t) = V_0^+ \cos\left(\omega t - k_z z + \phi^+\right) + V_0^- \cos\left(\omega t + k_z z + \phi^-\right)$$

$$v^+(z,t) = V_0^+ \cos\left(\omega t - k_z z + \phi^+\right)$$

Onda propagando na direção positiva de *z*

$$v^-(z,t) = V_0^- \cos\left(\omega t + k_z z + \phi^-\right)$$

Onda propagando na direção negativa de *z*

Representação complexa-1

$$v^+(z,t) = V_0^+ \cos\left(\omega t - k_z z + \phi^+\right)$$

$$v^+(z,t) = \mathrm{Re}\left\{V_0^+ \exp\left(-jk_z z\right)\exp\left(j\phi^+\right)\exp\left(j\omega t\right)\right\}$$

$$v^+(z,t) = \mathrm{Re}\left\{V_0^+ \exp\left[j\left(\omega t - k_z z + \phi^+\right)\right]\right\}$$

$$v^+(z,t) = \mathrm{Re}\left\{V_0^+\left[\cos\left(\omega t - k_z z + \phi^+\right) + j\mathrm{sen}\left(\omega t - k_z z + \phi^+\right)\right]\right\}$$

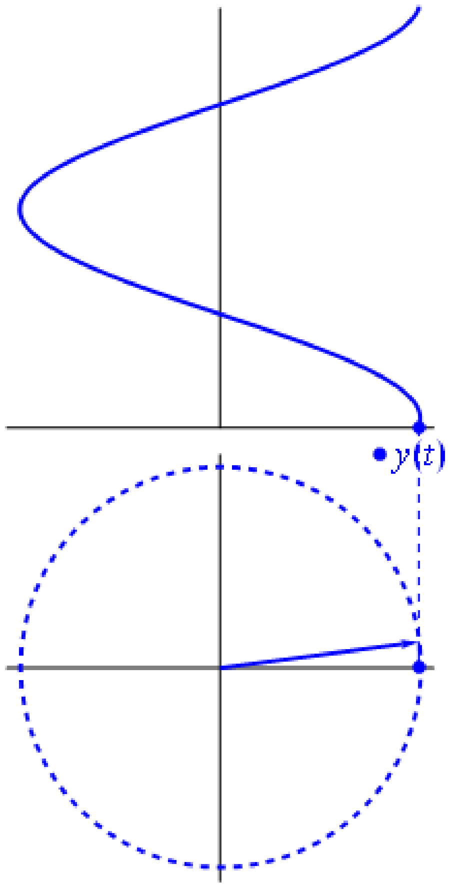
Representação complexa-2

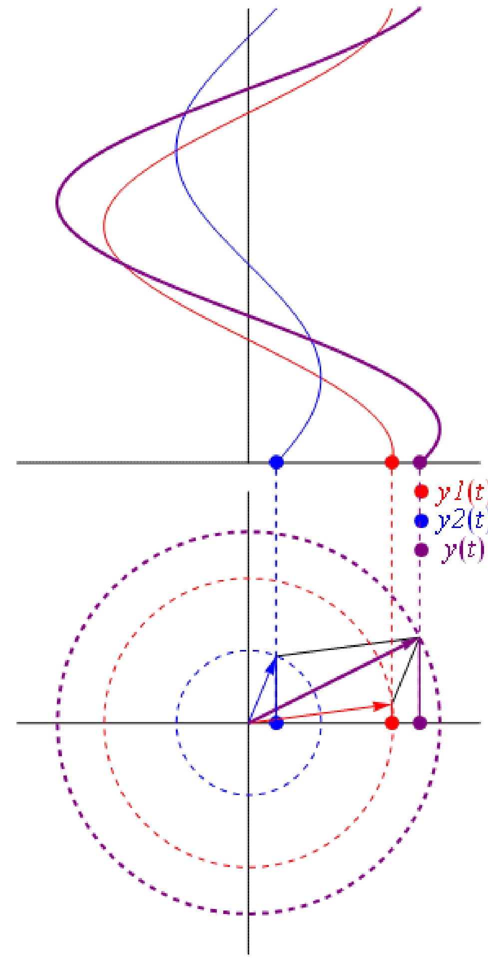
$$v^+(z,t) = V_0^+\cos\left(\omega t - k_z z + \phi^+\right)$$

$$v^+(z,t) = \mathrm{Re}\left\{\underbrace{\underbrace{V_0^+\exp\left(-jk_z z\right)\exp\left(\phi^+\right)}_{\text{fasor}}\exp\left(j\omega t\right)}_{\text{Representação complexa (fasor)}}\right\}$$

Representação complexa-3

$$v^{+}(z,t) = V_0^{+}\cos\left(\omega t - k_z z + \phi^{+}\right)$$





$$V^{+}(z,t) = V_0^{+}\exp\left(-jk_z z\right)\exp\left(\phi^{+}\right)\exp\left(j\omega t\right)$$

http://en.wikipedia.org/wiki/Phasor

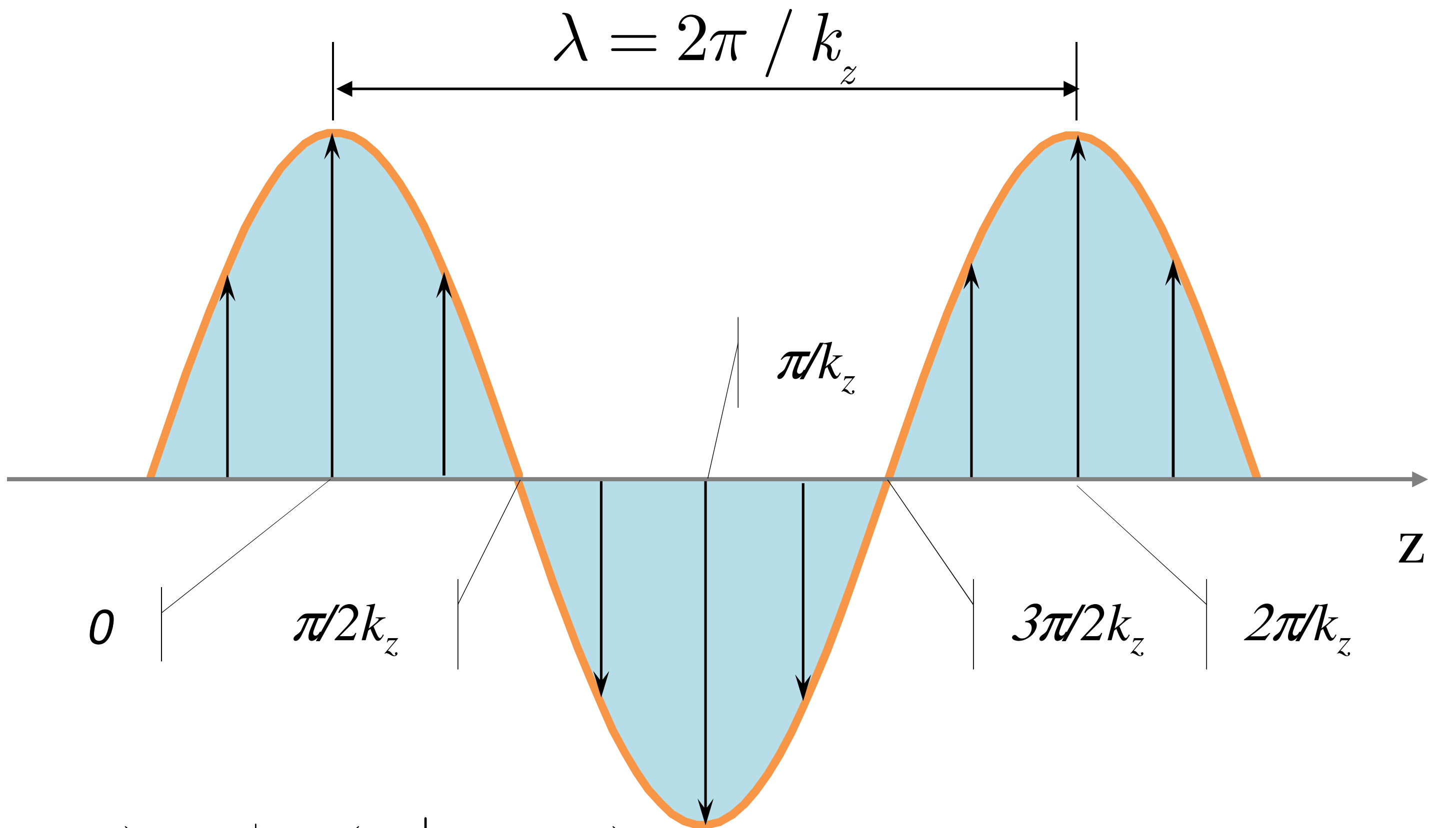
Solução da equação de onda para tensão

$$v(z,t) = V_0^+ \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v_f}\right) + \phi^+\right] + V_0^- \cos\left[\omega\left(t + \frac{z}{v_f}\right) + \phi^-\right]$$

$$v(z,t) = {\color{red} V_0^+ \cos\left(\omega t - k_z z + \phi^+\right)} + {\color{blue} V_0^- \cos\left(\omega t + k_z z + \phi^-\right)}$$

$$k_z = \frac{\omega}{v_f}$$ Constante de propagação

Comprimento de onda



$$v^+(z,t=0) = V^+\cos(\omega t\big|_{t=0} - k_z z)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_z} - 0 \qquad k_z = \frac{2\pi}{\lambda}$$

k_z: constante de propagação
[rad/unid. compr.] ou [(unid. compr.)$^{-1}$]

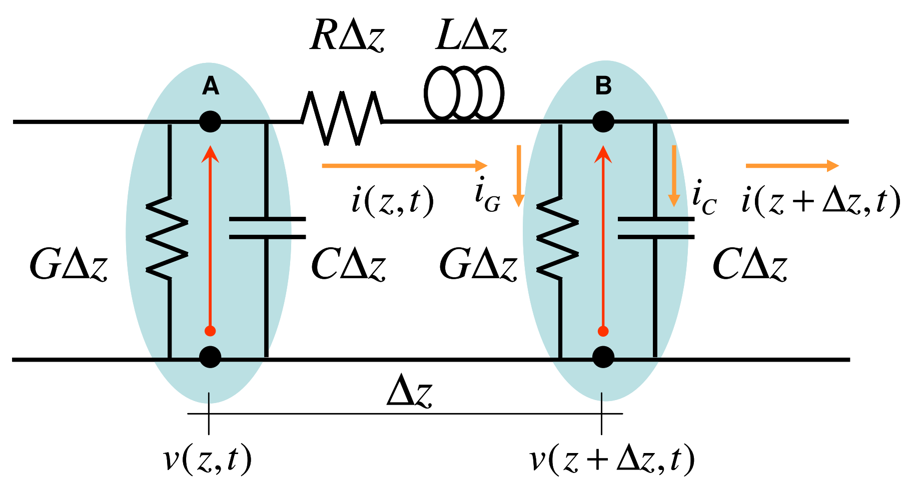
Resumo das equações fundamentais de uma L.T.

$$\frac{d^2v(z)}{dz^2} = k^2v(z)$$

$$\frac{dv(z)}{dz} = -Zi(z)$$

$$\frac{d^2i(z)}{dz^2} = k^2i(z)$$

$$\frac{di(z)}{dz} = -Yv(z)$$



$$Z = R + j\omega L$$

$$Y = G + j\omega C$$

$$ZY = \left(RG - \omega^2 LC\right) + j\omega\left(RC + LG\right)$$

$$k^2 = ZY$$

Solução das equações de onda-1

$$v\left(z\right) = V^{+}e^{-kz} + V^{-}e^{+kz}$$ em

$$\frac{dv(z)}{dz} = -Zi(z)$$

$$i(z) = \frac{k}{Z}\left(V^{+}e^{-kz} - V^{-}e^{kz}\right)$$

$$i(z) = I^{+}e^{-kz} - I^{-}e^{kz}$$

$$\frac{k}{Z} = \frac{\sqrt{ZY}}{Z} = \sqrt{\frac{ZY}{Z^2}} = \sqrt{\frac{Y}{Z}} \equiv \frac{1}{Z_0} \qquad \left[\frac{k}{Z}\right] = ohm^{-1}$$

