

Informações:

- Duração de 2:00.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra abaixo anulará o teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

1. As afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas? Justifique as falsas.

- (a) As forças de Coriolis e centrífuga são fundamentalmente diferentes da força gravitacional pois dependem da aceleração do sistema de referência e não de propriedades da matéria. 3  
 A. Errado **B. Certo**

**Resposta:**

Dependem da rotação, portanto da aceleração, do sistema de referência.

- (b) Na equação da conservação de energia o termo de dissipação viscosa  $\Phi$  é introduzido através da substituição da equação constitutiva de fluidos Newtonianos no termo de trabalho das forças de corpo. A. Certo **B. Errado** 3

**Resposta:**

A substituição é no trabalho das forças de **superfície**, pois o cisalhamento gera dissipação.

- (c) A equação da continuidade pode ser simplificada para a forma  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$  quando estudamos circulação abissal de larga escala (abaixo de 3000m). **A. Certo** B. Errado 3

**Resposta:**

Ela pode ser simplificada pois o **gradiente** de densidade é pequeno apesar da enorme pressão.

- (d) O potencial de velocidade é definido para fluxos bidimensionais não-divergentes. 3  
**A. Errado** B. Certo

**Resposta:**

É definido para fluxos **irrotacionais**.

- (e) Apenas nos fluidos Newtonianos a deformação é linearmente proporcional à tensão. 3  
 A. Errado **B. Certo**

**Resposta:**

Essa é a definição de fluido Newtoniano.

2. Use a expressão matemática da vorticidade para mostrar que uma canoa colocada fora do centro de um vórtice irrotacional não gira em torno de si mesma. A canoa é muito menor que o raio do vórtice. 5

**Resposta:**

Só temos  $u_\theta = \frac{C}{r}$ , as demais componentes e/ou derivadas são nulas, portanto

$$\omega_z = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \left[ r \left( \frac{C}{r} \right) \right]}{\partial r} = 0.$$

3. Suponha que a bactéria X é extremamente sensível a mudanças repentinas de pressão e torna-se inativa se a pressão variar de mais de  $10^4 \text{N.m}^2$  em 1s. Ondas capilares com período de 0.1s são geradas na superfície plana do mar e quando quebram por *microbreaking* ejetam gotículas de .1mm de raio para a atmosfera. Uma bactéria X está junto à superfície, uma onda capilar quebra e ela é capturada numa gotícula. Ela ficará inativa? 5

**Resposta:**

Lembrando que para uma gota  $\Delta p = \frac{2\sigma}{r} = \frac{2 \times 73 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-4}} = 1460$ , na gotícula a pressão é  $1460 \text{N.m}^2$ . O período da onda é de .1s, portanto a compressão na gotícula é de  $1460/0.1 = 1.46 \times 10^4 > 10^4 \text{N.m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , ergo a bactéria fica inativa.

4. Considere a **equação de Navier-Stokes** na notação usual:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{g}_a - 2\vec{\Omega} \times \vec{u}.$$

- (a) Obtenha a equação hidrostática na forma escalar e justifique suas aproximações. 5

**Resposta:**

Se a velocidade é nula, sobra apenas  $0 = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}_a$  onde a componente vertical é a única não-nula, portanto  $\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_a$ .

- (b) Considere o fluxo invíscido e as acelerações desprezíveis quando comparadas aos termos do gradiente horizontal de pressão e da força de Coriolis. Complete as equações do movimento:

10

$$\begin{array}{lll}
 \text{Continuidade} & \underline{\hspace{2cm}} & = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \\
 \text{Hidrostática} & \underline{\hspace{2cm}} & = \underline{\hspace{2cm}} \text{ copie do item a} \\
 \text{Momentum Zonal} & \frac{\partial}{\partial} \underline{\hspace{1cm}} & = 2\Omega \underline{\hspace{1cm}} \theta \frac{\partial}{\partial} \underline{\hspace{1cm}} \\
 \text{Mom. Meridional} & \frac{\partial}{\partial} \underline{\hspace{1cm}} & = 2\Omega \underline{\hspace{1cm}} \theta \frac{\partial}{\partial} \underline{\hspace{1cm}}
 \end{array}$$

**Resposta:**

$$\begin{array}{lll}
 \text{Continuidade} & 0 & = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \\
 \text{Hidrostática} & \frac{\partial p}{\partial z} & = \rho g_a \\
 \text{Momentum Zonal} & \frac{\partial u}{\partial y} & = 2\Omega \sin \theta \frac{\partial p}{\partial x} \\
 \text{Mom. Meridional} & \frac{\partial v}{\partial x} & = -2\Omega \sin \theta \frac{\partial p}{\partial y}
 \end{array}$$

5. Considere uma superfície  $A$  que envolve um volume  $V$ . Para que a entropia  $S$  se conserve, a variação total da entropia dentro de  $V$  tem de ser igual ao fluxo de entropia que passa pela área total  $A$ , ou seja:

10

$$\int_V \frac{\partial S}{\partial t} dV = - \int_A S \vec{u} \cdot d\vec{A}.$$

Considere um processo isoentrópico. A partir da equação acima deduza a equação abaixo e responda: qual a interpretação física do segundo termo? (Quero contas com explicações.)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (S \vec{u}) = 0$$

**Resposta:**

Usando Gauss  $\int_A (S \vec{u}) \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot (S \vec{u}) dV$ , obtemos  $\int_V \frac{\partial S}{\partial t} dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot (S \vec{u}) dV = 0$ .

