IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova REC** Nome:____________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A tentativa de violação de qualquer uma das regras abaixo anulará o exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o telefone.

♠

1. As afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas? Justifique as falsas.

(a) O tensor $\omega_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ representa a vorticidade e seus termos diagonais representam a deformação por compressão. A. Verdadeiro **B. Falso** $\boxed{5}$

Resposta:
Esse tensor representa a vorticidade, mas ele não inclui o efeito da compressão.

(b) O termo da forçante do vento na equação da Navier–Stokes depende do coeficiente de viscosidade. $\boxed{5}$
A. Falso **B. Verdadeiro**

Resposta:
Verdade, basta perceber que na equação o termo $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$ às vezes aparece como $\mu\nabla^2\vec{u}$.

(c) A equação da continuidade pode ser simplificada para a forma $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$ quando estudamos circulação abissal. $\boxed{5}$
A. Verdadeiro B. Falso

Resposta:
Ela pode ser simplificada pois o **gradiente** de densidade é pequeno apesar da enorme pressão.

(d) O potencial de velocidade é definido para fluxos bidimensionais não–divergentes. $\boxed{5}$
A. Falso B. Verdadeiro

Resposta:
É definido para fluxos **irrotacionais** 2D.

(e) As forças de Coriolis e centrífuga são fundamentalmente diferentes da força do gradiente de pressão pois dependem da aceleração da gravidade e não do sistema de referência ser inercial ou não. $\boxed{5}$
A. Verdadeiro **B. Falso**

Resposta:
Errado, não faz o menor sentido: Coriolis e centrífuga não dependem da aceleração da gravidade, depende do sistema de referência e gradiente de pressão não depende da aceleração da gravidade.

(f) O teorema de Gauss relaciona o fluxo total de uma propriedade através de uma área fechada com a divergência desse fluxo no volume total encerrado por esta superfície. $\boxed{5}$
A. Falso **B. Verdadeiro**

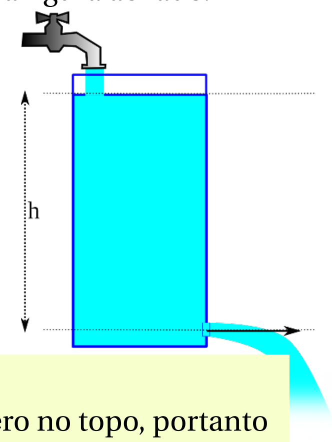
Resposta:
Nesse caso entenda-se "total" como integral.

2. Marque uma alternativa correta (f=campo escalar, $\vec{u}$=campo vetorial): $\boxed{10}$

$\nabla(\nabla\cdot\vec{u})$	√ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla\cdot(\nabla\cdot\vec{u})$	○ Vetor	○ Escalar	√ **NDA**
$\nabla\cdot(\nabla\vec{u})$	√ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla\cdot(\nabla\times f)$	○ Vetor	○ Escalar	√ **NDA**
$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{u})$	○ Vetor	√ **Escalar**	○ NDA	$\nabla\cdot(\nabla f)$	○ Vetor	√ **Escalar**	○ NDA
$\nabla\times(\nabla f)$	√ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla(\nabla\cdot f)$	○ Vetor	○ Escalar	√ **NDA**
$\nabla\times(\nabla\times\vec{u})$	√ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla\times(\nabla\times f)$	○ Vetor	○ Escalar	√ **NDA**

3. Uma caixa d'água possui um orifício em sua parte inferior como mostra a figura ao lado. $\boxed{10}$

Uma torneira na parte superior lança água nesta caixa com o mesmo fluxo que a água sai pelo orifício de raio r, mantendo o nível h da caixa constante. Se eu escarear o furo até dobrar o valor do raio e trocar a água desse sistema pelo mesmo volume de mercúrio, cuja densidade é 13000 kg.m^{-3}, de quanto aumenta a velocidade com que o líquido sai pelo furo?



