IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova REC** Nome:______________________

Informações:

- Duração de 2:00 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra anulará teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

♠

1. Assinale as afirmações erradas e argumente porque estão erradas. [20]

   A. Suponha que prendemos um mini-CTD ao casco de uma tartaruga morta e soltamos a defuntinha. As medidas tomadas por esse instrumento macabro podem ser consideradas Lagrangianas.

   Resposta:
   Certo. Tartaruga morta não tem vontade própria, segue o fluxo.

   B. A dimensão do coeficiente de viscosidade dinâmica μ é $[\mathrm{ML}^{-2}\mathrm{T}^{-1}]$

   Resposta:
   Errado, é $[\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}]$.

   C. A tensão superficial de uma gota esférica pode ser estimada a partir do equilíbrio entre o trabalho de compressão e a variação da área.

   Resposta:
   Certo.

   D. Podemos aplicar a eq. de Bernoulli em quaisquer fluxos irrotacionais e não-divergentes.

   Resposta:
   Errado, precisa ser estacionário.

   E. O termo advectivo da derivada total é chamado de não-linear, pois podemos usar a regra de derivadas do produto para colocar alguns termos na forma $\frac{1}{2}\frac{\partial u_i^2}{\partial x_i}$.

   Resposta:
   Certo.

2. Dê a expressão matemática (use operadores vetoriais se for possível) e responda o que representam fisicamente as componentes diagonais e não–diagonaiso tensor do tensor $e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. [10]

   Resposta:
   As componentes diagonais são da forma $i = j$, i.e.:$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ e representam a deformação linear. Somadas resultam no operador divergente. As componentes não–diagonais são da forma $i \neq j$ e.g.:$\frac{\partial u}{\partial y}$ e representam a deformação por cisalhamento. Elas não estão associadas a nenhum operador vetorial.

3. Esta é a **eq. de Navier–Stokes**:
$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\vec{g} + \rho(\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})) - 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}. \quad (1)$$

(a) Suponha que a Corrente Circumpolar Antártica flui para leste sobre 60°S a 1 m/s e tem 200 km de largura. Considere o fluxo estacionário, linear, invíscido, homogêneo e hidrostático. Calcule o desnível meridional entre a borda sul e a borda norte a partir da Equação 1. 15

> **Dica:** Na horizontal o balanço é entre os termos de Coriolis e do gradiente de pressão. Use a gravidade aparente de 9.8m/s^2 na eq. hidrostática.

Resposta:
Sobra o balanço entre as forças de Coriolis e do gradiente de pressão na horizontal e a hidrostática na vertical. Como a corrente flui na direção zonal, a velocidade só tem a componente u não-nula. O balanço

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2\rho\Omega\sin\theta u, \text{ aproximando para diferenças finitas, } \frac{\Delta p}{\Delta y} = 2\rho\Omega\sin\theta u$$

Usando hidrostática para converter a pressão em altura, transformo $\vec{g}$ em gravidade aparente:

$$\rho g\Delta h = 2\Omega\sin\theta\, u\, \Delta y, \quad \Delta h = \frac{2\Omega\sin\theta\, u\, \Delta y}{g}$$

Fazendo as contas,

$$\Delta h = \frac{2\times 7.2\times 10^{-5}\times\sqrt{3}/2\times 1\times 2\times 10^{5}}{9.8} = 2.54\text{m}$$

(b) Simplifique a equação 1 para estudar um aquário do laboratório de Dinâmica de $30\times 30\times 25$cm onde eu agitei a água com a mão há uns 3s atrás, fazendo movimentos desordenados e vigorosos de um lado a outro do tanque. Argumente porquê você está simplificando cada termo que se vai. 10

Resposta:
Os termos que dependem de rotação são menores que os demais pois o movimento ocorre numa escala de tempo 4 ordens de grandeza menor que um dia. Não é estacionário pois em 3s ele não chega nem perto do repouso. Não é linear, pois acabei de introduzir turbulência. Tem gradiente de pressão nas 3 direções pois tem ondas de gravidade.