Agrupando, temos  $\int_V \left( \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (S \vec{u}) \right) dV = 0$  Para que o integrando da última expressão se anule para qualquer  $V$  é necessário que:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (S \vec{u}) = 0. \quad \text{O segundo termo é o fluxo de entropia } \perp \text{ a } A, \text{ em } \text{WK}^{-1}.$$

6. O fluxo dado pelas equações abaixo é incompressível? Explique a sua resposta (b é constante).

10

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} \cos(br^2) \\ u_\theta = 2r\theta b \frac{\sin(2br^2)}{\cos(br^2)} \\ u_z = -2bz \sin(br^2) \end{cases}$$

**Resposta:**

Divergente em coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Para o 1º termo do lado direito,  $ru_r = \cos(br^2)$  portanto:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = -2b \sin(br^2).$$

A derivada em  $z$  do 3º termo do lado direito é trivial:

$$\frac{\partial[-2bz \sin(br^2)]}{\partial z} = -2b \sin(br^2).$$

Antes de se escabelar com a derivada do 2º termo, lembre que  $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ , portanto  $2 \sin(2x) = 4 \sin(x) \cos(x)$  e  $4 \sin(x) = \frac{2 \sin(2x)}{\cos(x)}$ . Faça  $x = 2br^2$  e multiplique tudo por  $r\theta b$  para obter  $4r\theta b \sin(br^2)$ .

Desta forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial[4r\theta b \sin(br^2)]}{\partial \theta} = 4b \sin(br^2).$$

A soma é nula e portanto o fluxo é incompressível.

7. Considerando o fluxo laminar independente do tempo descrito pela função de corrente:

$$\psi = U y \left( 1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right), \text{ com } U \text{ e } a \text{ constantes reais. A Pressão em } x = \pm\infty \text{ é } P_\infty.$$

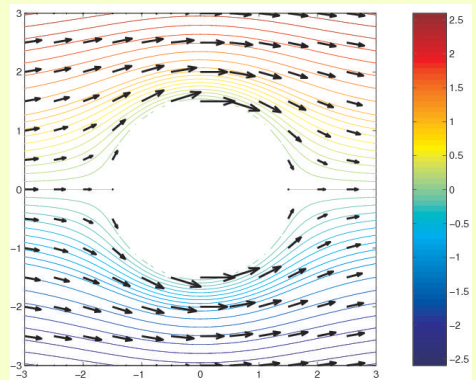
(a) Esboce as linhas de corrente para  $\sqrt{x^2 + y^2} \geq a$ .

5

Dicas: Desenhe os eixos. Comece por  $\psi = 0$ , daí já sai uma linha. Depois analise  $\psi(x, y \rightarrow \pm\infty)$ ; com isso você já sabe como é o campo distante. Para preencher o resto do desenho, quando  $x^2 + y^2$  se aproxima de  $a^2$ , veja o que acontece com  $\psi$ .

**Resposta:**

Se  $\psi = 0$  as raízes são  $y = 0$  e  $1 = \frac{a^2}{x^2+y^2}$ , uma reta horizontal e um círculo de raio  $a$ . Comece por aí. Para  $\psi(x \rightarrow \pm\infty)$  (ou  $\psi(y \rightarrow \pm\infty)$ ) temos  $\psi = Uy$ , um feixe de retas paralelas horizontais. Essas retas se curvam em torno do círculo  $\sqrt{x^2 + y^2} = a$ .



- (b) Calcule as componentes da velocidade. Que situação real este fluxo pode representar? 5

Dicas: Use a definição de  $\psi$ ; Depois analise as componentes  $u$  e  $v$  se  $(x, y \rightarrow \pm\infty)$ .

**Resposta:**

Da definição de  $\psi$  basta usar a regra do quociente **que eu dei**: se  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$  então  $f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$ .

$$u = U \left[ 1 - \frac{a^2}{(x^2 + y^2)} - \frac{2a^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \quad \text{e} \quad v = \frac{2Uxya^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Portanto  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u = U$  e  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v = 0$ , o campo distante é horizontal.

Isso representa um cilindro vertical longo imerso em um fluxo constante no plano  $z = C$ .

