IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova REC** Nome:____________________

Informações:

- Duração de 2:30.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra abaixo anulará o teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

---

1. As afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas? Justifique as falsas.

   (a) As forças de Coriolis e centrífuga são fundamentalmente diferentes da força gravitacional pois dependem da aceleração do sistema de referência e não de propriedades da matéria. A. Errado **B. Certo** $\boxed{3}$

   **Resposta:**
   Dependem da rotação, portanto da aceleração, do sistema de referência.

   (b) Na equação da conservação de energia o termo de dissipação viscosa $\Phi$ é introduzido através da substituição da equação constitutiva de fluidos Newtonianos no termo de trabalho das forças de corpo. A. Certo **B. Errado** $\boxed{3}$

   **Resposta:**
   A substituição é no trabalho das forças de **superfície**, pois o cisalhamento gera dissipação.

   (c) A equação da continuidade pode ser simplificada para a forma $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ quando estudamos circulação abissal de larga escala (abaixo de 3000m). **A. Certo** B. Errado $\boxed{3}$

   **Resposta:**
   Ela pode ser simplificada pois o **gradiente** de densidade é pequeno apesar da enorme pressão.

   (d) O potencial de velocidade é definido para fluxos bidimensionais não–divergentes. **A. Errado** B. Certo $\boxed{3}$

   **Resposta:**
   É definido para fluxos **irrotacionais**.

   (e) Apenas nos fluidos Newtonianos a deformação é linearmente proporcional à tensão. A. Errado **B. Certo** $\boxed{3}$

   **Resposta:**
   Essa é a definição de fluido Newtoniano.

2. Use a expressão matemática da vorticidade para mostrar que uma canoa colocada fora do centro de um vórtice irrotacional não gira em torno de si mesma. A canoa é muito menor que o raio do vórtice. $\boxed{5}$

   **Resposta:**

Só temos $u_\theta = \frac{C}{r}$, as demais componentes e/ou derivadas são nulas, portanto

$$\omega_z \;=\; \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \;=\; = \; \frac{1}{r}\frac{\partial\left[r\left(\frac{C}{r}\right)\right]}{\partial r} \;=\; 0.$$

3. Suponha que a bactéria X é extremamente sensível a mudanças repentinas de pressão e torna–se inativa se a pressão variar de mais de $10^4$N.m$^2$ em 1s. Ondas capilares com período de 0.1s são geradas na superfície plana do mar e quando quebram por *microbreaking* ejetam gotículas de .1mm de raio para a atmosfera. Uma bactéria X está junto à superfície, uma onda capilar quebra e ela é capturada numa gotícula. Ela ficará inativa? $\boxed{5}$

**Resposta:**
Lembrando que para uma gota $\Delta p = \frac{2\sigma}{r} = \frac{2\times 73\times 10^{-3}}{1\times 10^{-4}} = 1460$, na gotícula a pressão é 1460 N.m$^2$. O período da onda é de .1s, portanto a compressão na gotícula é de 1460/0.1=1.46$\times 10^4$ $>$ $10^4$N.m$^2$.s$^{-1}$, *ergo* a bactéria fica inativa.

4. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual e responda:

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} \;=\; -\vec{\nabla}p \;+\; \mu\nabla^2\vec{u} \;+\; \rho\vec{g} \;+\; \rho(\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})) \;-\; 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}. \qquad (1)$$

(a) Argumente, usando a equação 2, porque as bases de lançamento de foguetes são preferencialmente localizadas perto do equador. $\boxed{5}$

**Resposta:**
Porque no equador $\cos(\theta) = 1$, a força centrífuga é máxima. Alternativamente, porque no referencial inercial a velocidade tangencial por causa da rotação da Terra é máxima.

