IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova REC** Nome:____________________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A tentativa de violação de qualquer uma das regras abaixo anulará o exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o telefone.

♠

1. As afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas? Justifique as falsas.

   (a) A equação constitutiva dos fluidos Newtonianos é uma forma da conservação de momentum linear. 5

   A. ( )Verdadeiro **B. ( )Falso**

   Resposta:
   Errado pois ela relaciona tensão com deformação, a equação de Navier–Stokes expressa a conservação de momentum.

   (b) A fórmula da difusão de Fick vista em aula nos permitiu calcular a variação temporal do fluxo que vai contra o gradiente da concentração de uma substância qualquer. 5

   A. ( )Verdadeiro **B. ( )Falso**

   Resposta:
   Errado. Ela nos permite calcular apenas o fluxo no caso estacionário pois não tem dependencia temporal.

   (c) Dois corpos quaisquer, desde que tenham a mesma massa e o mesmo volume, tem momentos de inércia idênticos. 5

   A. ( )Verdadeiro **B. ( )Falso**

   Resposta:
   Momento de inércia depende do produto entre a massa e a distância até o eixo de rotação. Portanto quando muda a forma, o momento de inércia muda.

   (d) Ao se curvar a interface entre ar e água é gerada uma força devida à tensão superficial pois a área da interface aumenta. 5

   A. ( )Verdadeiro B. ( )Falso

   Resposta:
   A tensão superficial pode ser entendida como a energia necessária para se aumentar a área da superfície livre de uma unidade.

   (e) A taxa de deformação por cisalhamento pode ser quantificada pelo tensor simétrico $\frac{\partial u_i}{\partial 2x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial 2x_i}$ com $i \neq j$. 5

   A. ( )Verdadeiro B. ( )Falso

   Resposta:
   Correto. Se colocarmos o fator $\frac{1}{2}$ em evidência ele ficará na forma da equação 24 da apostila.

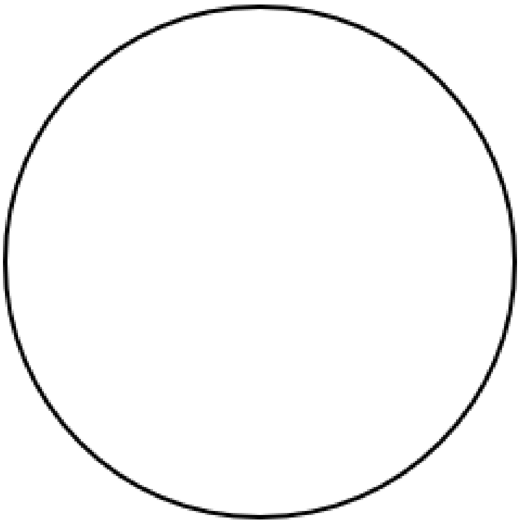
   (f) A equação de Navier–Stokes se aplica à circulação nos oceanos, na atmosfera da Terra, no aquário do Sr. Diretor, na atmosfera de Júpiter, num copo de álcool e nos canos de água das casas. 5

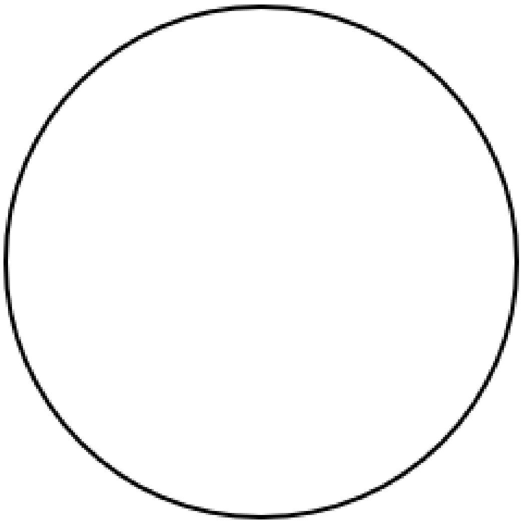
   A. ( )Verdadeiro B. ( )Falso

Resposta:
Certo, aplica–se desde que o fluido seja Newtoniano.

2. Suponha que num tanque cilíndrico com meio metro de raio há um fluxo da seguinte forma:

$$\begin{cases} u_r = 0 \\ u_\theta = \sin(\frac{\pi r}{0.3}) \quad \text{se } 0 \leq r \leq 0.3m \text{ ou} \\ u_\theta = 0 \quad \text{se } r > 0.3m \\ u_z = 0. \end{cases}$$





(a) Desenhe no tanque da esquerda 9 linhas de corrente relevantes num referencial em repouso em relação ao tanque. Explique sua resposta. $\boxed{5}$

Resposta:
Para $r < 30cm$ o espaçamento entre as linhas deve ser mínimo em torno de $r = 15cm$ pois a velocidade é máxima e máximo em $r = 0cm$ e $r = 30cm$ pois a velocidade tende a zero. Não existem linhas em $r > 30cm$ onde a velocidade é nula.