Solução das equações de onda-2

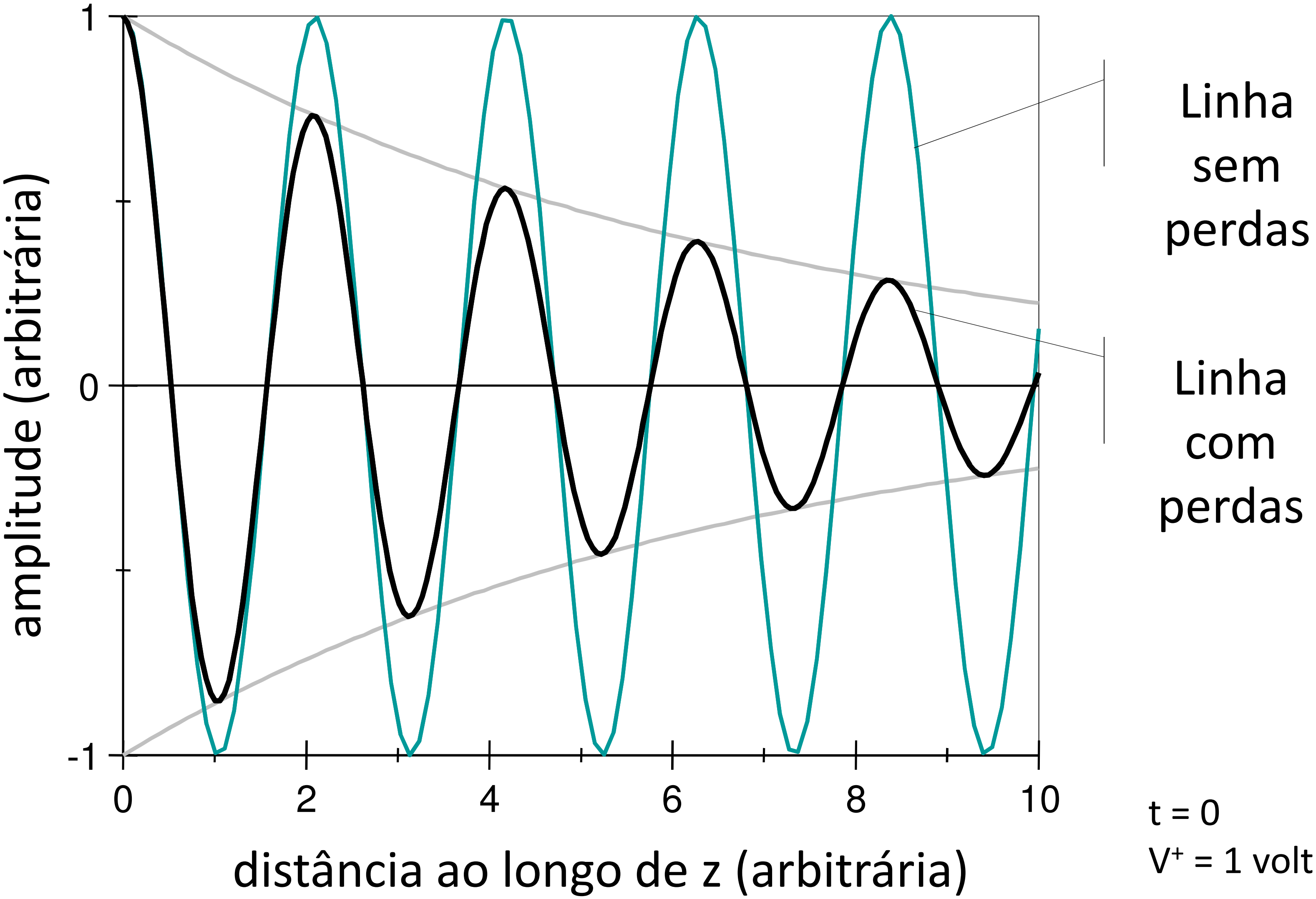
$$v^+(z) = V^+e^{-kz} = V^+e^{-(k_R + jk_I)z}$$

$$v^+(z) = V^+e^{-k_R z}e^{-jk_I z}$$

$$v^+(z) = \underbrace{V^+e^{-k_R z}}_{\text{Amplitude decrescendo exponencialmente}} \cos(\omega t - k_I z)$$

k_R : constante de atenuação: [metro^{-1}]
k_I : constante de fase: [metro^{-1}]

Solução das equações de onda-3



Impedância característica-2

$$\frac{k}{Z} = \frac{\sqrt{ZY}}{Z} = \sqrt{\frac{ZY}{Z^2}} = \sqrt{\frac{Y}{Z}} \equiv \frac{1}{Z_0}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{Z_s}{Z_p}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$ ohm

Aproximação para a impedância característica

$$\omega \,/\, 2\pi > 100 \quad \text{kHz}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

$$\omega L \gg R$$

$$\omega C \gg G$$

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\omega \,/\, 2\pi \simeq 1 \quad \text{kHz}$$

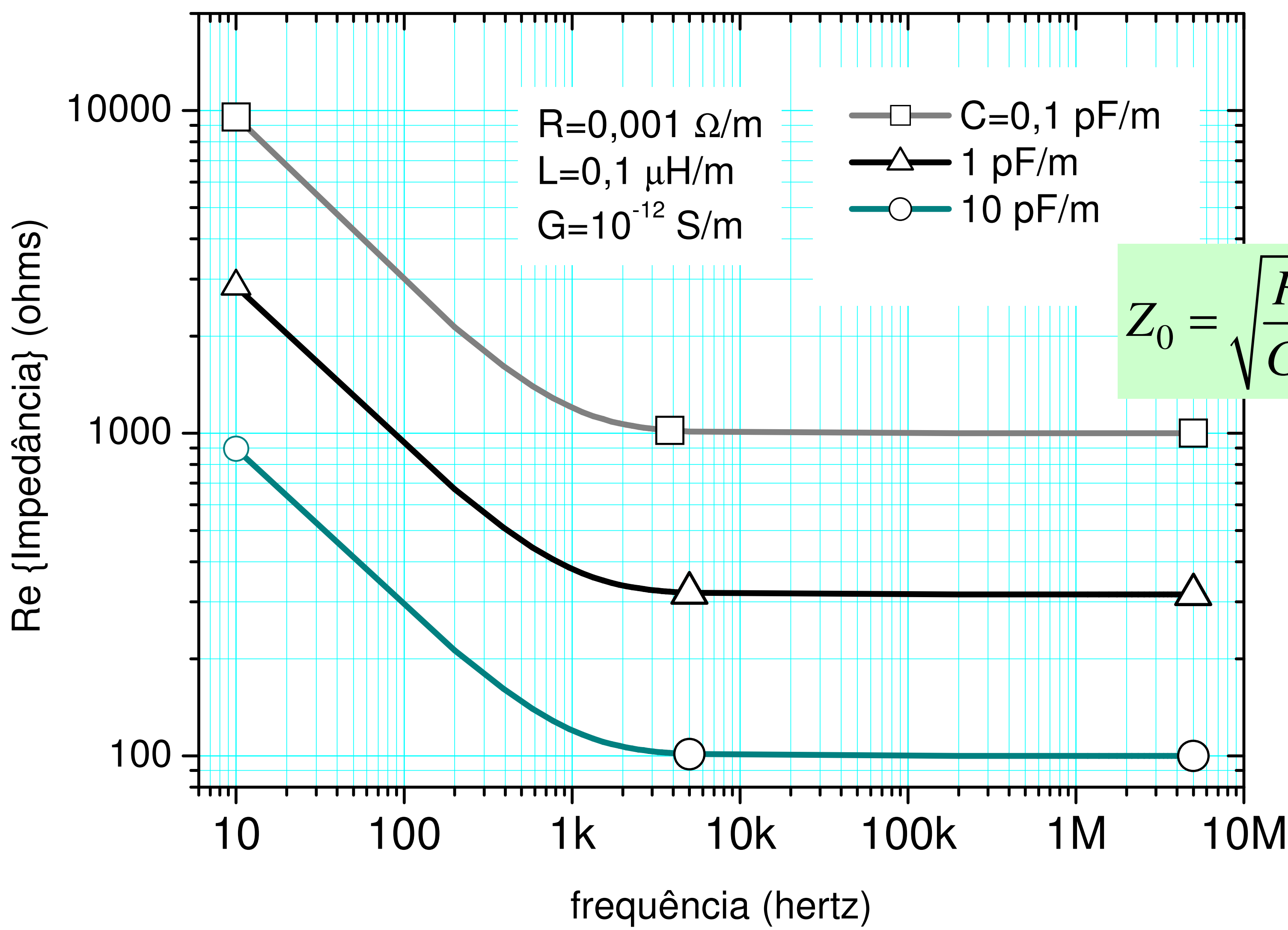
$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

$$\omega L \ll R$$

$$\omega C \ll G$$

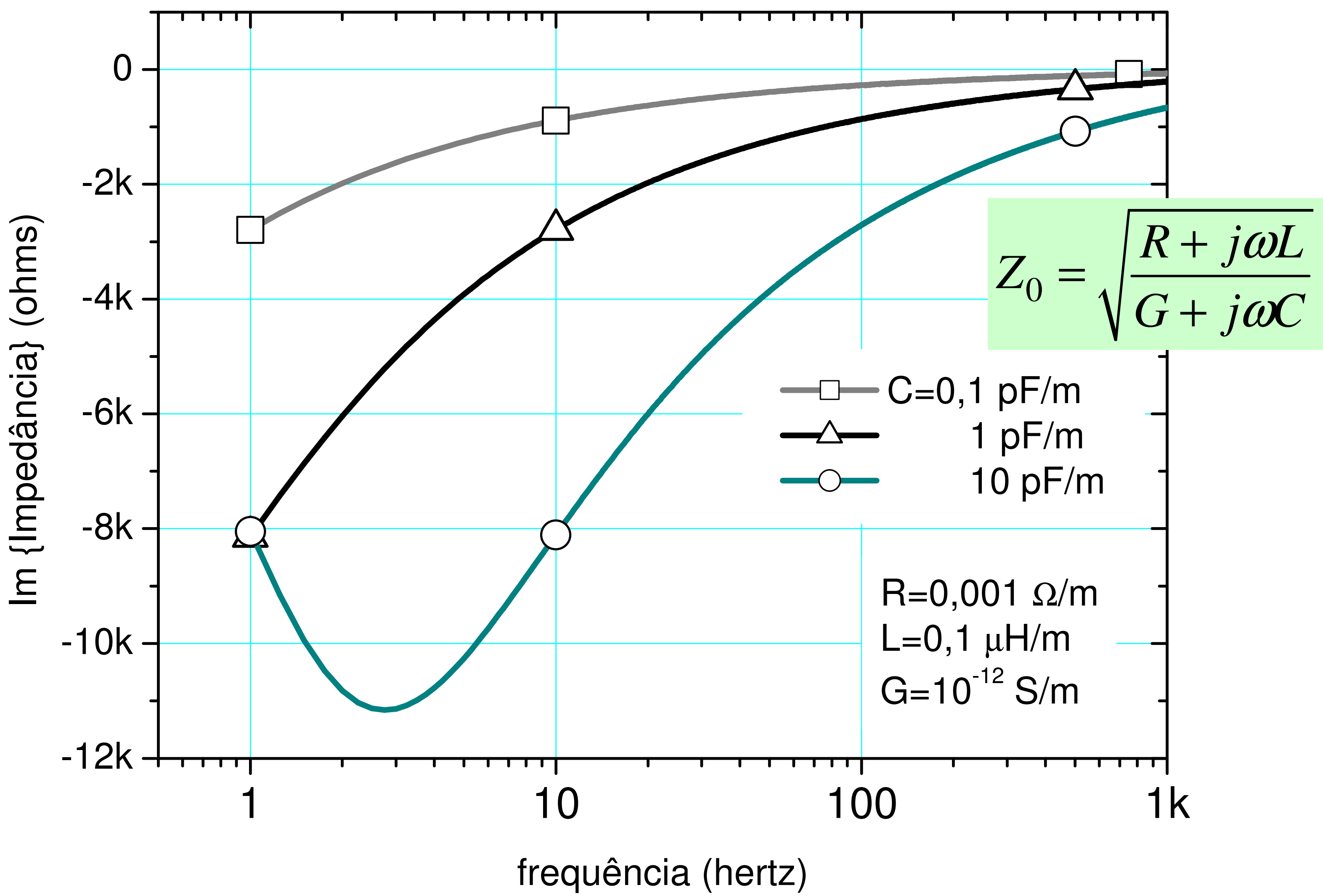
$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{R}{G}}$$

