IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova REC** Nome:____________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra abaixo anulará o teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

---

1. As afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas? Justifique as falsas.

   (a) Na equação da conservação de energia o termo de dissipação viscosa Φ é introduzido através da substituição da equação constitutiva de fluidos Newtonianos no termo de trabalho das forças de superfície. $\boxed{4}$
   A. Falso **B. Verdadeiro**

   Resposta:
   A substituição é no trabalho das forças de **superfície**, pois o cisalhamento gera dissipação.

   (b) A equação da continuidade pode ser simplificada para a forma $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ quando estudamos circulação abissal. $\boxed{4}$
   A. Verdadeiro B. Falso

   Resposta:
   Ela pode ser simplificada pois o **gradiente** de densidade é pequeno apesar da enorme pressão.

   (c) O potencial de velocidade é definido para fluxos irrotacionais bidimensionais. $\boxed{4}$
   A. Falso **B. Verdadeiro**

   Resposta:
   É definido para fluxos **irrotacionais** 2D.

   (d) As forças de Coriolis e centrífuga são fundamentalmente diferentes da força gravitacional pois dependem da aceleração do sistema de referência e não de propriedades da matéria. $\boxed{4}$
   A. Verdadeiro B. Falso

   Resposta:
   Dependem da **variação** da velocidade (rotação=aceleração) do sistema de referência e não da velocidade.

   (e) Apenas nos fluidos Newtonianos a deformação é linearmente proporcional à tensão. $\boxed{4}$
   A. Falso **B. Verdadeiro**

   Resposta:
   Essa é a definição de fluido Newtoniano.

2. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual e responda: $\boxed{5}$

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\vec{g} + \rho(\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})) - 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}.$$

   Em que latitude(s) a força centrífuga é sempre igual à de Coriolis? Explique.

Resposta:

A centrífuga é radial, para fora, no plano de rotação da Terra, A de Coriolis é $\perp$ à velocidade. Portanto não podem ser **sempre** iguais em lugar nenhum.

3. Suponha que a bactéria X é extremamente sensível a mudanças repentinas de pressão e torna–se inativa se a pressão variar de mais de 10^4N.m^2 em 1s. Ondas capilares com período de 0.1s são geradas na superfície plana do mar e quando quebram por *microbreaking* ejetam gotículas de .1mm de raio para a atmosfera. Uma bactéria X está junto à superfície, uma onda capilar quebra e ela é capturada numa gotícula. Ela ficará inativa? 5

Resposta:

Lembrando que para uma gota $\Delta p = \frac{2\sigma}{r} = \frac{2\times 73\times 10^{-3}}{1\times 10^{-4}} = 1460$, na gotícula a pressão é 1460 N.m^2. O período da onda é de .1s, portanto a compressão na gotícula é de 1460/0.1=1.46$\times 10^4$ $>$ 10^4N.m^2.s^{-1}, *ergo* a bactéria fica inativa.

4. Durante o curso a segunda lei da termodinâmica e a equação da continuidade foram combinadas na dedução desta equação: 10

$$\rho\frac{DS}{Dt} = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) - \frac{\vec{q}}{T^2}\cdot\vec{\nabla}T + \frac{\Phi}{T}$$

Substitua nela a equação da difusão simples de calor (lei de Fourier) e obtenha a **equação da produção de entropia**. Identifique nessa nova equação o(s) termo(s) relativo(s) à produção de entropia e explique o processo físico associado a ele(s).

Resposta:

$$\underbrace{\rho\frac{DS}{Dt}}_{\text{var. da entropia}} = \underbrace{-\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{q}}{T}\right)}_{\text{converg. calor}} + \underbrace{\frac{k}{T^2}(\vec{\nabla}T)^2}_{\text{prod.ent.condução}} + \underbrace{\frac{\Phi}{T}}_{\text{prod.ent.viscosidade}}$$

5. O fluxo dado pelas equações abaixo é incompressível? Explique a sua resposta (b é constante). 15

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r}\cos(br^2) \\ u_\theta = 2r\theta b\frac{\sin(2br^2)}{\cos(br^2)} \\ u_z = -2bz\sin(br^2) \end{cases}$$

Resposta:

Divergente em coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Para o 1º termo do lado direito, $ru_r = \cos(br^2)$ portanto:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = -2b\sin(br^2).$$