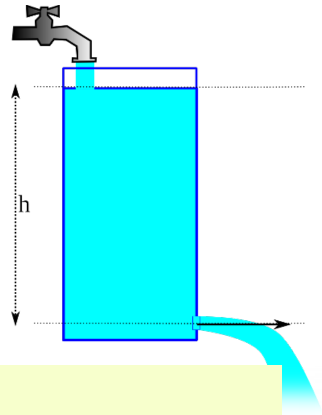
(b) Faça o mesmo para um referencial que gira em torno do centro do tanque com velocidade angular igual a 6.666 rad.s^{-1}. Explique sua resposta. $\boxed{10}$

Resposta:
Note que $u_\theta = \sin(\frac{\pi r}{0.3})$; o seno é, no máximo igual a 1, o que ocorre em $r = 15cm$. Se neste ponto calcularmos $\Omega_{fluido} = \frac{r}{u_\theta} = 6.666 rad/s$ veremos que a velocidade angular do sistema não–inercial é igual à velocidade angular do fluido, portanto a velocidade relativa nesse raio é zero. Para $r < 30cm$ o espaçamento entre as linhas deve ser máximo em torno de $r = 15cm$ onde a velocidade angular relativa é zero e mínimo em $r = 0cm$ e $r = 30cm$ onde a velocidade relativa é máxima. Em $r > 30cm$ o espaçamento tem de ser mínimo e constante pois a velocidade angular relativa é constante e máxima.

3. Uma caixa d’água possui um orifício de 1cm^2 em sua parte inferior como mostra a figura. $\boxed{10}$

Uma torneira na parte superior lança água nesta caixa com o mesmo fluxo que a água sai pelo orifício, mantendo o nível h da caixa constante (caso 1). Ainda mantendo o h constante, aumentamos o diâmetro do furo para 2cm^2 (caso 2). Discuta quantitativamente como variam a velocidade e o fluxo de volume pelo furo nos 2 casos. Dica: esta é a equação de Bernoulli:

$$\frac{\rho u^2}{2} + \rho g z + p = B.$$



Resposta:

A pressão é a mesma (atmosférica) no topo e no furo e a velocidade é zero no topo, portanto

$$\frac{\rho u^2}{2} = \rho g h \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{2gh}$$

A velocidade não depende do tamanho do furo, portanto é a mesma nos dois casos. O fluxo de volume depende diretamente da área do furo e da velocidade, portanto dobrada a área e mantida a velocidade, o fluxo dobrará.

4. Supondo a mesma notação adotada no curso, na equação 1 considere um fluxo de água no planeta Terra com: $\boxed{15}$

- escala de velocidade horizontal de 1 m.s^{-1} e vertical de 0.1 m.dia^{-1};
- escala de tempo para que a velocidade horizontal mude significativamente de 2.5 dias e para a vertical, 2 semanas;
- escala de distância para que a velocidade horizontal mude significativamente de 200 km e para a vertical, 50 km;
- gravidade aparente constante e vertical de 10 m.s^{-2};
- coeficiente de viscosidade cinemática turbulenta de 10^{-3} m^2.s^{-1};

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\vec{\nabla}^2\vec{u} + (g_n + \Omega^2\vec{R}) - 2\vec{\Omega} \times \vec{u}. \tag{1}$$

Use os valores dados, retenha os termos dominantes e responda: Qual o valor (ordem de grandeza e unidades) aproximado do gradiente horizontal de pressão?

Resposta:

Vamos trabalhar no SI. As acelerações verticais não importam. Das horizontais, vejamos qual é o termo dominante:

$\frac{D\vec{u}}{Dt}$ é da forma $\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x}$. $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t} \rightsquigarrow \dfrac{1}{2.5 \times 86400} = 5 \times 10^{-6}$ $\quad u\dfrac{\partial u}{\partial x} \rightsquigarrow \dfrac{1^2}{200000} = 5 \times 10^{-6}$

$\nu \nabla^2 \vec{u} \rightsquigarrow 10^{-3}\dfrac{1}{200000^2} = 2.5 \times 10^{-14}$ $\quad 2\vec{\Omega} \times \vec{u} \rightsquigarrow 2 \times \dfrac{2\pi}{86400} \times 1 = 1.5 \times 10^{-4}$ portanto o termo de Coriolis domina por 1 a 2 ordens de grandeza. Desta forma, para que haja um balanço entre a força de Coriolis e do gradiente de pressão, $\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p \simeq 1.5 \times 10^{-4}$