Impedância: variação da capacitância-1

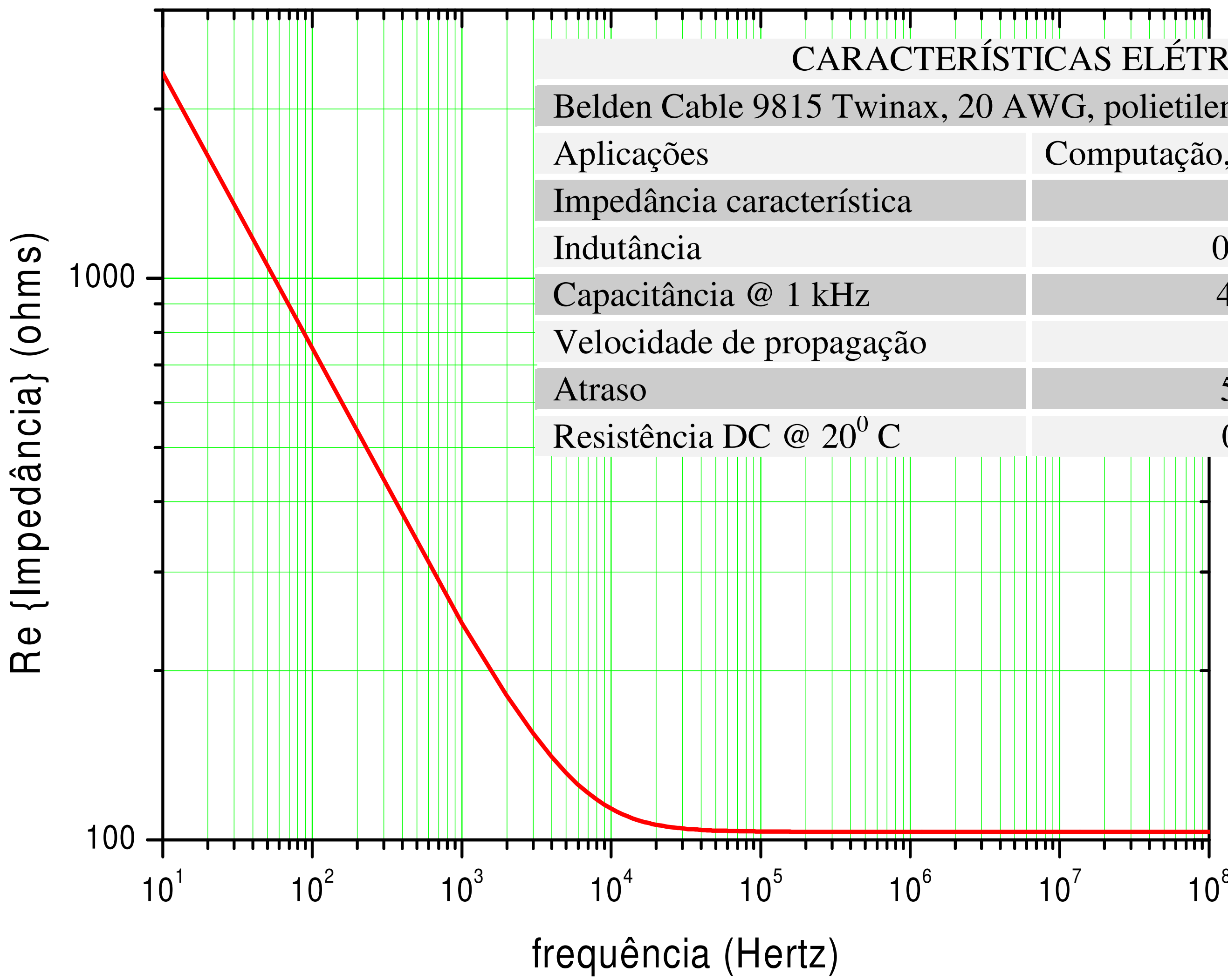


$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

Impedância: variação da capacitância-2



Par de fios trançados



CARACTERÍSTICAS ELÉTRICAS	
Belden Cable 9815 Twinax, 20 AWG, polietileno (2,25-2,3 em 1 kHz)	
Aplicações	Computação, instrumentação
Impedância característica	100 Ω
Indutância	0,509 μH/m
Capacitância @ 1 kHz	47,57 pF/m
Velocidade de propagação	66 %
Atraso	5,05 ns/cm
Resistência DC @ 20^0 C	0,032 Ω/m

$G=10^{-12}$ S/m

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

Ref.: Belden Cable, http://bwccat.belden.com

Coeficiente de Reflexão

$$\Gamma(z) = \frac{v^-(z)}{v^+(z)} = \left(\frac{V^-}{V^+}\right)\frac{e^{kz}}{e^{-kz}} = \Gamma_0 \frac{e^{kz}}{e^{-kz}} = \Gamma_0 e^{2kz}$$

Coeficiente de reflexão na carga

$$\Gamma(z=0) = \frac{V^-}{V^+} \equiv \Gamma_0 = |\Gamma_0| \exp(j\phi_r)$$

$$\Gamma(z) = |\Gamma_0| e^{(2kz + j\phi_r)}$$

$k = jk_I$ Linha curta, *R=G=0*

$$\Gamma(z) = |\Gamma_0| \exp\left[j\left(2k_I z + \phi_r\right)\right]$$

Impedância ao Longo de Linha sem Perdas-4

$$Z(z) = Z_0 \frac{\left[\left(1+\Gamma_0\right)/\left(1-\Gamma_0\right)\right] - j\mathrm{tg}k_I z}{1 - j\left[\left(1+\Gamma_0\right)/\left(1-\Gamma_0\right)\right]\mathrm{tg}k_I z}$$

Mas, $\Gamma_0 = \left(Z_L - Z_0\right)/\left(Z_L + Z_0\right)$

e $\left(1+\Gamma_0\right)/\left(1-\Gamma_0\right) = Z_L / Z_0$

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L - jZ_0 tg\left(k_I z\right)}{Z_0 - jZ_L tg\left(k_I z\right)} \qquad z \le 0$$

Terminação: Curto-circuito

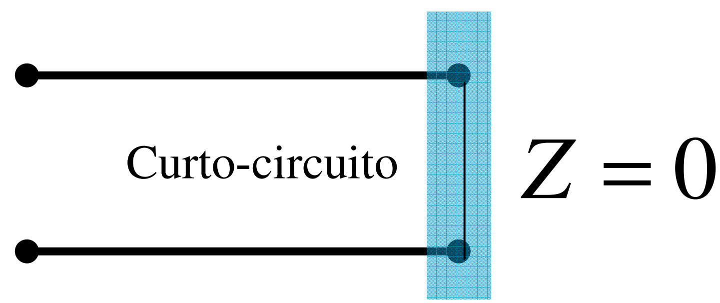
curto $Z_L = 0$

$$Z\left(z=-l\right) = Z_0 \frac{0 + jZ_0 \mathrm{tg} k_I l}{Z_0 + j\left(0\right)\mathrm{tg} k_I l} = jZ_0 \mathrm{tg}(k_I l)$$

$$Z\left(z=-l\right) = jZ_0 \mathrm{tg}(k_I l)$$

normalização

$$Z\left(z=-\ell\right) / \left(Z_0\right) = j\mathrm{tg}(k_I l) = jX$$



Terminação: Circuito aberto

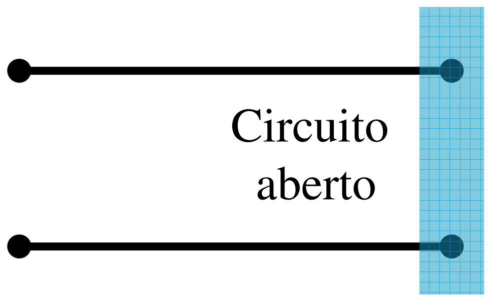
Circuito aberto $\quad Z_L \rightarrow \infty$

$$Z\left(z=-l\right)=Z_0\frac{1+j\left(Z_0\,/\,Z_L\right)\mathrm{tg}(k_I l)}{\left(Z_0\,/\,Z_L\right)+j\mathrm{tg}(k_I l)}=-jZ_0\mathrm{cotg}(k_I l)$$