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\vec{g}$$

4. Considere o potencial de velocidade dado por $\phi = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta$.

> **Dica:** Faça na sequência proposta, de forma clara e organizada prestando atenção em que variável você está derivando e quem fica constante.

(a) Calcule u_r e u_θ. 5

Resposta:

Resposta:

$$
\begin{aligned}
u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \\
&= U\cos\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(r + \frac{a^2}{r}\right) \\
&= U\cos\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
u_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\
&= U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial \cos\theta}{\partial \theta} \\
&= -U\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta
\end{aligned}
$$

(b) Demonstre matematicamente que para este fluxo tanto ϕ como ψ existem. $\boxed{10}$

Dica: Um operador vetorial se anula em cada caso.

Resposta:
$\exists\, \phi$ se $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$, no plano xy temos só o último termo:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\vec{i_z}} &= \\
\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} &= \\
-U\sin\theta \frac{\partial\left(r + \frac{a^2}{r}\right)}{\partial r} - \frac{\partial\left(U\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta\right)}{\partial \theta} &= \\
-U\sin\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + U\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta &= 0 \quad \text{QVOD ERAT DEMONSTRANDVM}
\end{aligned}
$$

$\exists\, \psi$ se $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$, no plano xy temos:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} &= \\
\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} &= \\
U\frac{\partial\left(r - \frac{a^2}{r}\cos\theta\right)}{\partial r} - -U\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\frac{\partial \sin\theta}{\partial \theta} &= \\
U\cos\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - U\cos\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) &= 0 \quad \text{QED}
\end{aligned}
$$

(c) Obtenha uma expressão para ψ. $\boxed{10}$

Dica: 2 funções =s em todo o espaço, onde cada uma é função de uma variável $\neq$, são constantes e =s.

Resposta:

Para obter ψ partimos primeiro de u_r:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = ru_r$$
$$= U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta$$

Integrando em θ,

$$\psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta + P(r)$$

Onde $P(r)$ é uma função de r a determinar.

Agora vamos obter ψ a partir de u_θ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = -u_\theta$$
$$= U\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta$$

Integrando em r,

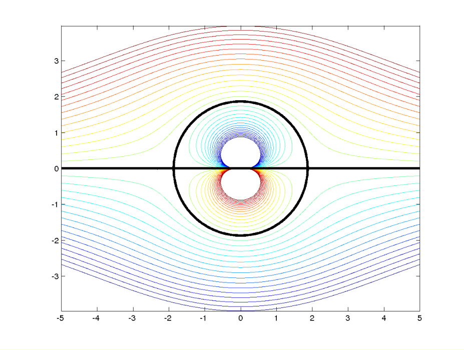
$$\psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta + Q(\theta)$$

Onde $Q(\theta)$ é uma função de θ a determinar.

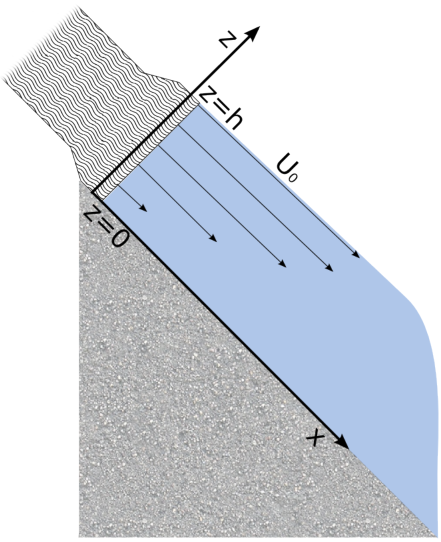
Igualando os dois ψs temos $P(r) = Q(\theta)$ o que obriga $P = Q = K$, onde K é constante. Portanto:

$$\psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta + K.$$

As isolinhas de ψ são as de um fluxo ao redor de uma coluna, neste exemplo $U = 1,\ a = 2$:



5. Na seção xz ilustrada a seguir, um canal despeja um líquido de densidade ρ e viscosidade dinâmica μ sobre um barranco na forma um triângulo retângulo isósceles. O ângulo superior do triângulo é θ. Depois de um certo tempo, o sistema fica em equilíbrio, as velocidades u e a altura h não variam mais com o tempo. Esse fluxo laminar e viscoso é forçado apenas pela gravidade g. O fluxo é simétrico em y. Considere uma parcela de fluido longe das bordas, com comprimento L na direção x e W na direção y (furando o papel). Junto ao chão do barranco a velocidade é $u = 0$ e na interface superior é $u = U_0$.