(b) Simplifique a equação 2 para estudar o fluxo no Rio Pinheiros. Associe o que foi assumido com o termo eliminado. $\boxed{5}$

**Resposta:**

$$0 = \; -\vec{\nabla}p + \; \mu_t\nabla^2\vec{u} \;+\; \rho g_z.$$

- $\rho\frac{D\vec{u}}{Dt}$ estacionário e linear.
- $\mu\nabla^2\vec{u}$ usei $\mu_t$ turbulento pois $\mu_t >> \mu$.
- $\vec{g}$ usei só o termo vertical pois os horizontais são relativamente pequenos.
- $\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})) - 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}$ nessa escala espaço-temporal rotação não importa.

(c) Simplifique a equação 2 para um fluxo estacionário, turbulento e não–linear que ocorre em médias latitudes da Terra, usando a gravidade aparente. $\boxed{5}$

**Resposta:**

$$\rho u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \;=\; -\vec{\nabla}p \;+\; \mu_t\nabla^2\vec{u} \;+\; \rho\vec{g} \;-\; 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}.$$

5. Considere uma superfície $A$ que envolve um volume $V$. Para que a entropia $S$ se conserve, a variação total da entropia dentro de $V$ tem de ser igual ao fluxo de entropia que passa pela área total $A$, ou seja: $\boxed{10}$

$$\int_V \frac{\partial S}{\partial t} dV = -\int_A S\vec{u}\cdot d\vec{A}.$$

Considere um processo isoentrópico. A partir da equação acima deduza a equação abaixo e responda: qual a interpretação física do segundo termo? (Quero contas com explicações.)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(S\vec{u}) = 0$$

**Resposta:**

Usando Gauss $\displaystyle\int_A (S\vec{u})\cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla}\cdot(S\vec{u})dV,$ obtemos $\displaystyle\int_V \frac{\partial S}{\partial t}dV + \int_V \vec{\nabla}\cdot(S\vec{u})d\vec{V} = 0.$

Agrupando, temos $\displaystyle\int_V \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(S\vec{u})\right) d\vec{V} = 0$ Para que o integrando da última expressão se anule para qualquer $V$ é necessário que:

$\displaystyle\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(S\vec{u}) = 0\ .$ O segundo termo é o fluxo de entropia $\perp$ a $A$, em $\mathrm{WK}^{-1}$.

6. O fluxo dado pelas equações abaixo é incompressível? Explique a sua resposta (b é constante). $\boxed{10}$

$$\begin{cases} u_r &= \frac{1}{r}\cos(br^2) \\ u_\theta &= 2r\theta b\frac{\sin(2br^2)}{\cos(br^2)} \\ u_z &= -2bz\sin(br^2) \end{cases}$$

**Resposta:**

Divergente em coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Para o 1º termo do lado direito, $ru_r = \cos(br^2)$ portanto:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = -2b\sin(br^2).$$

A derivada em $z$ do 3º termo do lado direito é trivial:

$$\frac{\partial[-2bz\sin(br^2)]}{\partial z} = -2b\sin(br^2).$$

Antes de se escabelar com a derivada do 2º termo, lembre que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, portanto $2\sin(2x) = 4\sin(x)\cos(x)$ e $4\sin(x) = \frac{2\sin(2x)}{\cos(x)}$. Faça $x = 2br^2$ e multiplique tudo por $r\theta b$ para obter $4r\theta b\sin(br^2)$.

Desta forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial[4r\theta b\sin(br^2)]}{\partial \theta} \quad = \quad 4b\sin(br^2).$$

A soma é nula e portanto o fluxo é incompressível.

