Integrais Gaussianas

Integrais envolvendo funções gaussianas, como a indicada abaixo,

$$I_0(\alpha) \,=\, \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx \;, \tag{1}$$

são comuns em Física, Estatística e outras áreas. A notação $I_0(\alpha)$ indica que o resultado da integral depende do expoente α. Uma das técnicas para resolver a integral consiste em considerar o quadrado de $I_0(\alpha)$,

$$I_0^2(\alpha) \,=\, \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx \;\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2}\, dy \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\alpha(x^2+y^2)} \;. \tag{2}$$

A quantidade $I_0^2(\alpha)$ pode ser interpretada como uma integral de superfície sobre $\mathcal{R}^2$ em coordenadas cartesianas, podendo ser também realizada em coordenadas polares [1]

$$\begin{array}{lcl} r = (x^2+y^2) & ; & 0 \le r < \infty \\ \theta = \mathrm{tg}^{-1}(y/x) & ; & 0 \le \theta < 2\pi \end{array} \;, \tag{3}$$

de modo que

$$I_0^2(\alpha) \,=\, \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\alpha(x^2+y^2)} \;=\; \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r\, dr\, e^{-\alpha r^2} \;=\; 2\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{2}\, du\, e^{-\alpha u} \;,$$

onde se realizou a mudança $u = r^2$ no último passo. Da expressão acima, é imediato obter (note que a integral I_0 é um número positivo)

$$I_0^2(\alpha) \,=\, \frac{\pi}{\alpha} \;\Longrightarrow\; I_0(\alpha) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} \;. \tag{4}$$

Funções Pares. Uma função $f(x)$ é dita *par* em torno de $x = 0$ se satisfaz a condição $f(x) = f(-x)$. Será interessante demonstrar a seguinte propriedade para funções pares e contínuas:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx \;.$$

Fazendo a mudança de variável $u = -x$ na primeira integral,

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int_{+\infty}^{0} f(-u)(-du) = \int_{0}^{+\infty} f(u)du \;,$$

onde se utilizou a propriedade $f(u) = f(-u)$ da função par. Em vista das duas expressões acima, concluímos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)dx \;. \tag{5}$$

Sendo a Gaussiana uma função par, $\exp(-\alpha(-x)^2) \,=\, \exp(-\alpha x^2)$, concluímos também que

[1] Como alternativa, poderíamos introduzir a mudança de variáveis $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\theta$, cujo determinante Jacobiano é $J = r$.

$$I_0'(\alpha) \;=\; \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\, dx \;=\; \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} \;. \tag{6}$$

Produtos de Gaussianas por x^{2n}. Outro resultado de grande utilidade pode ser obtido por sucessivas derivações da igualdade

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx \;=\; \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} \tag{7}$$

em relação a α. Explicitamente,

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\alpha} e^{-\alpha x^2}\, dx \;=\; \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} \;\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\; \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}\, dx \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\alpha^3}\right)^{1/2} \;. \tag{8}$$

A expressão acima pode ser derivada mais uma vez em relação a α, resultando na integral de $x^4 \exp(-\alpha x^2)$, e aplicações sucessivas desse procedimento conduzirão ao resultado

$$I_n(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^{2n}\, e^{-\alpha x^2} \;=\; \frac{(2n-1)!!\,\pi^{1/2}}{2^n\,\alpha^{(2n+1)/2}} \qquad , \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots \;, \tag{9}$$

onde

$$(2n-1)!! = \begin{cases} 1 \;, & \text{se} \quad n \leq 0 \\ 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \;, & \text{se} \quad n > 0 \end{cases} \;. \tag{10}$$

Perceba que o caso $I_0(\alpha)$ está contemplado no resultado acima (substitua $n = 0$ e verifique!). Além disso, como todas as integrais $I_n(\alpha)$ têm integrandos pares, é imediato obter:

$$I_n'(\alpha) = \int_0^\infty dx\, x^{2n}\, e^{-\alpha x^2} \;=\; \frac{1}{2} I_n(\alpha) \;. \tag{11}$$

Funções Ímpares. Uma função $f(x)$ é dita *ímpar* em torno de $x = 0$ se satisfaz a condição $f(x) = -f(-x)$. Procedendo em analogia ao caso das funções pares (abaixo, $u = -x$):

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int_{+\infty}^{0} f(-u)(-du) = -\int_0^{+\infty} f(u)du \;,$$

onde foi utilizado $f(-u) = -f(u)$. Portanto, para funções ímpares,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx = 0 \;.$$

Produtos de Gaussianas por x^{2n+1}. Todas as integrais do tipo

$$J_n'(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} dx \;,$$

com $n = 0, 1, 2, \cdots$, têm integrandos ímpares, sendo iguais a zero, isto é,

$$J_n'(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} dx = 0 \;. \tag{12}$$

Todavia, podemos considerar a integral abaixo:

$$J_0(\alpha) = \int_0^{+\infty} x\, e^{-\alpha x^2} dx \ .$$

Fazendo $u = x^2$, com $du = 2xdx$, teremos:

$$J_0(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha u} du \implies J_0(\alpha) = \frac{1}{2\alpha} \ . \tag{13}$$

Será deixado como exercício derivar sucessivamente (em relação a α) a igualdade abaixo,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \ ,$$

de modo a obter

$$J_n(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{2n+1}\, e^{-\alpha x^2}\, dx \ = \ \frac{n!}{2\alpha^{n+1}} \qquad , \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots \ , \tag{14}$$

Lembrando que $0! = 1! = 1$, o caso J_0 estará contemplado na expressão geral.

Resumo

Potências pares:

$$I_n(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^{2n}\, e^{-\alpha x^2} \ = \ \frac{(2n-1)!!\, \pi^{1/2}}{2^n\, \alpha^{(2n+1)/2}} \qquad , \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots \ ,$$

onde

$$(2n-1)!! = \begin{cases} 1 \ , \quad \text{se} \quad n \leq 0 \\ 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \ , \quad \text{se} \quad n > 0 \end{cases}$$

$$I'_n(\alpha) = \int_0^{\infty} dx\, x^{2n}\, e^{-\alpha x^2} \ = \ \frac{1}{2} I_n(\alpha)$$

Potências ímpares:

$$J_n(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{2n+1}\, e^{-\alpha x^2}\, dx \ = \ \frac{n!}{2\alpha^{n+1}} \qquad , \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots \ ,$$

onde $0! = 1! = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1}\, e^{-\alpha x^2}\, dx \ = \ 0$$