Dica: Não substitua valores numéricos antes de obter as fórmulas finais.

(a) Obtenha o **perfil de velocidades** $u(z)$. 10

Dica: Lembre que τ é força por área. Comece obtendo τ em função de z para uma parcela de fluido que desce o *plano inclinado*. Você deve usar a definição de τ para obter uma equação diferencial, resolva-a para obter $u(z)$ usando uma das condições de contorno.

Resposta:

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{\rho V g \cos\theta}{LW} = \rho z g\, cos\theta$$

$$\tau_{ij} = \mu \frac{du_j}{dx_i} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\rho}{\mu} gz \cos\theta \quad \text{integrando em } z \text{ dos 2 lados}$$

$$u = \frac{\rho g}{2\mu} \cos\theta\, z^2 + C \quad \text{, usando as condições de contorno, se } u = 0 \text{ em } z = 0 \Rightarrow C = 0;$$

$$\text{Portanto o perfil é } u(z) = \frac{\rho g}{2\mu} \cos\theta\, z^2$$

(b) Obtenha uma fórmula para a **altura de equilíbrio** h em função dos parâmetros conhecidos. 5

Dica: Você deve usar o resultado anterior e a outra condição de contorno.

Resposta:

Usando a outra condição, $u = U_0$ em $z = h \Rightarrow U_0 = \frac{\rho g}{2\mu} \cos\theta\, h^2$ portanto $h = \sqrt{\frac{2\mu U_0}{\rho g \cos\theta}}$.

(c) Vamos aplicar o que deduziremos para ver se escorre mais água se aquecermos ou se resfriarmos a água, mantendo U_0 constante. O fluxo é ajustado de forma que temos $U_0 = 2$ m/s se $g = 9.8\text{ms}^{-2}$. Sabemos também que tanto a viscosidade como a densidade mudam com a temperatura: $\mu = 1.8 \times 10^{-3}$ Nsm^{-2} e $\rho = 999.9\text{kgm}^{-3}$ a 1°C e $\mu = 0.3 \times 10^{-3}\text{Nsm}^{-2}$ e $\rho = 970.4\text{kgm}^{-3}$ a 90°C. 10
Qual o fluxo em m^3/s que passa por $W = 10$cm se o fluido está a 1°C? e a 90°C?

Dica: Pense em termos da velocidade média do fluxo que passa por uma área; você precisará de uma integral simples para calculá-la.

Resposta:
Para calcular o fluxo Q, podemos calcular a velocidade média $\bar{u}$ e multiplicar pela área Wh.

$$\bar{u} = \frac{\rho g}{2\mu} \cos\theta \frac{1}{h} \int_0^h z^2 dz = \frac{\rho g\, h^2}{6\mu} \cos\theta \qquad Q = \bar{u} h W = \sqrt{\frac{2\mu U_0^3}{9\rho g \cos\theta}}\, W$$

Substituindo os valores para 1°C temos $Q = 6.8 \times 10^{-5}\text{m}^3$/s e para 90°C temos $Q = 2.8 \times 10^{-5}\text{m}^3$/s.

Memória não–volátil:

Conversão do sistema retangular (x, y, z) para o cilíndrico (r, θ, z) e vice-versa:
$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$ e $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, $z = z$.
Quanto aos versores, $i_x = (i_r \cos\theta - i_\theta \sin\theta)$, $i_y = (i_r \sin\theta + i_\theta \cos\theta)$, $i_z = i_z$.

Potencial de velocidade e função de corrente:

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad = \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad = \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$\Omega = 7.29 \times 10^{-5} \mathrm{s}^{-1}$

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar

$$\vec{\nabla} E = \left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_\theta} + \left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\, u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\, u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_z}$$

Questão	1	2	3	4	5	Total
Pontos	20	10	25	25	25	105
Nota						

♠