7. Considerando o fluxo laminar independente do tempo descrito pela função de corrente:

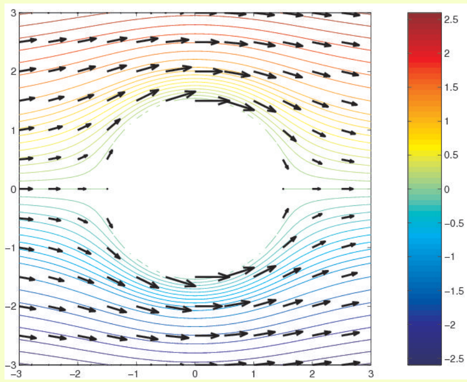
$\psi = U\,y\left(1 - \dfrac{a^2}{x^2+y^2}\right)$, com $U$ e $a$ constantes reais. A Pressão em $x = \pm\infty$ é $P_\infty$.

(a) Esboce as linhas de corrente para $\sqrt{x^2+y^2} \geq a$. [5]

> Dicas: Desenhe os eixos. Comece por $\psi = 0$, daí já sai uma linha. Depois analise $\psi(x, y \to \pm\infty)$; com isso você já sabe como é o campo distante. Para preencher o resto do desenho, quando $x^2+y^2$ se aproxima de $a^2$, veja o que acontece com $\psi$.

**Resposta:**

Se $\psi = 0$ as raízes são $y = 0$ e $1 = \frac{a^2}{x^2+y^2}$, uma reta horizontal e um círculo de raio $a$. Comece por aí. Para $\psi(x \to \pm\infty)$ (ou $\psi(y \to \pm\infty)$ ) temos $\psi = Uy$, um feixe de retas paralelas horizontais. Essas retas se curvam em torno do círculo $\sqrt{x^2+y^2} = a$.




(b) Calcule as componentes da velocidade. Que situação real este fluxo pode representar? [5]

> Dicas: Use a definição de $\psi$; Depois analise as componentes $u$ e $v$ se $(x, y \to \pm\infty)$.

**Resposta:**

Da definição de $\psi$ basta usar a regra do quociente **que eu dei**: se $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ então $f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$.

$$u = U\left[1 - \frac{a^2}{(x^2+y^2)} - \frac{2a^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] \quad \text{e} \quad v = \frac{2Uxya^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Portanto $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u = -U$ e $\lim\limits_{x\to\pm\infty} v = 0,$ o campo distante é horizontal.

Isso representa um cilindro vertical longo imerso em um fluxo constante no plano $z = C$.

(c) Mostre que o fluxo é irrotacional. Calcule a pressão (em termos de $\rho,\ U,\ a,\ x$ e da pressão [10] num ponto distante $P_\infty$) para $y = 0$ usando a equação de Bernoulli com $z = C$, $C$ constante.

Dicas: Se o fluxo é irrotacional $\nabla^2(\psi) = 0$.
Use Bernoulli com um ponto no $x = \infty$ e o outro num ponto qualquer:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{Q^2}{2} + gC = \frac{P_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gC$$

Sendo $Q^2 = u^2 + v^2$ (módulo da velocidade). Substitua $y = 0$ em $u$ e $v$ e voilá!

**Resposta:**
De novo, basta usar a regra do quociente **que eu dei** e acertar as derivadas segundas para obter

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{2Uya^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{8Ux^2y^2a^2}{(x^2+y^2)^3} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{6Uya^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{8Uy^3a^2}{(x^2+y^2)^3},$$

cuja soma é o Laplaciano e é nulo, portanto o campo externo ao círculo de raio $a$ é irrotacional. Agora vamos usar a eq. de Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{Q^2}{2} = \frac{P_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2}$$

resolvendo para $p$:

$$p = \rho\left(\frac{U^2 - Q^2}{2}\right) + P_\infty.$$

Substituindo $u$ e $v$ em $Q$ e fazendo $y = 0$:

$$p = P_\infty + \frac{\rho U^2 a^2}{2x^2}\left(2 - \frac{a^2}{x^2}\right)$$

(d) Qual o valor máximo da pressão e onde ela ocorre? Qual é a velocidade nesses pontos? $\boxed{5}$

**Resposta:**
Note da penúltima equação que a pressão é máxima onde $Q^2 = 0$ pois $U$ é constante e $P_\infty$ também. Inspecionando as fórmulas de $u$ e $v$ vemos que isso ocorre em $y = 0$ e $x = \pm a$ (pontos de estagnação, velocidade zero).

8. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2\vec{u} + g_z - 2\vec{\Omega}\times\vec{u}. \tag{2}$$

Vamos usar a equação 2 aplicada a um problema de circulação na mesa girante. Para simplificar o problema considere o seguinte:

- O balanço de forças na vertical é hidrostático:

$$\rho g_z = -\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{3}$$

- O fluxo é aproximadamente estacionário, linear, invíscido, incompressível e homogêneo.

(a) Escreva as equações das componentes horizontais do balanço de forças. Quero uma equação para a direção $x$ e uma para $y$. Note que, por causa do produto vetorial, a equação para $x$ tem $v$ e a equação para $y$ tem $u$. 5

**Resposta:**

$$\begin{aligned} 2\Omega v &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ 2\Omega u &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}$$

(b) Derive cruzado e some as duas equações para eliminar o termo em $p$. Use a equação da continuidade para obter uma expressão para $\frac{\partial w}{\partial z}$. 10

**Resposta:**

$$\begin{aligned} 2\Omega\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \\ 2\Omega\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \\ 2\Omega\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Usando a continuidade para o caso incompressível e homogêneo, $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$, $\boxed{\frac{\partial w}{\partial z} = 0}$.

(c) Diferencie em $z$ as equações que você obteve no item a e substitua a equação 3 para obter expressões para $\frac{\partial u}{\partial z}$ e $\frac{\partial v}{\partial z}$. Tendo em vista essas expressões juntamente com a obtida no item b, o que acontece quando colocamos um pequeno obstáculo no fundo do tanque girante e forçamos uma corrente horizontal a passar sobre ele? Nota: Essa corrente é dezenas de vezes mais lenta que velocidade tangencial imposta pela rotação. 10

**Resposta:**

**Resposta:**

$$\begin{aligned} 2\Omega\frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} \\ 2\Omega\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} \\ 2\Omega\frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho g_z}{\partial x} \\ 2\Omega\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho g_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

Portanto não há cisalhamento vertical das velocidades! O fluxo não consegue passar por cima do obstáculo, pois isso causaria cisalhamento. A água passa em torno do obstáculo, como se o mesmo fosse uma coluna, daí o nome desse experimento: colunas de Taylor.

♠

| Questão | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pontos | 15 | 5 | 5 | 15 | 10 | 10 | 25 | 25 | 110 |
| Nota | | | | | | | | | |

**Memória não–volátil:**

Regra do quociente: se $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ então $f'(x) = \frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$.

O coeficiente de tensão superficial da água é $73 \times 10^{-3}$N.m$-1$.

| **Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Função escalar | $E =$ | $E(r, \theta, z)$ | | |
| Função vetorial | $\vec{V} =$ | $u_r(r, \theta, z)_{\hat{i}_r}$ | $+\ u_\theta(r, \theta, z)_{\hat{i}_\theta}$ | $+\ u_z(r, \theta, z)_{\hat{i}_z}$ |
| Gradiente é vetor! | $\vec{\nabla} E =$ | $\left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r}$ | $+\ \left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_\theta}$ | $+\ \left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$ |
| Divergente é escalar! | $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} =$ | $\frac{1}{r}\frac{\partial (r\ u_r)}{\partial r}$ | $+\ \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$ | $+\ \frac{\partial u_z}{\partial z}$ |
| Rotacional é vetor! | $\vec{\nabla} \times \vec{V} =$ | $\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r}$ | $+\ \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta}$ | $+\ \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\ u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_z}$ |

Esta é a definição de $\psi$ em coords. cartesianas:

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases}$$

Esta é a definição de $\psi$ em coords. cilíndricas:

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta = -\dfrac{\partial \psi}{\partial r}. \end{cases}$$