- (c) Mostre que o fluxo é irrotacional. Calcule a pressão (em termos de  $\rho$ ,  $U$ ,  $a$ ,  $x$  e da pressão num ponto distante  $P_\infty$ ) para  $y = 0$  usando a equação de Bernoulli com  $z = C$ ,  $C$  constante. 10

Dicas: Se o fluxo é irrotacional  $\nabla^2(\psi) = 0$ .  
Use Bernoulli com um ponto no  $x = \infty$  e o outro num ponto qualquer:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{Q^2}{2} + gC = \frac{P_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gC$$

Sendo  $Q^2 = u^2 + v^2$  (módulo da velocidade). Substitua  $y = 0$  em  $u$  e  $v$  e voilà!

**Resposta:**

De novo, basta usar a regra do quociente **que eu dei** e acertar as derivadas segundas para obter

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{2Uya^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{8Ux^2y^2a^2}{(x^2 + y^2)^3} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{6Uya^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{8Uy^3a^2}{(x^2 + y^2)^3},$$

cujas soma é o Laplaciano e é nulo, portanto o campo externo ao círculo de raio  $a$  é irrotacional. Agora vamos usar a eq. de Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{Q^2}{2} = \frac{P_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2}$$

resolvendo para  $p$ :

$$p = \rho \left( \frac{U^2 - Q^2}{2} \right) + P_\infty.$$

Substituindo  $u$  e  $v$  em  $Q$  e fazendo  $y = 0$ :

$$p = P_\infty + \frac{\rho U^2 a^2}{2x^2} \left( 2 - \frac{a^2}{x^2} \right)$$

- (d) Qual o valor máximo da pressão e onde ela ocorre? Qual é a velocidade nesses pontos? 5

**Resposta:**

Note da penúltima equação que a pressão é máxima onde  $Q^2 = 0$  pois  $U$  é constante e  $P_\infty$  também. Inspeccionando as fórmulas de  $u$  e  $v$  vemos que isso ocorre em  $y = 0$  e  $x = \pm a$  (pontos de estagnação, velocidade zero).

8. Considere a **equação de Navier-Stokes** na notação usual:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2\vec{u} + g_z - 2\vec{\Omega} \times \vec{u}. \quad (1)$$

Vamos usar a equação 1 aplicada a um problema de circulação na mesa girante. Para simplificar o problema considere o seguinte:

- O balanço de forças na vertical é hidrostático:

$$\rho g_z = -\frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2)$$

- O fluxo é aproximadamente estacionário, linear, invíscido, incompressível e homogêneo.

- (a) Escreva as equações das componentes horizontais do balanço de forças. Quero uma equação para a direção  $x$  e uma para  $y$ . Note que, por causa do produto vetorial, a equação para  $x$  tem  $v$  e a equação para  $y$  tem  $u$ . 5

**Resposta:**

$$\begin{aligned} 2\Omega v &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ 2\Omega u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}$$

- (b) Derive cruzado e some as duas equações para eliminar o termo em  $p$ . Use a equação da continuidade para obter uma expressão para  $\frac{\partial w}{\partial z}$ . 10

**Resposta:**

$$\begin{aligned} 2\Omega \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \\ 2\Omega \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \\ 2\Omega \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Usando a continuidade para o caso incompressível e homogêneo,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ .

- (c) Diferencie em  $z$  as equações que você obteve no item a e substitua a equação 2 para obter expressões para  $\frac{\partial u}{\partial z}$  e  $\frac{\partial v}{\partial z}$ . Tendo em vista essas expressões juntamente com a obtida no item b, o que acontece quando colocamos um pequeno obstáculo no fundo do tanque girante e forçamos uma corrente horizontal a passar sobre ele? Nota: Essa corrente é dezenas de vezes mais lenta que velocidade tangencial imposta pela rotação.

10

**Resposta:**

**Resposta:**

$$2\Omega \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z}$$

$$2\Omega \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z}$$

$$2\Omega \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho g_z}{\partial x}$$

$$2\Omega \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho g_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Portanto não há cisalhamento vertical das velocidades! O fluxo não consegue passar por cima do obstáculo, pois isso causaria cisalhamento. A água passa em torno do obstáculo, como se o mesmo fosse uma coluna, daí o nome desse experimento: colunas de Taylor.



Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Pontos	15	5	5	15	10	10	25	25	110
Nota									

**Memória não-volátil:**

Regra do quociente: se  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$  então  $f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$ .

O coeficiente de tensão superficial da água é  $73 \times 10^{-3} \text{N.m}^{-1}$ .

<b>Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar</b>	
Função escalar	$E = E(r, \theta, z)$
Função vetorial	$\vec{V} = u_r(r, \theta, z)\hat{i}_r + u_\theta(r, \theta, z)\hat{i}_\theta + u_z(r, \theta, z)\hat{i}_z$
Gradiente <small>é vetor!</small>	$\vec{\nabla} E = \left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)\hat{i}_r + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)\hat{i}_\theta + \left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)\hat{i}_z$
Divergente <small>é escalar!</small>	$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$
Rotacional <small>é vetor!</small>	$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\hat{i}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\hat{i}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\hat{i}_z$

Esta é a definição de  $\psi$   
em coords. cartesianas:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

Esta é a definição de  $\psi$   
em coords. cilíndricas:

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$