$$Z\left(z=-l\right)=-jZ_0\mathrm{cotg}(k_I l)$$

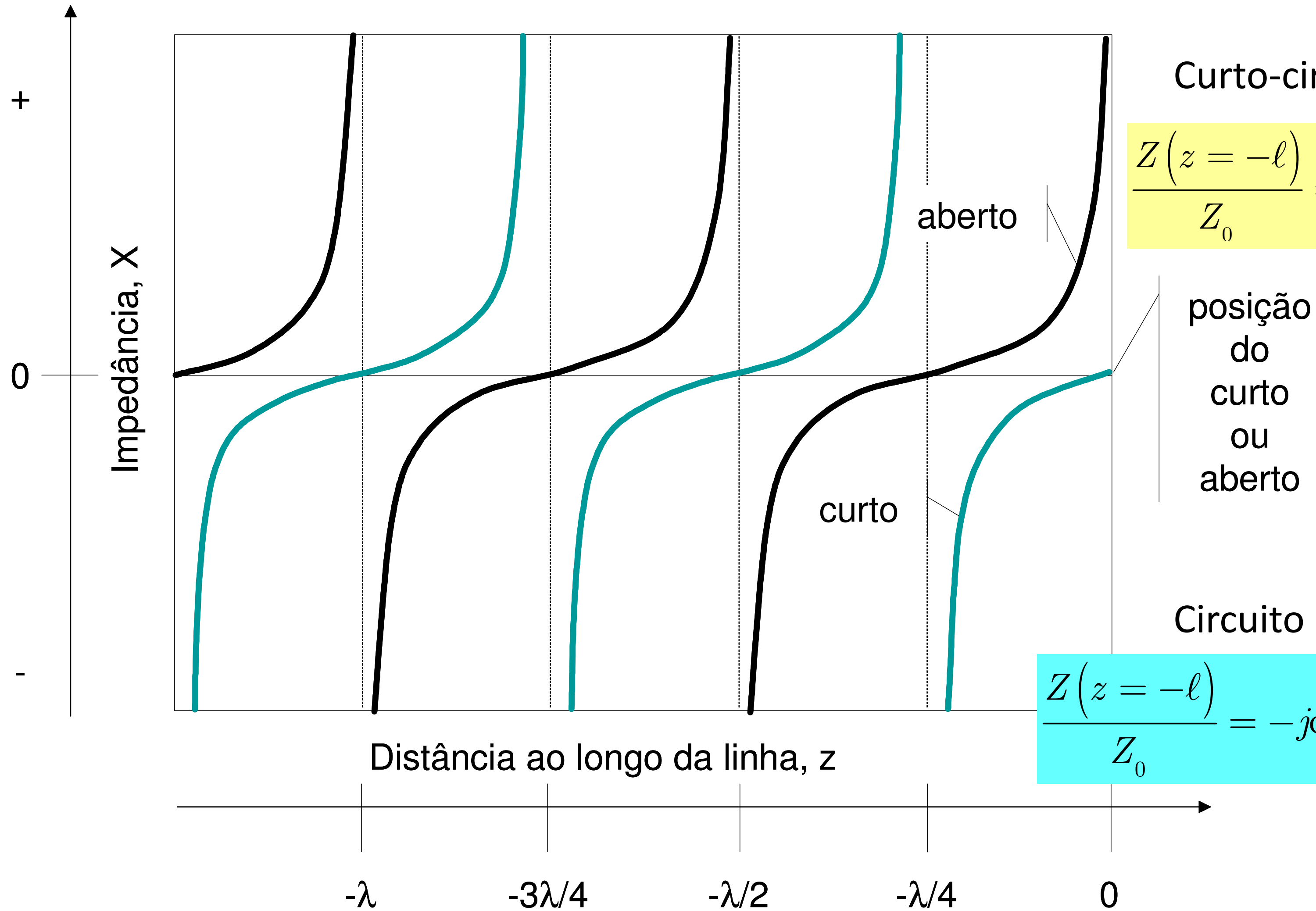
normalização

$$\frac{Z\left(z=-\ell\right)}{Z_0}=-j\mathrm{cotg}(k_I l)=-jX$$



$Z \Rightarrow \infty$

Terminações: Curto e aberto



Curto-circuito

$$\frac{Z\left(z=-\ell\right)}{Z_0} = j\mathrm{tg}(k_I l) = jX$$

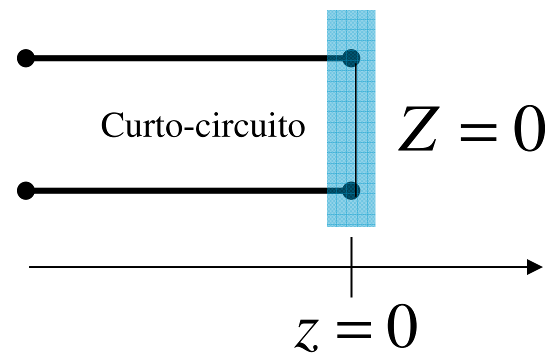
Circuito aberto

$$\frac{Z\left(z=-\ell\right)}{Z_0} = -j\mathrm{cotg}(k_I l) = -jX$$

Linha Terminada em Curto-circuito-1

coeficiente de reflexão

$$\Gamma_0 = \left(0 - Z_0\right) / \left(0 + Z_0\right) = -1$$



tensão

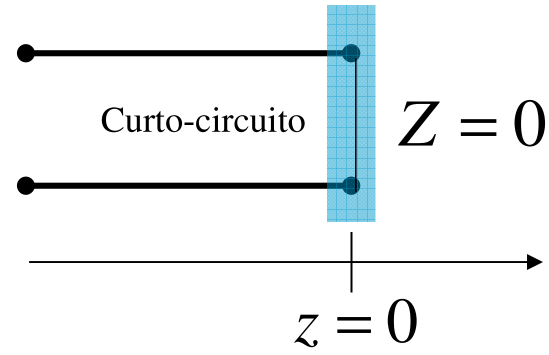
$$v(z) = V^+\left[\exp\left(-jk_I z\right) + \Gamma_0 \exp\left(jk_I z\right)\right] =$$
$$V^+\left[\exp\left(-jk_I z\right) - \exp\left(jk_I z\right)\right]$$

$$v(z) = -j2V^+ \mathrm{sen}\left(k_I z\right)$$

Linha Terminada em Curto-circuito-1

coeficiente de reflexão

$$\Gamma_0 = (0 - Z_0)/(0 + Z_0) = -1$$



corrente

$$i(z) = \left(V^+ / Z_0\right)\left[\exp\left(-jk_I z\right) - \Gamma_0 \exp\left(jk_I z\right)\right] =$$

$$\frac{V^+}{Z_0}\left[\exp\left(-jk_I z\right) + \exp\left(jk_I z\right)\right]$$

$$i(z) = \frac{2V^+}{Z_0}\cos\left(k_I z\right)$$

Linha curto-circuitada: Tensão

$$v(z) = -j2V^{+}\,\mathrm{sen}\left(k_{I} z\right)$$

$$v(z,t) = \mathrm{Re}\left\{-j2V^{+}\,\mathrm{sen}\left(k_{I} z\right) e^{j\omega t}\right\}$$

$$v(z,t) = 2V^{+} sen\left(k_{I} z\right) sen\left(\omega t\right)$$

Linha curto-circuitada: Corrente

$$i(z) = \frac{2V^+}{Z_0}\cos\left(k_I z\right)$$

$$i(z,t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{2V^+}{Z_0}\cos\left(k_I z\right)e^{j\omega t}\right\}$$

$$i(z,t) = \frac{2V^+}{Z_0}\cos\left(k_I z\right)\cos\left(\omega t\right)$$

Linha curto-circuitada: Resumo

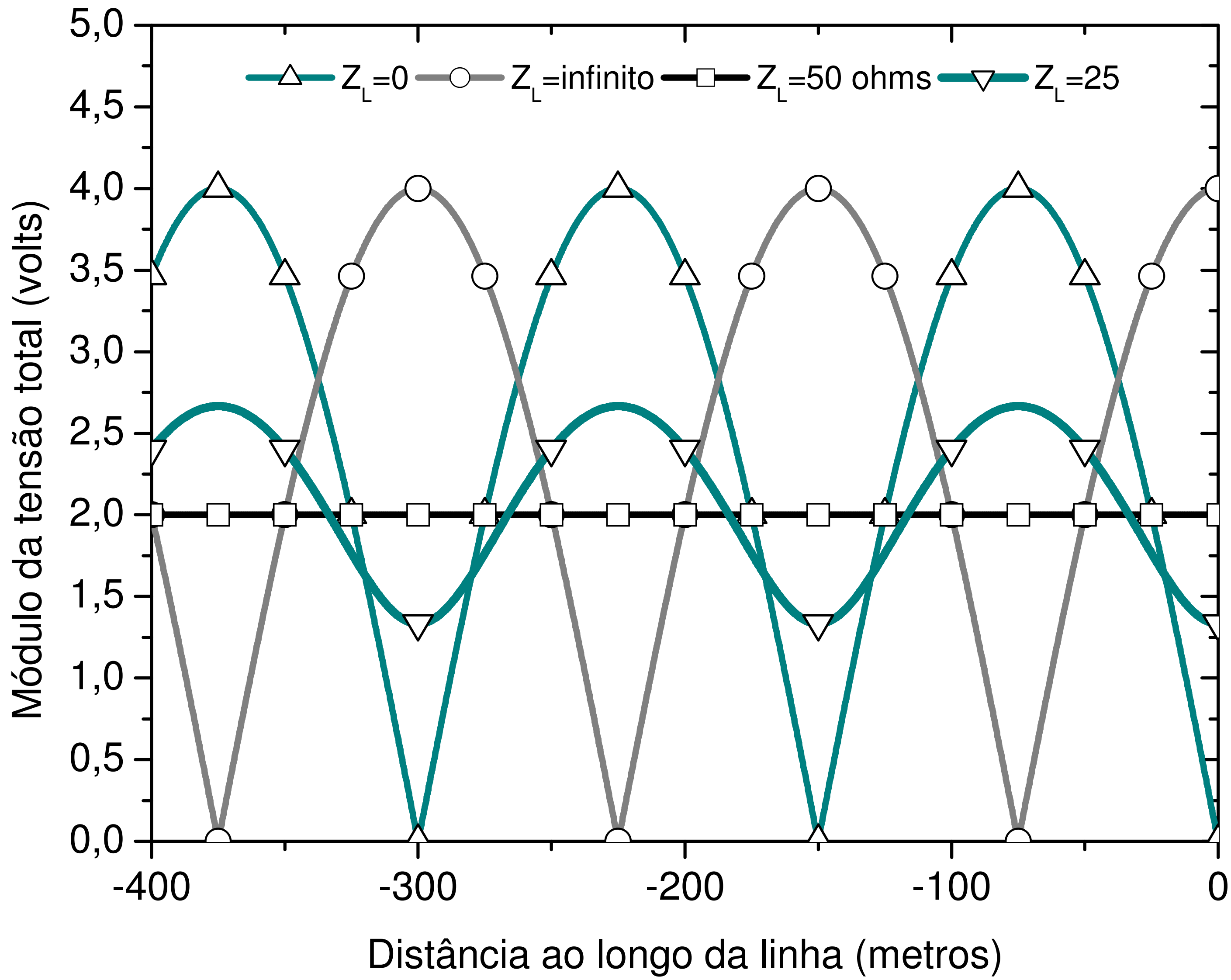
$$v(z) = -j2V^{+}\,\mathrm{sen}\left(k_I z\right)$$

$$v(z,t) = 2V^{+} sen\left(k_I z\right) sen\left(\omega t\right)$$

$$i(z) = \frac{2V^{+}}{Z_0}\cos\left(k_I z\right)$$

$$i(z,t) = \frac{2V^{+}}{Z_0}\cos\left(k_I z\right)\cos\left(\omega t\right)$$

Cargas diversas: Tensão



$v_f=3x10^8$ m/s
f=1 MHz
V^+=2 volts

Coeficiente de Reflexão na Carga

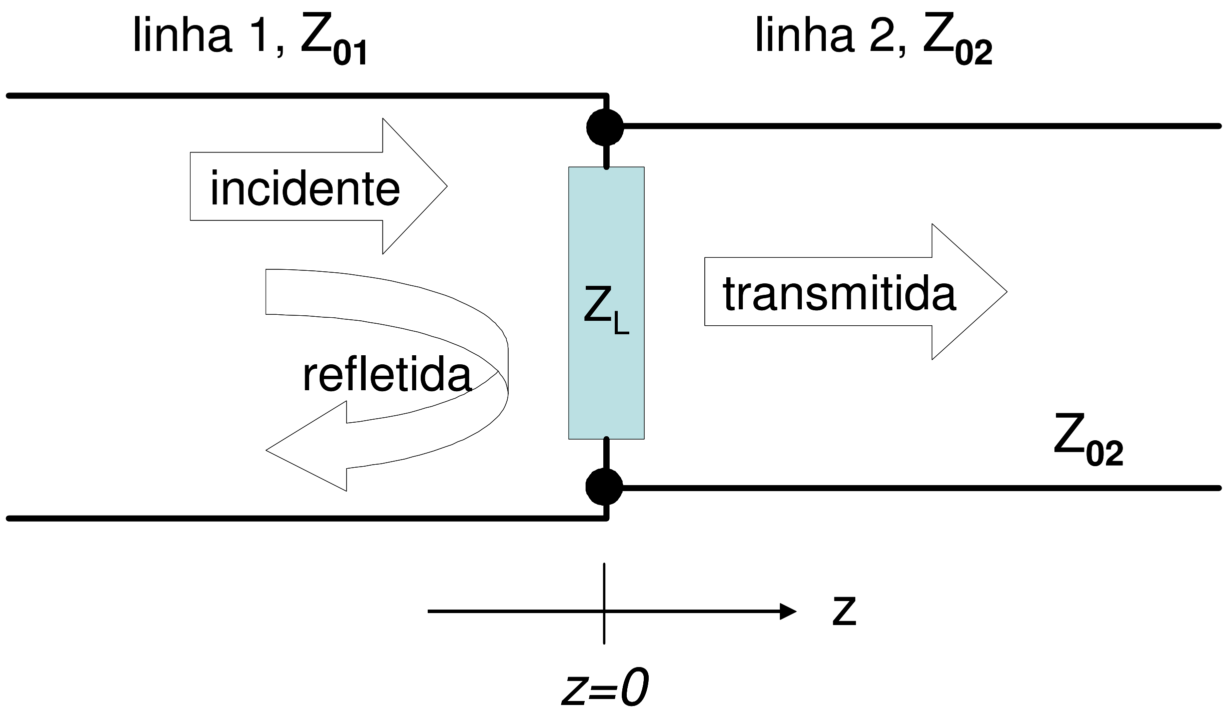
$$Z(z) = Z_0 \frac{\left[\left(1+\Gamma_0\right)/\left(1-\Gamma_0\right)\right] - j\,\mathrm{tg}\,k_I z}{1 - j\left[\left(1+\Gamma_0\right)/\left(1-\Gamma_0\right)\right]\mathrm{tg}\,k_I z}$$

em $z = 0$

$$Z(z=0) = Z_0\left(1+\Gamma_0\right)/\left(1-\Gamma_0\right) = Z_L$$

$$\Gamma_0 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Coeficiente de transmissão-1



coeficiente de transmissão

$$\Gamma(z) = \frac{v^-(z)}{v^+(z)} = \Gamma_0 e^{2kz}$$

coeficiente de reflexão

$$\tau(z) = \frac{v_t^+(z)}{v^+(z)}$$

Coeficiente de transmissão-2

$$v_t^+(z=0) = v^+(z=0) + v^-(z=0)$$

dividindo por $v^+(z=0)$

$$\frac{v_t^+(z=0)}{v^+(z=0)} = \frac{v^+(z=0)}{v^+(z=0)} + \frac{v^-(z=0)}{v^+(z=0)} = 1 + \frac{v^-(z=0)}{v^+(z=0)}$$

mas, $\Gamma_0 = v^-(z=0) \,/\, v^+(z=0)$

$$\tau_0 = 1 + \Gamma_0$$

em geral, os dois coeficientes são números complexos

Potência Média Transportada pela Onda

A potência instantânea transportada pela onda incidente é

$$p^+(z,t) = v^+(z,t)i^+(z,t) \quad \text{W}$$

A potência instantânea transportada pela onda incidente é

$$p_m^+ = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{V^+(z)\left[I^+(z)\right]^*\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{\left|V^+(z)\right|^2}{Z_{01}}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\left|V^+\right|^2}{Z_{01}} \quad \text{W}$$