A derivada em z do 3º termo do lado direito é trivial:

$$\frac{\partial[-2bz\sin(br^2)]}{\partial z} = -2b\sin(br^2).$$

Antes de se escabelar com a derivada do 2º termo, lembre que
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, portanto
$2\sin(2x) = 4\sin(x)\cos(x)$ e
$4\sin(x) = \frac{2\sin(2x)}{\cos(x)}$.
Faça $x = 2br^2$ e multiplique tudo por $r\theta b$ para obter $4r\theta b\sin(br^2)$.
Desta forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial[4r\theta b\sin(br^2)]}{\partial \theta} \quad = \quad 4b\sin(br^2).$$

A soma é nula e portanto o fluxo é incompressível.

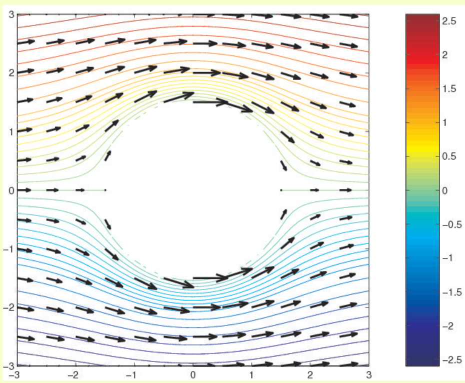
6. Considere o fluxo laminar independente do tempo descrito pela função de corrente $\psi = U\,y\left(1 - \frac{a^2}{x^2+y^2}\right)$, com U e a constantes reais.

   (a) Esboce as linhas de corrente para $\sqrt{x^2+y^2} \geq a$. $\boxed{5}$

   Dicas: Desenhe os eixos. Comece por $\psi = 0$, daí já sai uma linha. Depois analise $\psi(x, y \to \pm\infty)$; com isso você já sabe como é o campo distante. Para preencher o resto do desenho, quando x^2+y^2 se aproxima de a^2, veja o que acontece com ψ.

   Resposta:

   Se $\psi = 0$ as raízes são $y = 0$ e $1 = \frac{a^2}{x^2+y^2}$, uma reta horizontal e um círculo de raio a. Comece por aí. Para $\psi(x \to \pm\infty)$ (ou $\psi(y \to \pm\infty)$) temos $\psi = Uy$, um feixe de retas paralelas horizontais. Essas retas se curvam em torno do círculo $\sqrt{x^2+y^2} = a$.

   (b) Calcule as componentes da velocidade. Que situação real este fluxo pode representar? $\boxed{10}$

   Dicas: Use a definição de ψ; Depois analise as componentes u e v se $(x, y \to \pm\infty)$.

   Resposta:
   Da definição de ψ basta usar a regra do quociente **que eu dei**: se $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ então $f'(x) =$

$\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$.

$$u = U\left[1 - \frac{a^2}{(x^2+y^2)} - \frac{2a^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] \quad \text{e} \quad v = \frac{2Uxya^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\text{Portanto} \lim_{x\to\pm\infty} u = U \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\pm\infty} v = 0, \text{ o campo distante é horizontal.}$$

Isso representa um cilindro vertical longo imerso em um fluxo constante no plano $z = C$.

(c) Mostre que o fluxo é irrotacional. A Pressão em $x = \pm\infty$ é P_∞. Calcule a pressão (em termos de $\rho,\ U,\ a,\ x$ e P_∞) para $y = 0$ usando a equação de Bernoulli com $z = C,\ C$ constante. 10

Dicas: Use Bernoulli com um ponto no $x = \infty$ e o outro num local qualquer: $\frac{p}{\rho} + \frac{Q^2}{2} + gC = \frac{P_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gC$. Sendo $Q^2 = u^2 + v^2$ (módulo da velocidade). Substitua $y = 0$ em u e v e voilá!