Resposta:
A pressão é a mesma (atmosférica) no topo e no furo e a velocidade é zero no topo, portanto

$$\frac{\rho u^2}{2} = \rho g h \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{2gh}$$

, portanto a velocidade não mudaria pois não depende de rho e nem de r.

4. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2\vec{u} + \vec{g_a} - 2\vec{\Omega}\times\vec{u}.$$

(a) Obtenha a equação hidrostática na forma escalar e justifique suas aproximações. $\boxed{5}$

Resposta:
Se a velocidade é nula, sobra apenas $0 = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g_a}$ onde a componente vertical é a única não-nula, portanto $\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_a$.

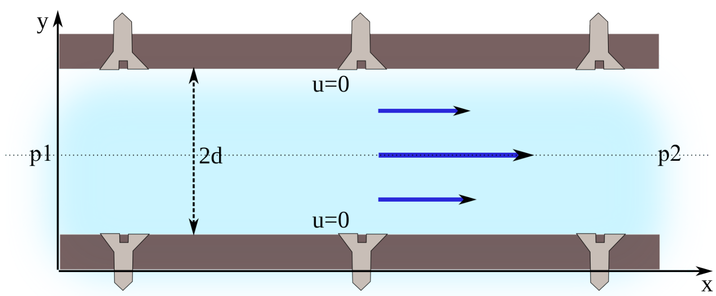
(b) Considere o fluxo invíscido e as acelerações desprezíveis quando comparadas aos termos do gradiente horizontal de pressão e da força de Coriolis. Complete as equações do movimento: [10]

$$
\begin{aligned}
\text{Continuidade} \quad & \underline{\hspace{2cm}} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \\
\text{Hidrostática} \quad & \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ copie do item a } \smile \\
\text{Momentum Zonal} \quad & \frac{\partial}{\partial} = 2\Omega \underline{\hspace{1cm}} \theta \frac{\partial}{\partial} \\
\text{Mom. Meridional} \quad & \frac{\partial}{\partial} = 2\Omega \underline{\hspace{1cm}} \theta \frac{\partial}{\partial}
\end{aligned}
$$

Resposta:

$$
\begin{aligned}
\text{Continuidade} \quad & 0 = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \\
\text{Hidrostática} \quad & \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_a \\
\text{Momentum Zonal} \quad & \frac{\partial u}{\partial y} = 2\Omega \sin\theta \frac{\partial p}{\partial x} \\
\text{Mom. Meridional} \quad & \frac{\partial v}{\partial x} = -2\Omega \sin\theta \frac{\partial p}{\partial y}
\end{aligned}
$$

5. Duas placas são vistas de lado na figura abaixo. As duas são fixas e um fluido passa entre elas.



O fluxo é estacionário e laminar. O fluido é Newtoniano, com densidade ρ e viscosidade μ constantes. As componentes da velocidade nas direções y e z são zero. Como as placas são longas, assuma que $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$. A gravidade é $g_y = -g$, constante e vertical. A velocidade é zero em $y = \pm d$, i.e. condição de contorno de não escorregamento. O fluxo é forçado pela diferença de pressão $(p2 - p1)$ aplicada nas bordas distantes como indicado. Esse é o famoso fluxo de Poiseuille (com biquinho).

(a) Simplifique a equação da continuidade. [5]

Resposta:
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$, ρ é constante, o fluxo é estacionário e 1D, só sobra $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

(b) Escreva as 3 componentes da equação de Navier-Stokes. É a do problema 4 sem os dois últimos termos pois estamos num referencial inercial. O balanço numa direção é entre viscosidade e gradiente de pressão, noutra é entre gravidade e pressão hidrostática e na terceira... é bem sem graça. [10]

Resposta:

Bem, dadas simplificações propostas no enunciado, sobra só isso:

$$\begin{aligned} \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho g \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

