IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova REC** Nome:______________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra abaixo anulará o teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

1. As afirmações a seguir são certas ou erradas? Uma errada anula uma certa. Justifique as erradas.

   (a) O tensor $\omega_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ representa a vorticidade e seus termos diagonais representam a deformação por compressão. A. Certo **B. Errado** $\boxed{5}$

   Resposta:
   Esse tensor representa a vorticidade, mas ele não inclui o efeito da compressão.

   (b) A Lei de Fourier para a difusão do calor é uma equação que nos permite fazer diagnósticos, mas não previsões. A. Errado **B. Certo** $\boxed{5}$

   Resposta:
   Certo, ela não inclui dependência temporal.

   (c) Fluxos irrotacionais e incompressíveis são consequentemente invíscidos. **A. Certo** B. errado $\boxed{5}$

   Resposta:
   Utilizando–se identidades vetoriais:

   $$\nabla^2\vec{u} = \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{u}}_{=0 \text{ incompr.}}) - \vec{\nabla}\times(\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{u}}_{=0 \text{ irrot.}}),$$

   vemos que as condições de irrotacionalidade e incompressibilidade equivalem à ausência de viscosidade.

   (d) Num canudinho em repouso dentro de um copo de líquido puro a tensão superficial sempre puxa a interface líquido–ar para cima na parte interna do canudinho. **A. Errado** B. Certo $\boxed{5}$

   Resposta:
   A interface dentro do tubo pode subir ou descer depende da tensão superficial no ponto de contato entre os 3 materiais: canudo, líquido e ar. Por exemplo, se for água, prata e ar a interface não se move.

   (e) A pressão hidrostática num ponto independe da direção considerada. A. Errado **B. Certo** $\boxed{5}$

   Resposta:
   Provamos isso nas primeiras aulas, ela pode ser tratada como escalar, $p = \rho g z$.

2. Considere o campo de velocidades dado por

$$\begin{cases} u = a(x^2 + y^2) \\ v = -2axy \\ w = 0 \end{cases}$$

(a) A função de corrente existe? Prove matematicamente a sua resposta. $\boxed{5}$

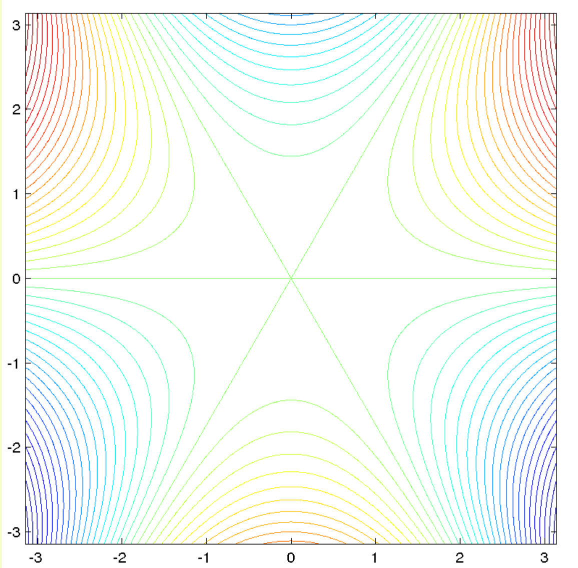
Resposta:
Sim. Basta usar a incompressibilidade: $\vec{\nabla}\vec{u} = 0$: $\quad 2ax + (-2ax) = 0$.

(b) Dê a fórmula da função de corrente. $\boxed{10}$

Resposta:
Usando a definição de ψ para u ou v temos

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = ax^2 - ay^2$$
$$\psi = \int \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + f(x)$$
$$\psi = ax^2 y - \frac{ay^3}{3} + f(x) \qquad \text{derive } \psi \text{ em relação a } x \text{ e compare com } v$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2axy + f'(x) = v = 2axy \Rightarrow f = \text{constante.}$$

A função completa é $\psi = ax^2 y - \frac{ay^3}{3} + C$.



3. Derive a equação da conservação de energia mecânica partindo da equação da continuidade. Indique o que representa fisicamente cada um dos 4 termos da expressão final. $\boxed{15}$

Dicas:

- Multiplique a equação da continuidade por $\frac{1}{2}\rho u_i^2$.
- Some-a ao lado esquerdo desta equação abaixo, que ilustra teorema da energia cinética:

$$\rho \frac{\frac{1}{2} D u_i^2}{Dt} = \rho\, u_i\, g_i \; + \; u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}.$$

- coloque a expressão em termos da energia cinética por unidade de volume E.

Resposta:
Partindo da equação da continuidade, multiplicando–a por $\frac{1}{2}\rho u_i^2$ obtemos:

$$\frac{\rho\, u_i^2}{2}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho\, u_j}{\partial x_j},\right] = 0. \tag{1}$$

Abrindo a derivada material da equação dada no enunciado temos:

$$\rho\,\frac{\frac{1}{2} D u_i^2}{Dt} = \ldots$$

$$\frac{\rho}{2}\,\frac{\partial u_i^2}{\partial t} + \frac{\rho}{2}\,u_j\,\frac{\partial u_i^2}{\partial x_j} = \ldots$$

somando–se a eq. 1, i.e. somando–se zero,

$$\left[\frac{\rho u_i^2}{2}\,\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{2}\,\frac{\partial u_i^2}{\partial t}\right] + \left[\frac{\rho u_i^2}{2}\,\frac{\partial \rho\, u_j}{\partial x_j} + \frac{\rho}{2}\,u_j\,\frac{\partial u_i^2}{\partial x_j}\right] = \ldots$$

aglutinando–se as derivadas de produto e escrevendo também o lado direito, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho\, u_i^2) + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j\,\frac{1}{2}\rho u_i^2) = \rho u_i\, g_i + u_i\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \tag{2}$$

Na equação acima podemos reconhecer a energia cinética por unidade de volume como $E = \frac{1}{2}\rho u_i^2$, e portanto transformá-la nesses 4 termos:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{u}E) = \rho\vec{u}\cdot\vec{g} + \vec{u}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{\tau}) \tag{3}$$

1. Variação local da energia mecânica,
2. convergência de energia por advecção,
3. energia potencial gravitacional e
4. trabalho de deformação feito por forças de superfície.

4. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual e responda:

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\vec{g} + \rho(\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})) - 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}.$$

(a) Explique que simplificações devemos fazer para que o balanço dominante seja entre a força de Coriolis e o gradiente de pressão. $\boxed{5}$

Resposta:
Balanço geostrófico. Ocorre no caso de um fluxo invíscido, estacionário e linear, onde a força centrífuga está incluída no termo gravitacional e este influi apenas no balanço hidrostático vertical.

(b) Explique que simplificações devemos fazer para que o balanço dominante seja entre o fluxo vertical de momentum e a força de Coriolis. 5

Resposta:
Dinâmica de Ekman. Ocorre no caso de um fluxo viscoso com cisalhamento vertical, estacionário e linear, onde a força centrífuga está incluída no termo gravitacional e este influi apenas no balanço hidrostático vertical. O gradiente de pressão é nulo, o que implica que a superfície e as isopicnais são horizontais.

(c) Que termos são dominantes para o cálculo realístico do fluxo no Rio Tamanduateí? Assuma fluido Newtoniano (apesar das aparências). 5

Resposta:
Elimina–se apenas as forças de Coriolis e centrífuga.

5. Considere o fluxo bi-dimensional entre dois clindros longos concêntricos de raios r_1 e r_2 girando com velocidades angulares ω_1 e ω_2 respectivamente. Trabalhando em coordenadas cilíndricas (r, θ, z), as equações do movimento nas direções r e θ podem ser simplificadas respectivamente para:

$$\frac{-u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$0 = \mu\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,u_\theta)\right].$$

Integre a segunda equação e obtenha uma equação diferencial ordinária de primeira ordem em u_θ. A solução dessa equação é a soma de dois fluxos com simetria circular, um onde a velocidade cresce com o raio e um onde ela decai com o raio, portanto precisas determinar duas constantes. Determine–as usando as duas condições de contorno:

$$\text{em } r = r_1 \quad \omega = \omega_1, \quad u_\theta(r_1) = \omega_1 r_1, \quad (p = p_1)$$

$$\text{em } r = r_2 \quad \omega = \omega_2, \quad u_\theta(r_2) = \omega_2 r_2.$$

(a) Dê a equação de $u_\theta(r)$ usando as constantes acima definidas $(r_1,\ r_2,\ \omega_1$ e $\omega_2)$. 10

Resposta:

$$0 = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}(u_\theta + r\frac{du_\theta}{dr})\right] \qquad 0 = \frac{d}{dr}\left[\frac{u_\theta}{r} + r\frac{du_\theta}{dr}\right] \qquad \frac{du_\theta}{dr} = -\frac{d^2u_\theta}{dr^2}$$

$$\text{integrando obtemos} \quad \frac{u_\theta}{r} = -\frac{du_\theta}{dr}$$

Substituindo uma solução da forma sugerida, $u_\theta = Ar + \frac{B}{r}$ e usando as duas condições de contorno em r_1 e r_2 obtemos:

$$A = \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \qquad B = \frac{(\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

A resposta correta seria portanto:

$$u_\theta = \left(\frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\right) r + \left(\frac{(\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\right) \frac{1}{r}$$

(b) Simplifique o resultado anterior para o caso $\omega_1 = \omega_2$. Fisicamente o que representa esse fluxo? $\boxed{5}$

Resposta:
A resposta se reduz a $u_\theta = Cr$ onde C é uma constante, portanto trata-se de um fluxo em rotação de corpo sólido.

(c) Simplifique o resultado anterior para o caso $r_2 \to \infty$ e $\omega_2 \to 0$. Fisicamente o que representa esse fluxo? $\boxed{5}$

Resposta:
A resposta se reduz a $u_\theta = D\frac{1}{r}$ onde D é uma constante, portanto trata-se de um fluxo irrotacional.

(d) Simplifique o resultado anterior para o caso $r_1 \to 0$ e $\omega_1 \to 0$. Fisicamente o que representa esse fluxo? $\boxed{5}$

Resposta:
A resposta se reduz a $u_\theta = Er$ onde E é uma constante, portanto trata-se de outro fluxo em rotação de corpo sólido.

(e) Substitua u_θ na equação para a direção r e dê a solução $p(r)$. Interprete fisicamente os casos onde o raio r é "pequeno"e quando r é "grande" $\boxed{5}$

Resposta:
A resposta se reduz a $p = \rho(Ar - \frac{B}{r}) + F$ com A e B definidos como no primeiro item. F é uma constante, determinada a partir da condição de contorno, $F = p_1 - (Ar_1 - \frac{B}{r_1})$

♠

Questão	1	2	3	4	5	Total
Pontos	25	15	15	15	30	100
Nota						