A potência média transportada pela onda refletida é

$$p_m^- = \left|\Gamma\right|^2 \left|V^+\right|^2 / \left(2Z_{01}\right) \quad \text{W}$$

A potência média transportada pela onda transmitida é

$$p_{m,t}^+ = \left|\tau\right|^2 \left|V_t^+\right|^2 / \left(2Z_{02}\right) \quad \text{W}$$

Resumo

$$\frac{v^+(z=0)}{Z_{01}} - \frac{\Gamma_0 v^+(z=0)}{Z_{01}} = \frac{\tau_0 v^+(z=0)}{Z_{02}} + \frac{\tau_0 v^+(z=0)}{Z_L}$$

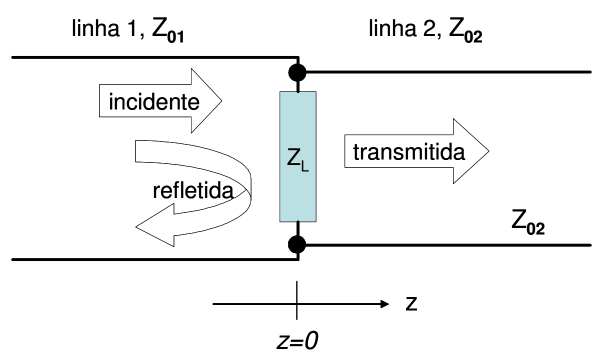
$$1 - \Gamma_0 = \tau_0 \frac{Z_{01}}{Z_{02}} \left(\frac{Z_L + Z_{02}}{Z_L} \right)$$

$$Z_{\parallel} = Z_{02} Z_L / \left(Z_{02} + Z_L \right)$$

associação em paralelo entre Z_{02} e Z_L

$$\Gamma_0 = \frac{Z_{//} - Z_{01}}{Z_{//} + Z_{01}}$$

$$\tau_0 = \frac{2Z_{//}}{Z_{//} + Z_{01}}$$



Relação de Onda Estacionária (ROE)

$$R0E = \frac{\left|v(z)\right|_{\max}}{\left|v(z)\right|_{\min}} = \frac{\left|V^{+}\right|\left(1+\left|\Gamma_0\right|\right)}{\left|V^{+}\right|\left(1-\left|\Gamma_0\right|\right)} = \frac{\left(1+\left|\Gamma_0\right|\right)}{\left(1-\left|\Gamma_0\right|\right)}$$

$$R0E = \frac{|i(z)|_{\max}}{|i(z)|_{\min}} = \frac{|I^{+}|(1+|\Gamma_0|)}{|I^{+}|(1-|\Gamma_0|)} = \frac{(1+|\Gamma_0|)}{(1-|\Gamma_0|)}$$

$|\Gamma_0| = 0$ $\quad R0E = 1$ $\quad$ Casamento de impedância

$|\Gamma_0| = 1$ $\quad R0E \to \infty$ $\quad$ Reflexão total

$$R0E \geq 1$$

CARTA DE SMITH

Carta de Smith

- ✓ Publicada por P. H. Smith em 1939
- ✓ Técnica gráfica muito útil
- ✓ Ferramenta gráfica para a soluções de problemas envolvendo coeficientes de reflexão e transmissão
- ✓ Visualização de variação de impedância em linhas de transmissão
- ✓ Como ábaco auxiliar de projetos envolvendo linhas de transmissão é menos útil hoje do foi na época da sua publicação
- ✓ Nos dias de hoje projetos em altas freqüências são feitos por meio de programas de computador

Coeficiente de reflexão e carta de Smith-1

Em qualquer ponto de uma linha de transmissão

$$\Gamma\left(z\right)=\frac{V^{-}\left(z\right)}{V^{+}\left(z\right)}=\left(\frac{V^{-}}{V^{+}}\right)\frac{e^{jk_I z}}{e^{-jk_I z}}=\Gamma_0\frac{e^{jk_I z}}{e^{-jk_I z}}=\Gamma_0 e^{2jk_I z}$$

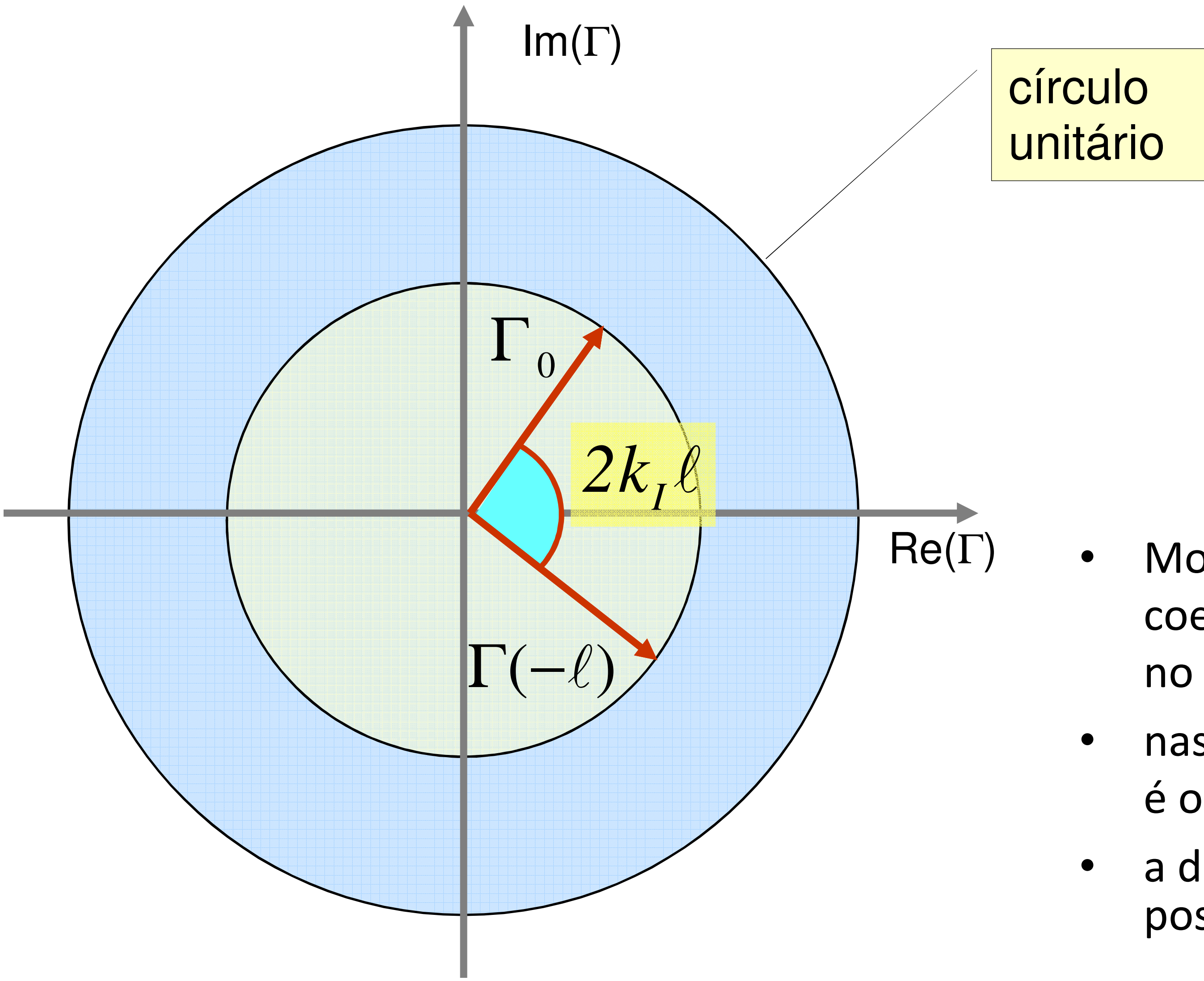
em $z=-\ell$ $\Gamma\left(-\ell\right)=\Gamma_0 e^{-2jk_I\ell}$

em $z=0$ $\Gamma\left(0\right)=\Gamma_0$

supondo $\left|\Gamma(z)\right|\leq 1$

O coeficiente de reflexão pode ser representado no plano complexo, **Re(Γ) x Im(Γ)**

Coeficiente de reflexão e carta de Smith-2



- Movimento do coeficiente de reflexão no plano complexo
- nas 2 posições o módulo é o mesmo
- a defasagem entre as 2 posições é $2k_I l$

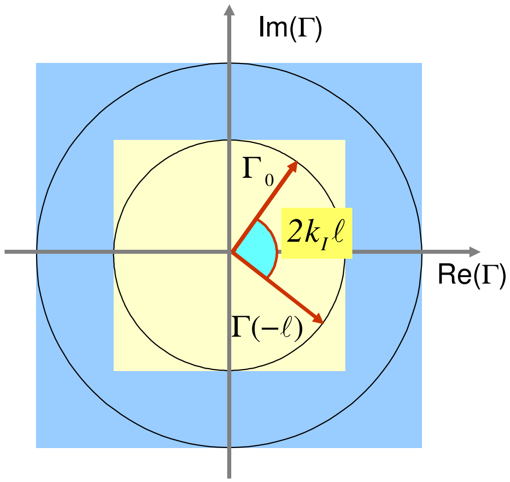
Coeficiente de reflexão e carta de Smith-3

O coeficiente de reflexão e a impedância são dados por

$$Z(z) = Z_0 \frac{1 + \Gamma_0 e^{j2k_I z}}{1 - \Gamma_0 e^{j2k_I z}} \quad \text{e} \quad \Gamma(z) = \Gamma_0 e^{j2k_I z}$$