(c) Neste item obtenha a equação da pressão. Vamos com calma. Integre a equação da variação da pressão em y chamando a constante de integração de $f(x)$ (pois ela só é constante em y). Para determinar a pressão $p(x)$, assuma que a pressão $p(x)$ decai linearmente entre $p(0) = p1$ e $p(L) = p2$ sobre a linha pontilhada $y = 0$ usando as condições de contorno em 0 eL. Para completar $p(x, y)$, a parte em y é a boa e velha hidrostática. A resposta deste item é uma expressão para $p(x, y)$ em função de $p_1,\ p_2,\ L,\ \rho$ e g. $\boxed{10}$

Resposta:
Integrando a equação em y temos $p = -\rho g \int dy + f(x) = -\rho g y + f(x)$.
Se $p = a + bx$ nos resta determinar a e b. Em $x = 0,\ p = p_1$, portanto $a = p_1$ em $x = L,\ p = p_2$, portanto $a + bL = p_2\ p_1 + bL = p_2\ b = \frac{p_1 - p_2}{L}$.

$$p(x, y) \ = \ p_1 - \left(\frac{p_1 - p_2}{L}\right) x \ - \ (\rho g) y$$

(d) Para terminar com chave de ouro, vamos obter o perfil de velocidades. Comece com a tua componente x da equação de Navier-Stokes. É uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem. Pegue a tua fórmula da pressão e obtenha o gradiente de pressão $\frac{\partial p}{\partial x}$. Depois integre duas vezes em y, o que gerará duas constantes de integração,c_1 e c_2. Use as condições de contorno $u = 0$ em $y = \pm d$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ em $y = 0$ para obter c_1 e c_2. A tua resposta deve ser uma expressão para $u(y)$ em função de $\mu,\ d,\ L,\ p_1$ e p_2. $\boxed{10}$

Resposta:

Partindo daqui, $\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial p}{\partial x}$ podemos substituir o gradiente de pressão obtido ali em cima: $\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\left(\dfrac{p_1 - p_2}{L}\right)$. Devemos integrar esta expressão 2 vezes em y:

$u \ = \ \dfrac{1}{2\mu}\left(\dfrac{p_1 - p_2}{L}\right) y^2 \ + \ c_1 y \ + c_2.$ Usando as condições de contorno,

$\dfrac{du(0)}{dy} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ e $u(d) = 0 \Rightarrow c_2 = \dfrac{d^2}{2\mu}\left(\dfrac{p_1 - p_2}{L}\right)$

...voilá: $u(y) \ = \ \dfrac{1}{2\mu}\left(\dfrac{p_1 - p_2}{L}\right) y^2 \ + \ \dfrac{d^2}{2\mu}\left(\dfrac{p_1 - p_2}{L}\right) \ = \ \left(\dfrac{p_1 - p_2}{2\mu L}\right)(d^2 - y^2)\,.$

♠

Questão	1	2	3	4	5	Total
Pontos	30	10	10	15	35	100
Nota						

Memória não–volátil:

$\Gamma = \oint_C \vec{u}.\vec{dl}$

Continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\, u_i) = 0$$

Conversão do sistema retangular (x, y, z) para o cilíndrico (r, θ, z) e vice-versa:
$y = r\cos\theta$, $x = r\sin\theta$, $z = z$ e
$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, $z = z$.
Quanto aos versores,
$i_x = (i_r \cos\theta - i_\theta \sin\theta)$, $i_y = (i_r \sin\theta + i_\theta \cos\theta)$, $i_z = i_z$

$$\begin{aligned} u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ u = \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned}$$

$\vec{H} = \int_V (\rho \vec{u} dV) \times \vec{r}$

$\frac{\rho u^2}{2} \ + \ \rho\, g\, z \ + \ p \ = \ B.$

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar						
Divergente	$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} =$	$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\, u_r)}{\partial r}$	$+$	$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$	$+$	$\frac{\partial u_z}{\partial z}$
Gradiente	$\vec{\nabla} V =$	$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$
Rotacional	$\vec{\nabla} \times \vec{U} =$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\, u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_z}$