Para água $\rho = 1000$ portanto $\vec{\nabla} p \simeq \rho 1.5 \times 10^{-4} = 1000 \times 1.5 \times 10^{-4} = 0.15$, a unidade é $N.m^{-2}.m^{-1} = N.m^{-3} = Pa.m^{-1}$

5. Considere a equação de Navier–Stokes para um referencial não-inercial e responda:

(a) Netuno gira em torno do Sol a cada 60190 dias terrestres e em torno de si a cada 16 horas e 7 minutos terrestres. O eixo de rotação de Netuno é aproximadamente paralelo ao da Terra. Calcule o Ω da Terra e o de Netuno. $\boxed{5}$

Resposta:

Para a Terra $\Omega_T = \frac{2\pi}{86400} = 7.2722 \times 10^{-5} rad\, s^{-1}$ e para Netuno $\Omega_N = \frac{2\pi}{16*3600+7*60} = 1.0829 \times 10^{-4}\ rad\, s^{-1}$.

(b) O raio de Netuno é 3.9 vezes o raio da Terra e sua gravidade é 1.14 vezes a da Terra. Calcule a aceleração centrífuga no Trópico de Capricórnio da Terra e (no equivalente) em Netuno, em $\mathrm{m\,s^{-2}}$. A que percentual da gravidade dos respectivos planetas estas forças correspondem? $\boxed{5}$

Resposta:

Para a Terra $a_T = \Omega_T^2 R_T \cos(23.5) = 0.013707 m\, s^{-2}$ equivalente a $100\frac{a_T}{9.81} = 0.13973\%$ da gravidade daqui (usei 6500 km de raio). Para Netuno, $a_N = \Omega_N^2 3.9 R_T \cos(23.5) = 0.11854 m\, s^{-2}$ equivalente a $100\frac{a_N}{1.14 \times 9.81} = 1.0600\%$ da gravidade de lá.

(c) Furacões em Netuno tem ventos horizontais de 600 $\mathrm{m\,s^{-1}}$ e na Terra de 50 $\mathrm{m\,s^{-1}}$. Imaginando estes furacões sobre o equador, calcule a aceleração em $\mathrm{m\,s^{-2}}$ devido ao termo de Coriolis nos dois planetas. $\boxed{5}$

Resposta:

A resposta é zero nos dois casos, pois sobre o equador o seno da latitude se anula.

6. Aplique as aproximações necessárias à forma apropriada da equação da conservação de momentum linear e obtenha a equação de Bernoulli na forma: 15

$$\frac{\rho u^2}{2} + \rho g z + p = B. \qquad (2)$$

Serão úteis para este problema as seguintes identidades vetoriais:

$$\nabla^2\vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u}) \quad \text{e} \quad (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}u^2 - \vec{u}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u}).$$

Ao fazer a derivação será necessário impor **quatro** condições ao fluxo que simplificam o problema. Explicite na resposta quais são essas simplificações.

Resposta:

Parta da equação 1, quando o fluxo for **irrotacional e incompressível** podemos fazer duas simplificações importantes.

1. Considere o termo em μ, que representa as forças viscosas. Utilizando–se a identidade vetorial:

$$\nabla^2\vec{u} = \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{u}}_{=0 \text{ incompr.}}) - \vec{\nabla}\times(\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{u}}_{=0 \text{ irrot.}}),$$

   portanto as condições de irrotacionalidade e incompressibilidade equivalem à ausência de viscosidade (i.e. fluxo **invíscido**) e o último termo se anula.

2. Considere o termo advectivo da derivada material e a seguinte identidade vetorial

$$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = \frac{1}{2}\underbrace{\vec{\nabla}u^2}_{=\vec{\nabla}(\vec{u}\cdot\vec{u})} - \vec{u}\times(\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{u}}_{=0 \text{ irrot.}}).$$

Desta forma ficamos com:

$$\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \frac{\rho}{2}\vec{\nabla}u^2 = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p$$

e se o fluxo for **estacionário**, resta apenas

$$\frac{\rho}{2}\vec{\nabla}u^2 = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p.$$

Sendo que se reescrevermos o termo das forças de corpo como um gradiente podemos agrupar tudo dentro de um mesmo gradiente:

$$\vec{\nabla}\left[\frac{\rho}{2}u^2 + \rho g z + p\right] = 0,$$

para que o gradiente seja sempre nulo, seu argumento deve ser constante, ou seja, sendo B uma constante chegamos à equação 2, que consagra o nome de Bernoulli.

♠

Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos	30	15	10	15	15	15	100
Nota							