Combinando as 2 expressões

$$Z(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} Z_0$$

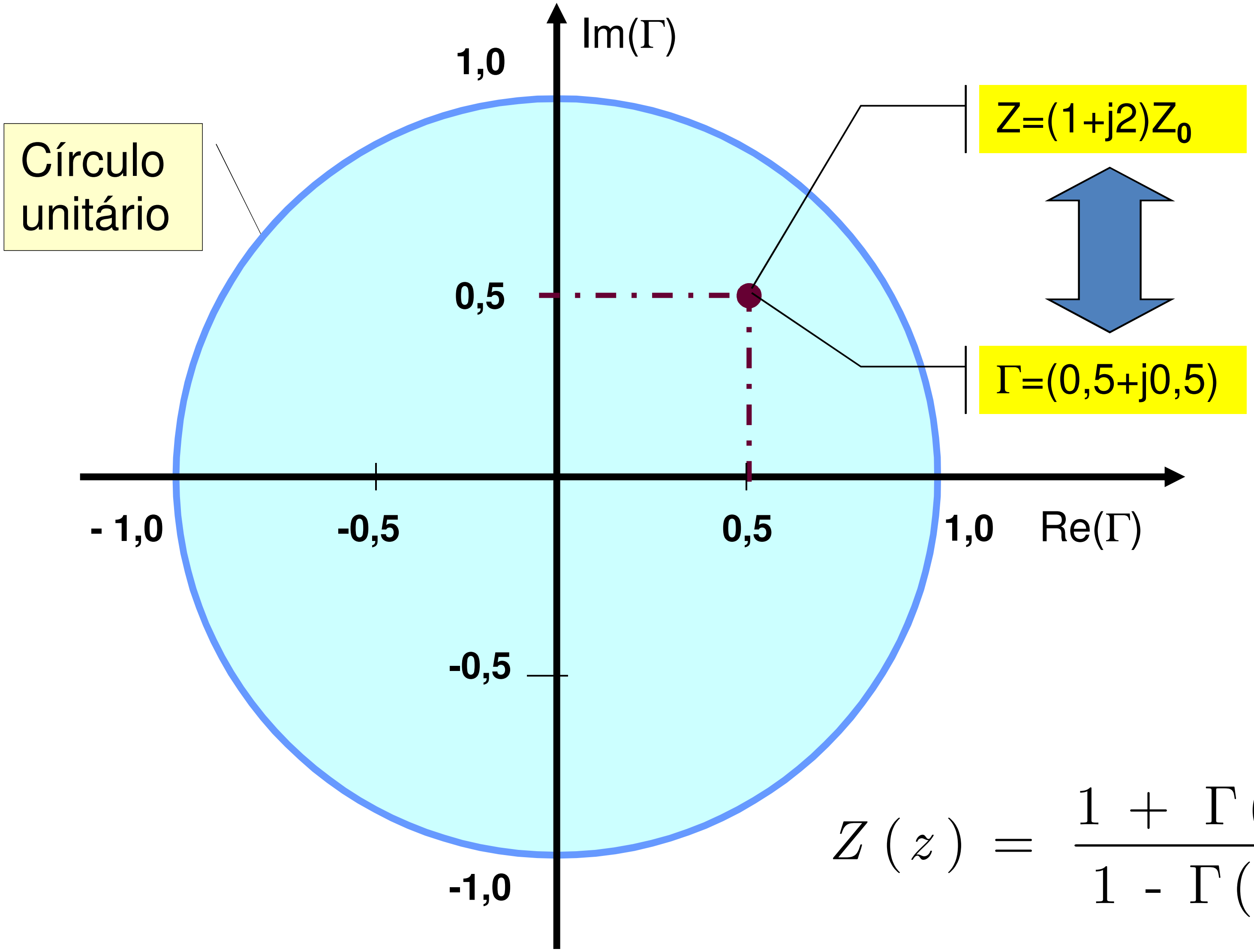


Normalizando o valor da impedância

$$z(z) \equiv \frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}$$

✓ **A cada valor de Γ corresponde um valor de z e vice-versa**

Coeficiente de reflexão e carta de Smith-4



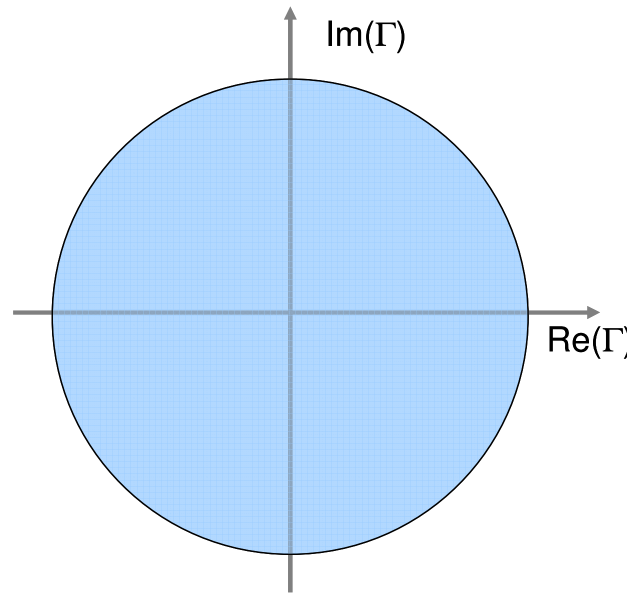
$$Z(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} Z_0$$

Impedância na carta de Smith

Rescrevendo a expressão do coeficiente de reflexão

$$\Gamma = U + jV = \frac{z-1}{z+1}$$

e $\quad z = r + jx$



$$U + jV = \frac{r + jx - 1}{r + jx + 1}$$

parte real

$$U = \frac{r^2 - 1 + x^2}{(r+1)^2 + x^2}$$

parte imaginária

$$V = \frac{2x}{(r+1)^2 + x^2}$$

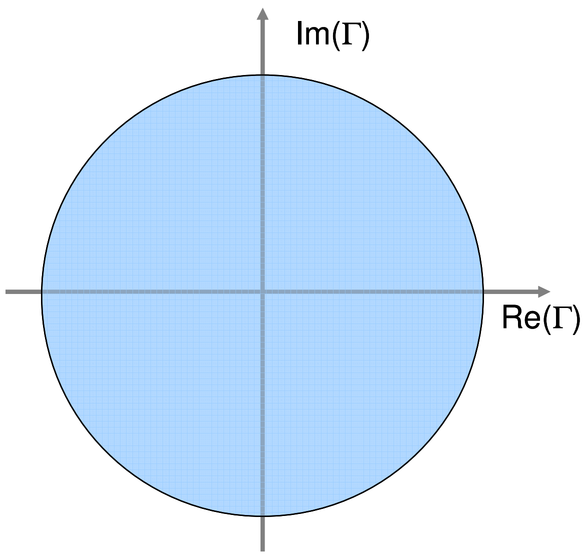
Parte Real da Impedância na Carta de Smith-1

Eliminando a variável ***x***

$$\left(U - \frac{r}{r+1}\right)^2 + V^2 = \left(\frac{1}{r+1}\right)^2$$

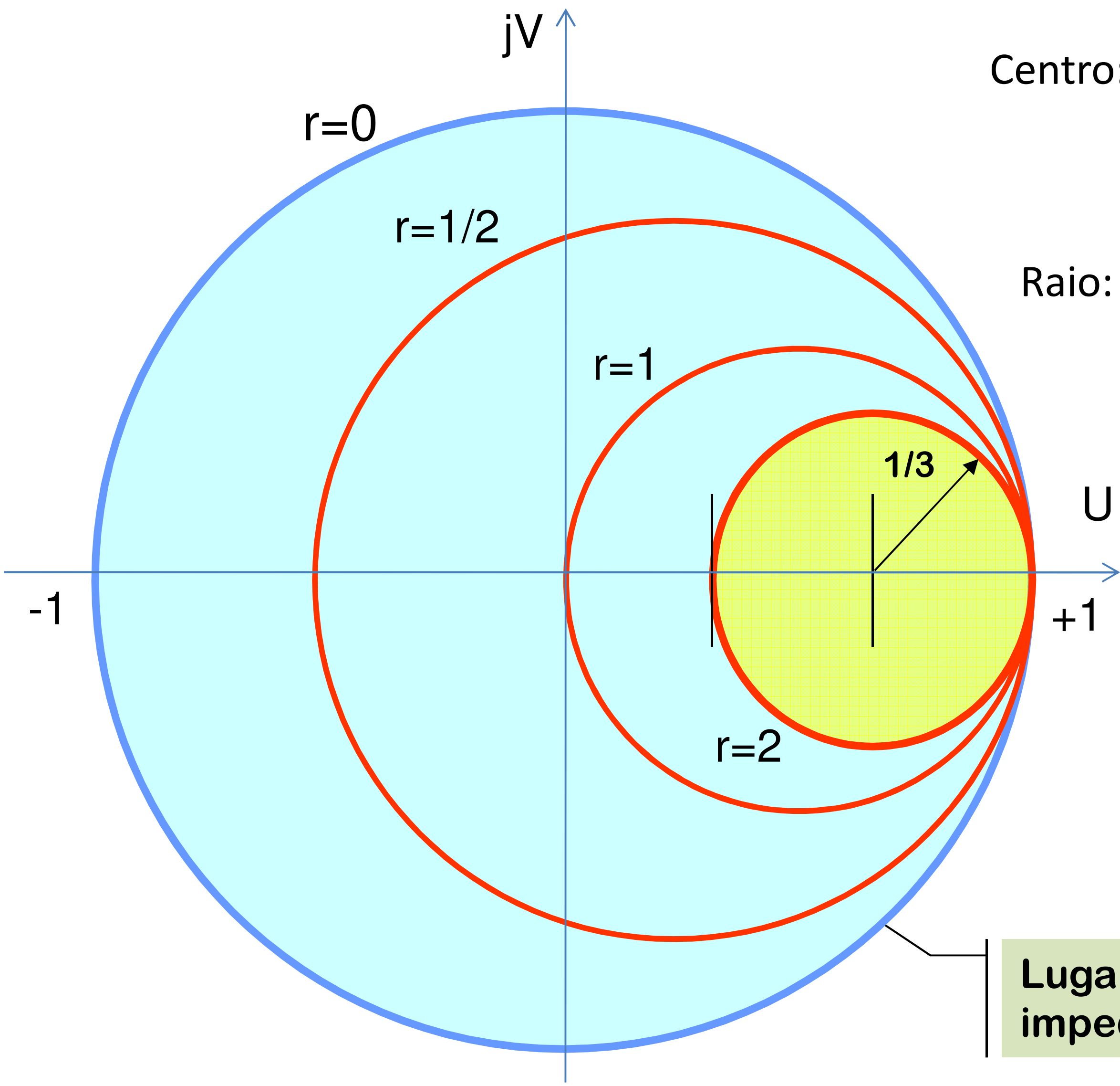
Esta equação representa uma família de círculos

Centro: $U = \dfrac{r}{r+1}; V = 0$



Raio: $\dfrac{1}{r+1}$

Parte Real da Impedância na Carta de Smith-2



Centro: $U = \dfrac{r}{r+1}\,;\, V = 0$

Raio: $R = \dfrac{1}{r+1}$

$$\Gamma = U + jV$$

$$z = r + jx$$

Lugar geométrico de todas as impedâncias com parte real nula

Parte Imaginária da Impedância na Carta de Smith-1

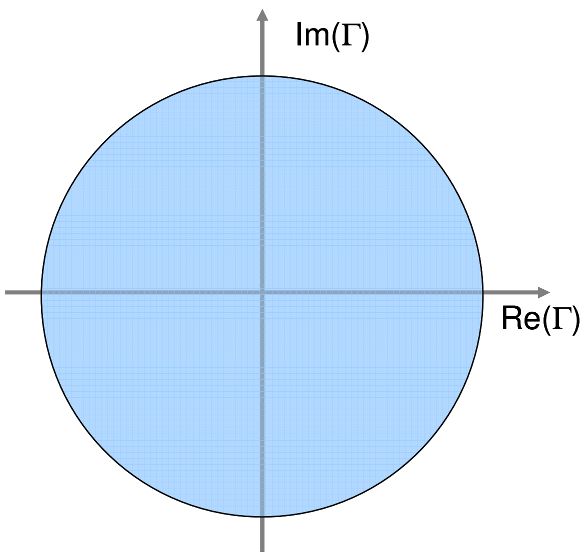
Eliminando a variável ***r***

$$\left(U - 1\right)^2 + \left(V - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

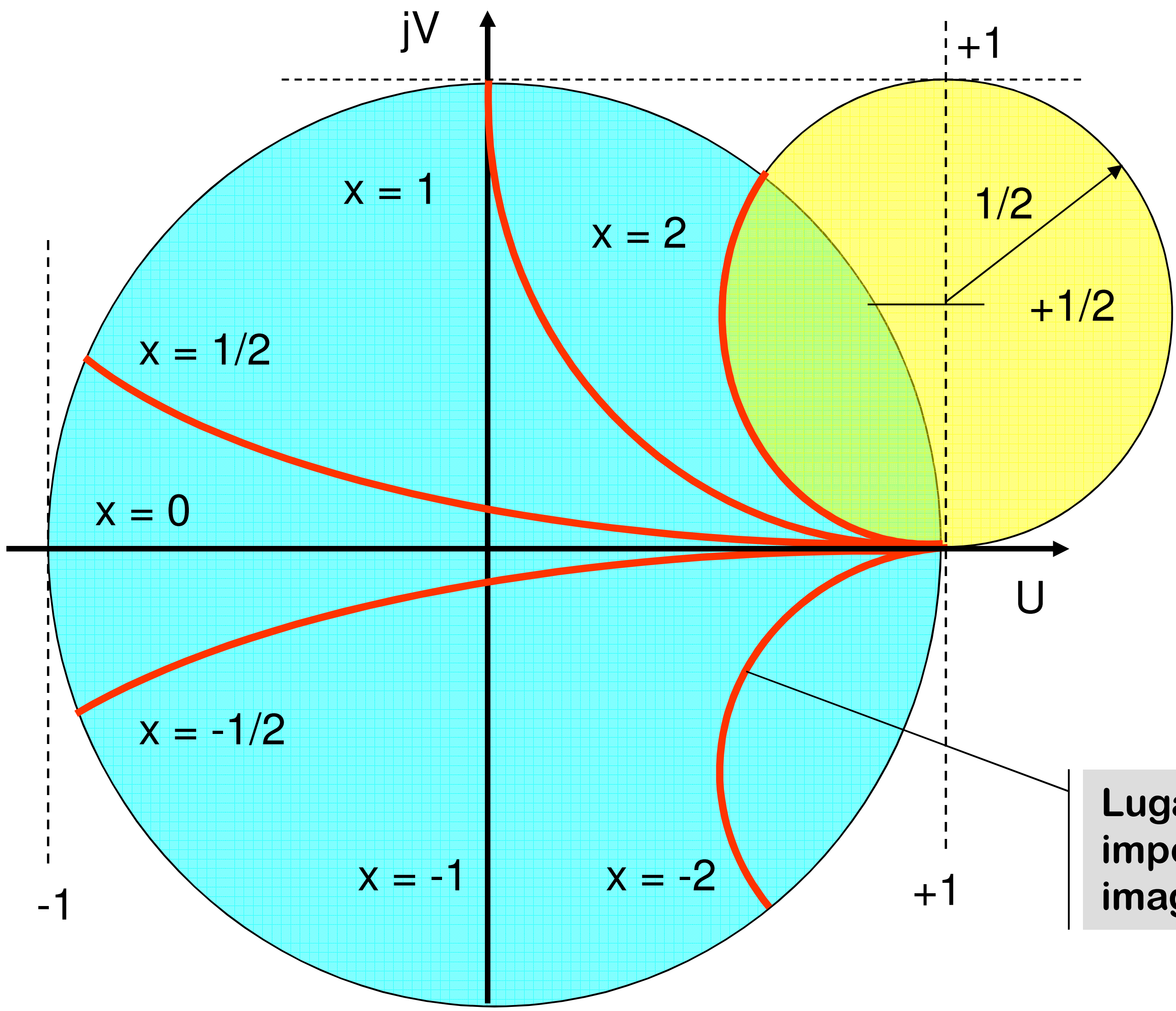
Esta equação representa uma família de círculos