Resposta:
De novo, basta usar a regra do quociente **que eu dei** e acertar as derivadas segundas para obter

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{2Uya^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{8Ux^2y^2a^2}{(x^2+y^2)^3} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{6Uya^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{8Uy^3a^2}{(x^2+y^2)^3},$$

cuja soma é o Laplaciano e é nulo, portanto o campo externo ao círculo de raio a é irrotacional. Agora vamos usar a eq. de Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{Q^2}{2} = \frac{P_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2}$$

resolvendo para p:

$$p = \rho\left(\frac{U^2 - Q^2}{2}\right) + P_\infty.$$

Substituindo u e v em Q e fazendo $y = 0$:

$$p = P_\infty + \frac{\rho U^2 a^2}{2x^2}\left(2 - \frac{a^2}{x^2}\right)$$

(d) Qual o valor máximo da pressão e onde ela ocorre? Qual é a velocidade nesses pontos? 5

Resposta:
Note da penúltima equação que a pressão é máxima onde $Q^2 = 0$ pois U é constante e P_∞ também. Inspecionando as fórmulas de u e v vemos que isso ocorre em $y = 0$ e $x = \pm a$ (pontos de estagnação, velocidade zero).

7. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2\vec{u} + g_z - 2\vec{\Omega}\times\vec{u}. \tag{1}$$

Vamos usar a equação 1 aplicada a um problema de circulação na mesa girante. Para simplificar o problema considere o seguinte:

- O balanço de forças na vertical é hidrostático:

$$\rho g_z = -\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{2}$$

- O fluxo é aproximadamente estacionário, linear, invíscido, incompressível e homogêneo.

(a) Escreva as equações das componentes horizontais do balanço de forças. Quero uma equação para a direção x e uma para y. Note que, por causa do produto vetorial, a equação para x tem v e a equação para y tem u. $\boxed{5}$

Resposta:

$$\begin{aligned} 2\Omega v &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ 2\Omega u &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}$$

(b) Derive cruzado e some as duas equações para eliminar o termo em p. Use a equação da continuidade para obter uma expressão para $\frac{\partial w}{\partial z}$. $\boxed{10}$

Resposta:

$$\begin{aligned} 2\Omega\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \\ 2\Omega\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \\ 2\Omega\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Usando a continuidade para o caso incompressível e homogêneo, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$, $\boxed{\frac{\partial w}{\partial z} = 0}$.

Resposta:

(c) Diferencie em z as equações que você obteve no item a e substitua a equação 2 para obter expressões para $\frac{\partial u}{\partial z}$ e $\frac{\partial v}{\partial z}$. Tendo em vista essas expressões juntamente com a obtida no item b, o que acontece quando colocamos um pequeno obstáculo no fundo do tanque girante e forçamos uma corrente horizontal a passar sobre ele? Nota: Essa corrente é dezenas de vezes mais lenta que velocidade tangencial imposta pela rotação. $\boxed{10}$

Resposta:

$$
\begin{aligned}
2\Omega\frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial z} \\
2\Omega\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial y\partial z}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\Omega\frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho g_z}{\partial x} \\
2\Omega\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho g_z}{\partial y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= 0
\end{aligned}
$$

Portanto não há cisalhamento vertical das velocidades! O fluxo não consegue passar por cima do obstáculo, pois isso causaria cisalhamento. A água passa em torno do obstáculo, como se o mesmo fosse uma coluna, daí o nome desse experimento: colunas de Taylor.

Questão	1	2	3	4	5	6	7	Total
Pontos	20	5	5	10	15	30	25	110
Nota								

Memória não–volátil:
Regra do quociente: se $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ então $f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$.

O coeficiente de tensão superficial da água é 73×10^{-3}N.m-1.

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar	
Função escalar	$E = \quad E(r, \theta, z)$
Função vetorial	$\vec{V} = \quad u_r(r,\theta,z)_{\hat{i}_r} \quad + \quad u_\theta(r,\theta,z)_{\hat{i}_\theta} \quad + \quad u_z(r,\theta,z)_{\hat{i}_z}$
Gradiente é vetor!	$\vec{\nabla} E = \quad \left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r} \quad + \quad \left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_\theta} \quad + \quad \left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$
Divergente é escalar!	$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \quad \frac{1}{r}\frac{\partial (r\, u_r)}{\partial r} \quad + \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad + \quad \frac{\partial u_z}{\partial z}$
Rotacional é vetor!	$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\, u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_z}$

Esta é a definição de ψ em coords. cartesianas:

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases}$$

Esta é a definição de ψ em coords. cilíndricas:

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta = -\dfrac{\partial \psi}{\partial r}. \end{cases}$$