Centro: $U = 1; \quad V = \frac{1}{x}$

Raio: $R = \frac{1}{x}$



Parte Imaginária da Impedância na Carta de Smith-2



Centro: $U = 1; \quad V = \frac{1}{x}$

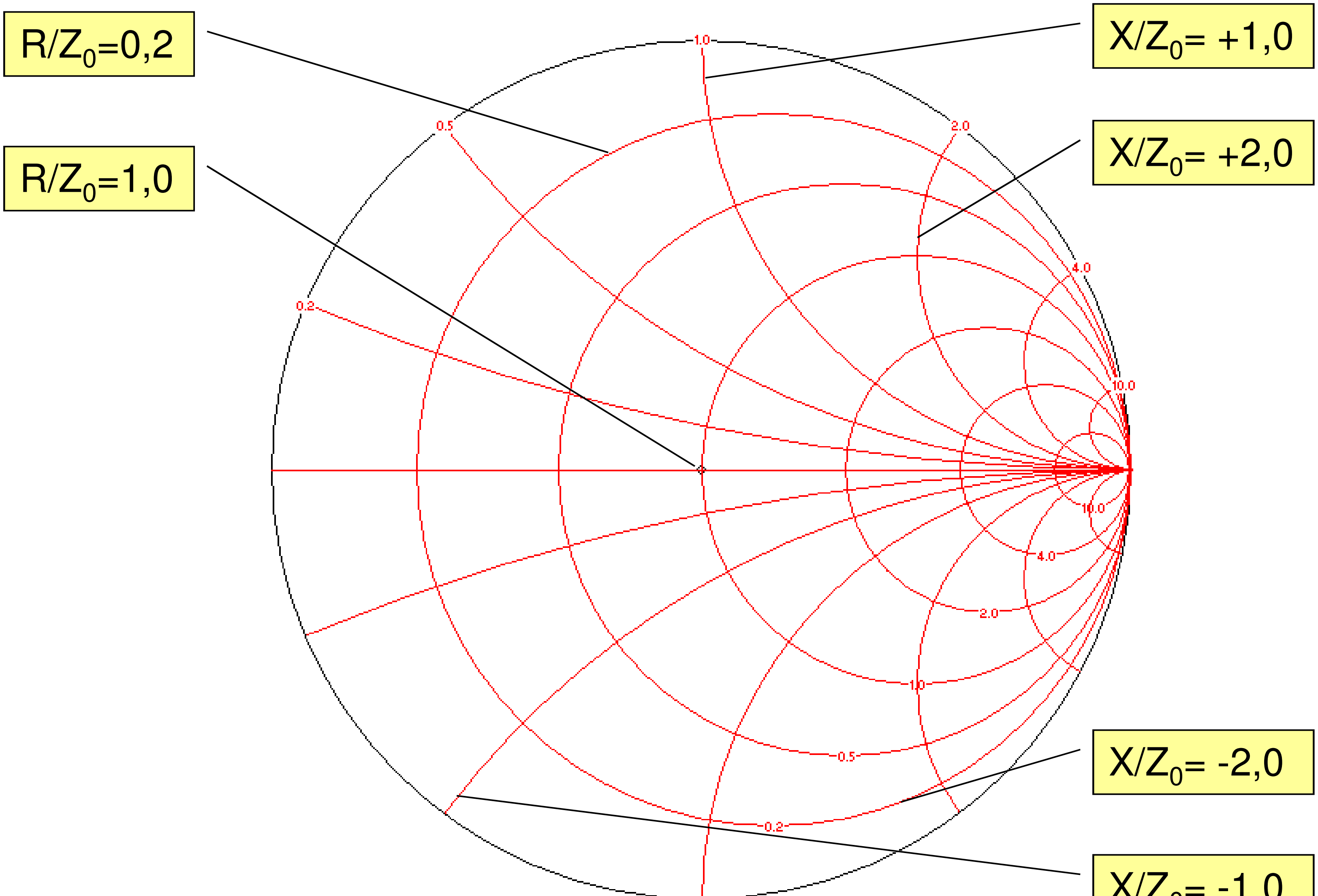
Raio: $R = \frac{1}{x}$

$$\Gamma = U + jV$$

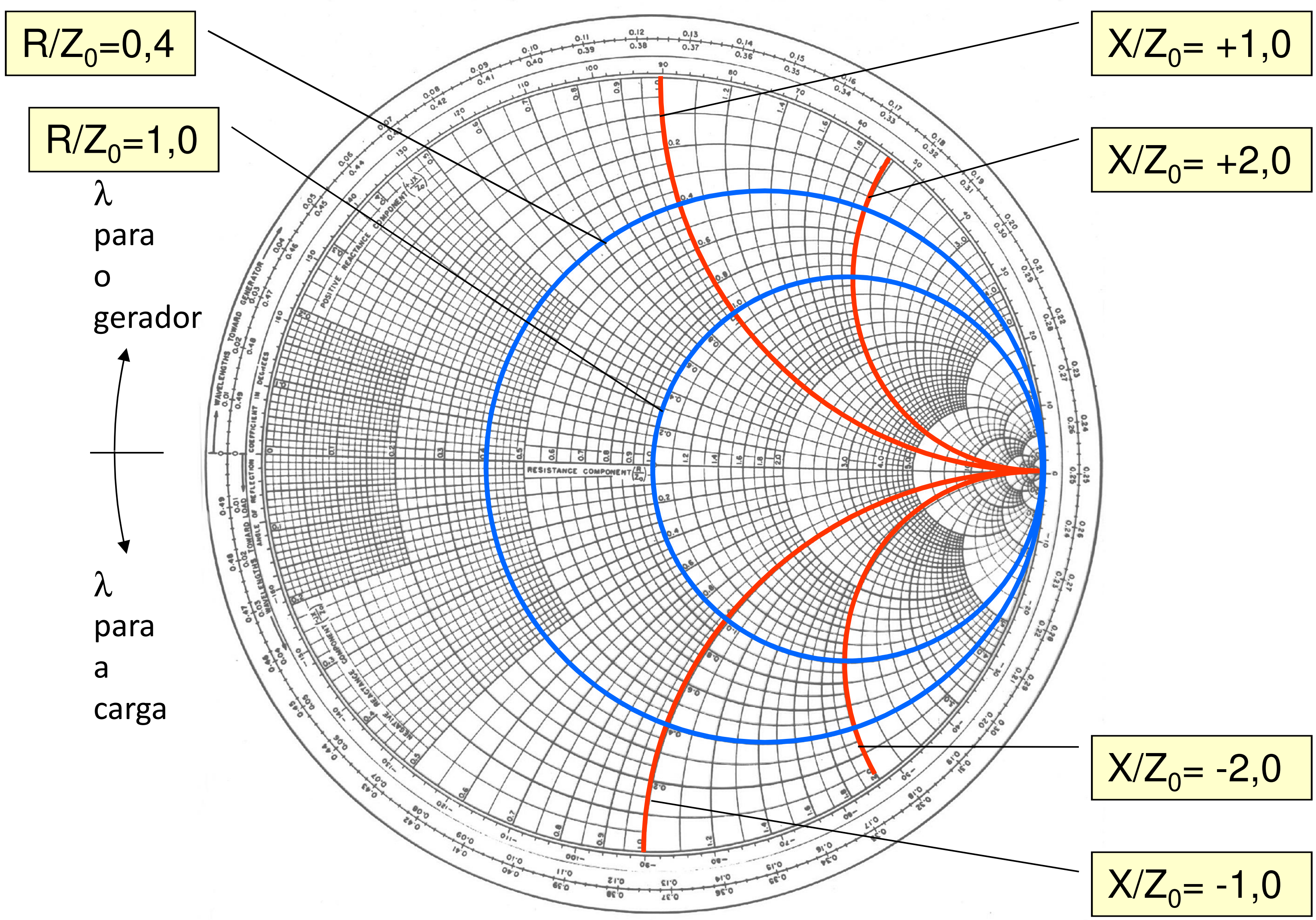
$$z = r + jx$$

Lugar geométrico das impedâncias cuja parte imaginária é x = -2

A Carta de Smith-1



A Carta de Smith-2



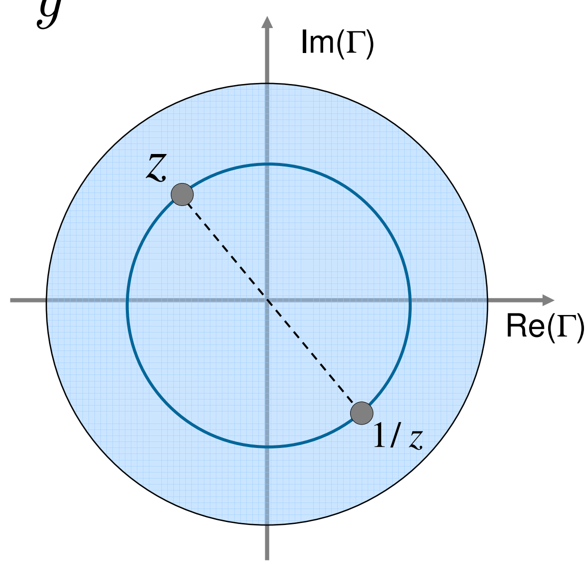
Admitância na Carta de Smith

Admitância característica: $Y_0 = \dfrac{1}{Z_0}$

A impedância normalizada é dada por: $z = \dfrac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$

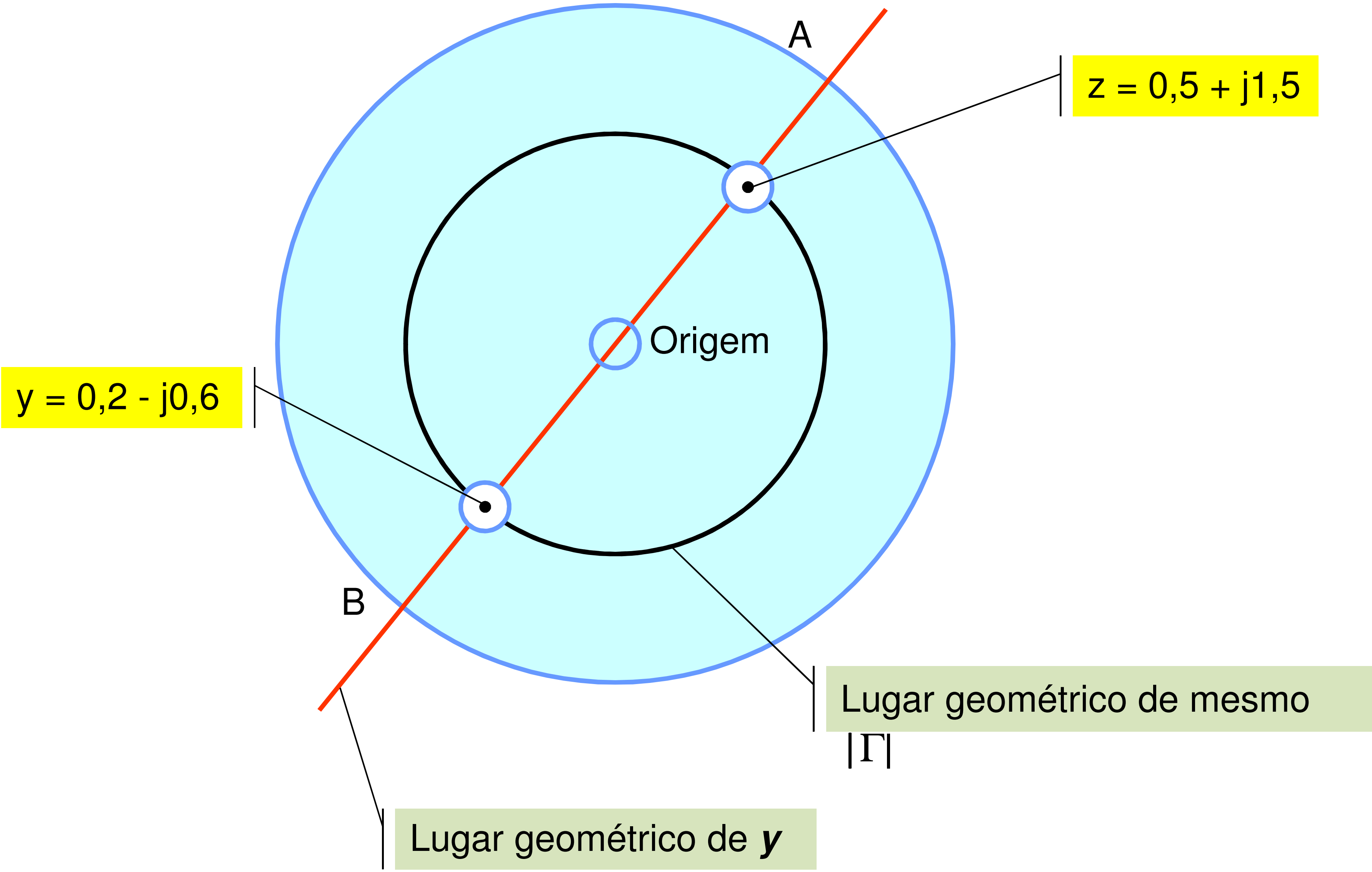
Substituindo Γ por $-\Gamma$

$$z = \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{z} = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \equiv y$$



Substituir Γ por $-\Gamma$ equivale a trocar ***z*** por (***1/z***)
Localizar Γ (ou ***z***) da maneira usual
Determinar ($-\varsigma$) por rebatimento
Traçar um círculo passando por Γ
O número complexo obtido é ***y = (1/z)***

Admitância na Carta de Smith: exemplo



ROE na Carta de Smith-1

Impedância: $$Z(z) = Z_0 \frac{1 + |\Gamma_0| e^{j(2k_I z - \theta_R)}}{1 - |\Gamma_0| e^{-j(2k_I z - \theta_R)}}$$

O máximo de tensão da onda estacionária ocorre para

$$\cos\left(2k_I \ell_{\max} - \varphi_r\right) = 1, \quad n = 0,1,2\ldots \qquad \ell_{\max} = \frac{n\pi + \phi_r / 2}{k_I}$$

$$\left|V(-\ell)\right|_{\max} \equiv V_{\max} = \left|V^+\right|\left(1 + \left|\Gamma_0\right|\right)$$

$$Z(\ell_{\max}) = Z_0 \frac{1 + |\Gamma_0|}{1 - |\Gamma_0|} \quad \text{ou} \quad Z(\ell_{\max}) = Z_0 ROE$$

Este valor é real e, no mínimo, igual a Z_0

ROE na Carta de Smith-2

Impedância: $$Z(z) = Z_0 \frac{1 + |\Gamma_0| e^{j(2k_I z - \theta_R)}}{1 - |\Gamma_0| e^{-j(2k_I z - \theta_R)}}$$

O mínimo de tensão da onda estacionária ocorre para

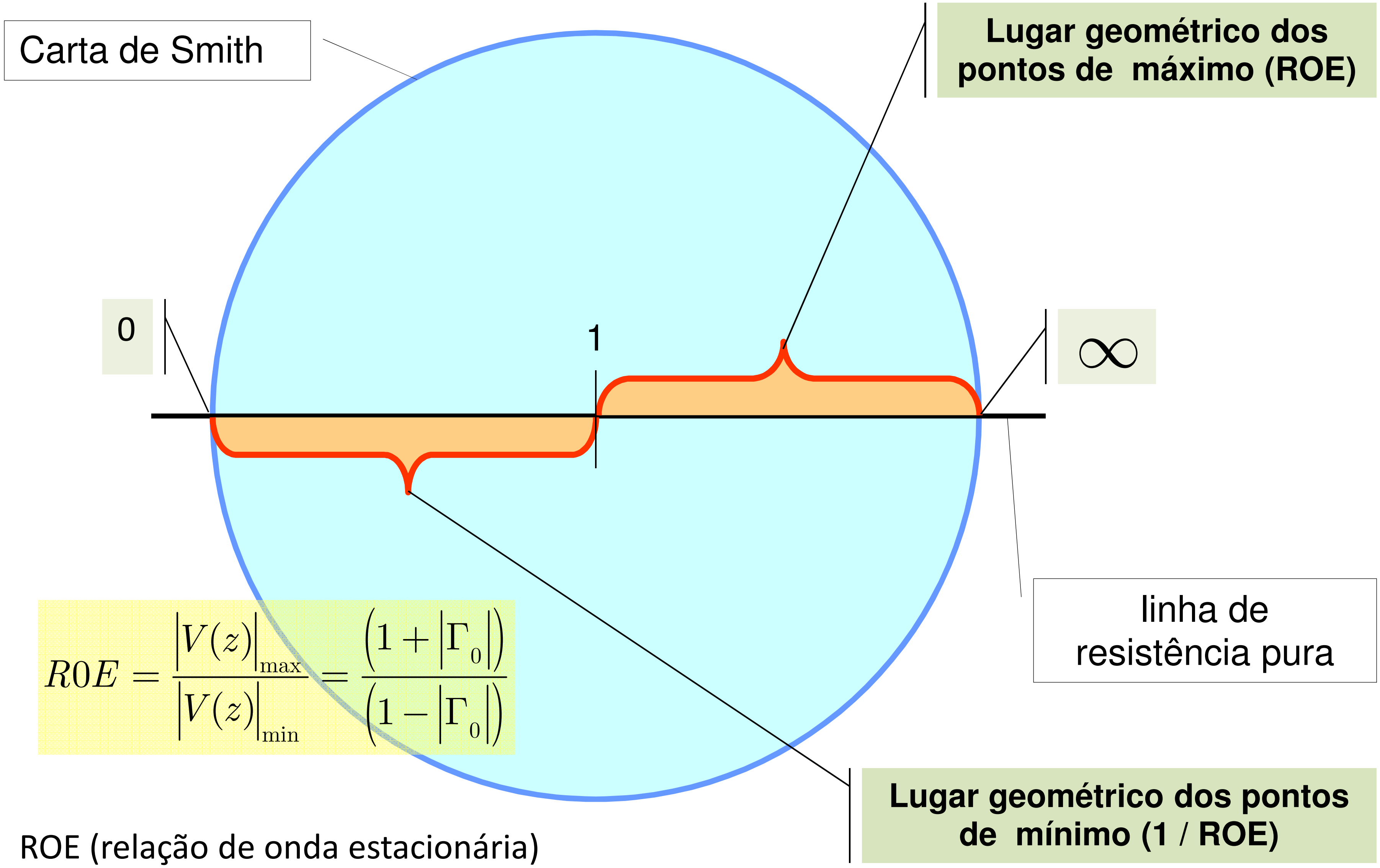
$$\cos(2k_I \ell - \varphi_r) = -1 \text{ ,} \quad n = 0, 1, 2\ldots \quad \ell_{\min} = \frac{(2n+1)\pi/2 + \phi_r/2}{k_I}$$

$$|V(-\ell)|_{\min} \equiv V_{\min} = |V^+|(1 - |\Gamma_0|)$$

$$Z(\ell_{\min}) = Z_0 \frac{1 - |\Gamma_0|}{1 + |\Gamma_0|} \quad \text{ou} \quad Z(\ell_{\min}) = \frac{Z_0}{ROE}$$

Este valor é real e, no máximo, igual a Z_0

ROE e Carta de Smith

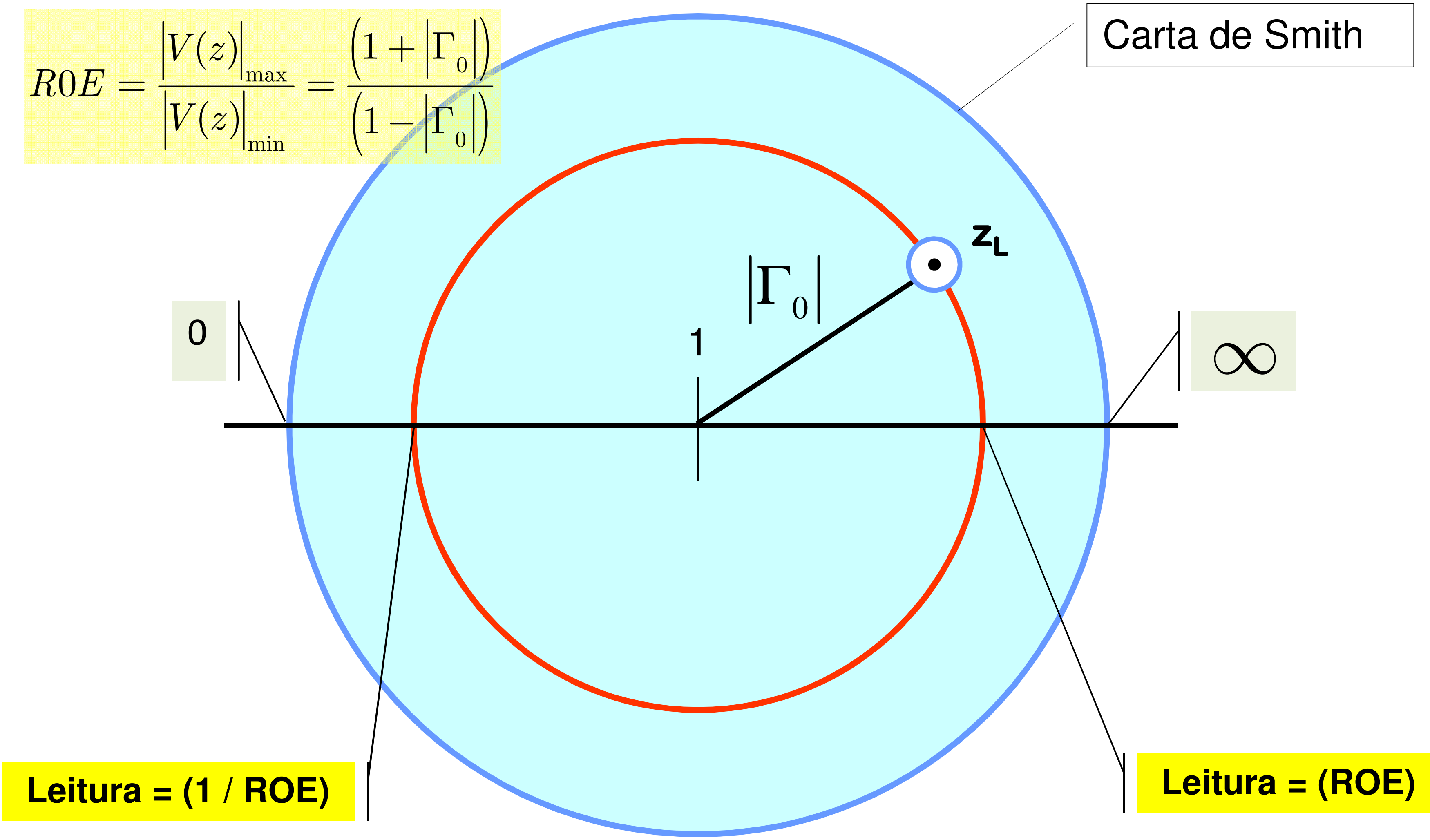


$$R0E = \frac{\left|V(z)\right|_{\max}}{\left|V(z)\right|_{\min}} = \frac{\left(1+\left|\Gamma_0\right|\right)}{\left(1-\left|\Gamma_0\right|\right)}$$

ROE (relação de onda estacionária)

ROE e Carta de Smith: exemplo

$$ROE = \frac{|V(z)|_{\max}}{|V(z)|_{\min}} = \frac{(1+|\Gamma_0|)}{(1-|\Gamma_0|)}$$



ROE (relação de onda estacionária)